Surfaces à courbure extrinsèque négative dans l'espace hyperbolique

Jean-Marc Schlenker*

4 Juin 1999

Abstract

We prove a hyperbolic analogue of Efimov's theorem : there is no complete, smooth surface with curvature $K \leq -1-\epsilon < -1$ in H^3. Similar results are valid in S^3 and H^3_1. They rest on the propagation of degenerations for solutions of some hyperbolic Monge-Ampère equations.

Résumé

On prouve un analogue hyperbolique du théorème d'Efimov: il n'existe pas de surface complète régulière à courbure $K \leq -1-\epsilon < -1$ dans H^3. Des résultats similaires sont valables dans S^3 et H^3_1. Ils reposent sur la propagation des dégénérescences pour les solutions de certaines équations de Monge-Ampère hyperboliques.

1 Introduction

Hilbert [Hil01] a montré en 1901 que le plan hyperbolique H^2 n'admet pas d'immersion isométrique régulière dans $\mathbf{R}^3$. Ce résultat a été généralisé par N. V. Efimov [Efi64] en 1963:

Théorème d'Efimov 1.1. — *Une surface (Σ, σ) munie d'une métrique complète à courbure $K \leq -\epsilon < 0$ n'admet pas d'immersion isométrique C^2 dans $\mathbf{R}^3$.*

On pourra trouver dans [Klo72], [BS92] ou dans [Roz92] plusieurs présentations de ce résultat. Il en existe aussi une sorte de généralisation pour les hypersurfaces de $\mathbf{R}^n$ à courbure de Ricci négative, due à Smyth et Xavier [SX87], dont la preuve est remarquablement simple.

Nous allons donner un énoncé analogue (mais avec des hypothèses de régularité un peu plus fortes) dans l'espace hyperbolique :

Théorème A. — *Soit (Σ, σ) une surface riemannienne complète à courbure $K \leq -1-\epsilon$ telle que $\|\nabla K\|/|K|^{3/2}$ est bornée. Alors (Σ, σ) n'admet pas d'immersion isométrique C^3 dans H^3.*

On trouve aussi un résultat dans S^3 :

Théorème B. — *Si (Σ, σ) est complète à courbure $K \leq -\epsilon < 0$ et telle que $\|\nabla K\|/|K|^{3/2}$ est bornée, alors (Σ, σ) n'admet pas d'immersion isométrique C^3 dans S^3.*

Enfin, voici un résultat lorentzien dans l'espace anti-de Sitter H^3_1 :

*Mathématiques, UMR 8628 CNRS, Bât. 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France ; jean-marc.schlenker@math.u-psud.fr

THÉORÈME C. — *Si (Σ,σ) est complète à courbure $K\in[-1+\epsilon,-\epsilon]$ $(\epsilon>0)$ et si $\|\nabla K\|$ est bornée, alors (Σ,σ) n'admet pas d'immersion isométrique C^3 dans H^3_1.*

H^3_1 est un espace lorentzien de dimension 3 à courbure constante -1. Il est localement isométrique à $SL(2,\mathbf{R})$ muni de sa forme de Killing, ou au tangent unitaire à H^2 muni de sa structure lorentzienne naturelle.

Tous ces résultats reposent sur un phénomène de propagation de dégénérescence pour des solutions d'équations de Monge-Ampère hyperboliques. En voici une illustration, dans laquelle d_0 est un réel positif fixé.

THÉORÈME D. — *Soit D un disque muni d'une métrique riemannienne μ régulière à courbure $K<-1$, et $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'immersions isométriques de (D,g) dans $\mathbf{R}^3$. Soit $x_0\in D$ tel que tout $x\in D$ soit à distance au plus d_0 de x_0, et $y_0\in\mathbf{R}^3$ tel que, pour tout n, $\phi_n(x_0)=y_0$. Supposons que ϕ_n dégénère en x_0, au sens où il existe un segment géodésique γ_0 avec $\gamma_0(0)=x_0$ tel que :*

$$\forall M>0,\forall\epsilon>0,\exists n\in\mathbf{N},\int_0^\epsilon (I\!I\!I_n(\gamma_0'(s),\gamma_0'(s))^{1/2}ds\geq M$$

Alors il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ extraite de $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et un segment géodésique maximal g passant par x_0 tel que (ψ_n) dégénère sur g :

$$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall x\in g,\exists y\in B_\mu(x,\epsilon),H_n(y)\geq 1/\epsilon$$

De plus, $(\psi_{n|g})_{n\in\mathbf{N}}$ converge C^0 vers une isométrie de g sur un segment géodésique de $\mathbf{R}^3$.

Dans cet énoncé, $I\!I\!I_n$ est la troisième forme fondamentale de l'immersion ϕ_n, et H_n est sa courbure moyenne. Les hypothèses concernant d_0 ne sont pas vraiment nécessaires, mais ce théorème ne vise pas à l'optimalité. Par contre, il est nécessaire de faire des hypothèses assez précises sur le type de dégénérescence, parce qu'il existe des surfaces à courbure extrinsèque négative, dont la métrique induite est régulière, mais qui ne sont pas C^2 (voir l'exemple de Rozendorn [Roz62]). On pourra aussi comparer cette situation avec celle qui se présente dans le cas convexe, cf. [Lab89].

Les théorèmes A, B et C sont montrés en appliquant une version nettement plus précise du théorème D à Σ munie de la troisième forme fondamentale $I\!I\!I$ d'une immersion. Un énoncé proche du théorème D suffirait si on savait par exemple que $(\Sigma,I\!I\!I)$ est une variété à bord, mais c'est loin d'être le cas : on ne peut à priori faire aucune hypothèse sur la régularité de $\partial_{I\!I\!I}\Sigma$, ce qui est à l'origine de difficultés techniques qui apparaîtront dans les sections 3 à 7.

Le point de départ est le résultat suivant, montré dans la section 2 :

LEMME E. — *Sous les hypothèses des théorèmes A, B et C, $(\Sigma,I\!I\!I)$ est une surface riemannienne à courbure $\tilde{K}\in[K_1,K_2]$, où $K_2\geq K_1>0$.*

La principale difficulté dans la preuve des théorèmes A, B et C tient à la nature du bord de $(\Sigma,I\!I\!I)$, sur lequel on ne peut faire aucune hypothèse de régularité à priori. L'ensemble de la démonstration serait largement simplifié si on pouvait supposer par exemple que $\partial_{I\!I\!I}\Sigma$ est C^1. A cause de cette absence de régularité, il est nécessaire d'utiliser des propriétés un peu fines des courbes asymptotiques au voisinage du bord, qui indiquent que $\partial_{I\!I\!I}\Sigma$ est “géodésique”. Ceci permet de faire le lien entre la propagation de dégénerescences et les propriétés géométriques de $(\Sigma,I\!I\!I)$, en particulier le fait que son aire est bornée. Nous allons maintenant décrire ces propriétés.

On dit qu'une courbe $\gamma : [0,L] \to (\Sigma, I\!I\!I)$ paramétrée à vitesse 1 est une **ϵ-pseudo-géodésique** s'il existe un champ de vecteurs unitaire W parallèle sur γ tel que :

$$\mu(\{t \in [0,L] \mid |\angle_{I\!I\!I}(W, \gamma')| \geq \epsilon\}) \leq \epsilon$$

où μ est la mesure usuelle de $\mathbf{R}$, et où $\angle_{I\!I\!I}(u,v)$ désigne l'angle entre deux vecteurs u et v pour $I\!I\!I$. On dit aussi que W est un **vecteur dirigeant** de γ.

Notons (cf. la section 2) qu'il existe sur Σ deux champs de vecteurs U et V, dits "asymptotiques", tels que $I\!I(U,U) = I\!I(V,V) = 0$. On choisit U et V tels que $I\!I\!I(U,U) = I\!I\!I(V,V) = 1$; comme Σ est simplement connexe, on peut aussi supposer qu'on a partout $\angle_{I\!I\!I}(U,V) \in]0,\pi[$. Après des préliminaires techniques dans les sections 3, 4 et 5, on montrera dans la section 6 le résultat suivant, décrivant les courbes asymptotiques au voisinage du bord :

LEMME F. — *On reprend les hypothèses de l'un des théorèmes A, B ou C. Il existe $L_0 > 0$ et $C_0 > 1$ comme suit. Soit $\gamma_0 : [0,L[\to \Sigma$ un segment géodésique plongé dans $(\Sigma, I\!I\!I)$ (paramétré à vitesse unité) tel que $\lim_L \gamma_0 \in \partial_{I\!I\!I}\Sigma$; on note $g_u : \mathbf{R} \to \Sigma$ et $h_u : \mathbf{R} \to \Sigma$ les courbes intégrales de U et de V respectivement, paramétrées à vitesse unité, telles que $g_u(0) = h_u(0) = \gamma_0(u)$. Alors il existe une fonction continue $\epsilon : [0,L] \to \mathbf{R}_+$ qui s'annule en L, et un recouvrement $]0,L[= I \cup J$ de $]0,L[$ par deux réunions disjointes de familles dénombrables d'intervalles ouverts (sans point d'accumulation sauf u_0), tels que :*

1. *pour $s \in I$ (resp. J), $g_s : [-C_0L_0, C_0L_0] \to \Sigma$ (resp. $h_s : [-C_0L_0, C_0L_0] \to \Sigma$) est une $\epsilon(s)$-pseudo-géodésique de vecteur dirigeant W_g (resp. W_h) ;*
2. *si $s \in I \cap J$, alors $|\angle_{\gamma_0(s)}(W_g, W_h)| \leq \epsilon(s)$;*
3. *si $s \in \partial I \cap]0,L[$ et si $u \in [-L_0, L_0]$, alors :*
$$g_s(u) \in \bigcup_{t \in J} h_t([-C_0u - \epsilon(u), C_0u + \epsilon(u)] \cap [-C_0L_0, C_0L_0])$$
et de même pour $h_s(u)$ lorsque $s \in \partial J \cap]0,L[$;
4. *si, pour $u \in I$, $t_i(u)$ et $t_a(u)$ sont le min et le max des t où $g_u(t) \in \gamma_0([0,L[)$, alors $t_a(u) - t_i(u) \leq \epsilon(u)$, et $g'_u(t_a(u))$ et $g'_u(t_i(u))$ sont orientés du même coté de $\gamma_0([0,L[)$; et de même pour J.*

Ce lemme peut paraître compliqué, mais les différents éléments qui y apparaissent sont nécessaires plus loin pour contrôler le comportement de la surface $(\Sigma, I\!I\!I)$ au voisinage du bord. Pour le résumer simplement, on peut dire qu'il doit y avoir "beaucoup" de courbes centrées en $\gamma_0(u)$, pour u proche de L, qui sont "presque" des segments géodésiques, et qui ne peuvent pas trop se rencontrer.

On donne aussi dans la section 6 la preuve du théorème D. On utilisera par ailleurs une définition naturelle :

DÉFINITION 1.2 *Soit S une surface (non compacte) munie d'une métrique riemannienne (non complète). On dira que S est convexe si, quand $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de segments géodésiques $c_n : [0,L] \to S$ telle que, pour tout $u \in [0,L]$, $(c_n(u))$ converge dans $\overline{S}$, et quand $\lim_{n\to\infty} c_n(u) \in \partial S$ pour un $u \in]0,L[$, alors $\lim_{n\to\infty} c_n(v) \in \partial S$ pour tout $v \in [0,L]$.*

La preuve du point suivant, plus délicate qu'il n'y paraît, se trouve dans la section 7 ; elle utilise seulement le lemme F.

LEMME G. — *Dans les conditions des théorèmes A, B et C,* $(\Sigma, I\!I\!I)$ *est convexe.*

Finalement, on utilisera le résultat intuitivement simple suivant, prouvé dans la section 8 :

LEMME H. — *Une surface convexe, à courbure comprise entre deux bornes strictement positives, est d'aire borné.*

Les théorèmes A, B et C suivront, dans la section 9, par un raisonnement géométrique élémentaire de comparaison entre l'aire de Σ pour la métrique induite et pour la troisième forme fondamentale.

Remerciements – Ce texte doit énormement aux nombreuses suggestions de François Labourie, et aux innombrables heures qu'il a bien voulu passer pour le relire entièrement, en vérifier les détails et en améliorer (considérablement) la présentation. J'ai aussi bénéficié de remarques profondes de J.-M. Bony et V. Rubstov concernant les équations de Monge-Ampère.

2 Etude sur Σ

On donne dans cette section quelques résultats simples concernant les objets induits sur Σ par une immersion isométrique dans un espace (pseudo-) riemannien M de dimension 3 à courbure constante K_M (M sera H^3, S^3 ou H^3_1). On note ∇ la connexion de Levi-Civita de (Σ, σ) et ∇^M celle de M.

Dans la suite, on suppose que Σ est contractile et orientée (sinon, on passe à son revêtement universel). On peut donc choisir un champ N de vecteurs unitaires normaux à Σ dans M, puis définir un automorphisme de fibré :

$$\begin{array}{rrcl} B: & T\Sigma & \rightarrow & T\Sigma \\ & x & \mapsto & \nabla^M_x N \end{array}$$

On vérifie sans mal que B est symétrique. On en tire la "troisième forme fondamentale" de l'immersion :

$$\forall s \in \Sigma,\ \forall x, y \in T_s\Sigma,\ I\!I\!I(x,y) = \sigma(Bx, By)$$

B vérifie les équations classiques (cf. [GHL87] ou [Spi75], vol. III) suivantes :

$$\forall s \in \Sigma,\ \forall x, y \in T_s\Sigma,\ (d^\nabla B)(x,y) = 0 \tag{1}$$

qui est l'équation de Codazzi-Mainardi, et l'équation de Gauss:

$$\forall s \in \Sigma,\ \det(B_s) = K_e := \epsilon_M(K(s) - K_M) \tag{2}$$

où $\epsilon_M = 1$ si M est riemannienne, et $\epsilon_M = -1$ si M est lorentzienne. $K(s)$ est la courbure de ∇ en s.

On note $\tilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $I\!I\!I$, et $\tilde{K}$ sa courbure. Alors

PROPOSITION 2.1 *Si X est un champ de vecteurs sur Σ, $\tilde{\nabla} X = B^{-1}\nabla(BX)$. De plus, $\tilde{K} = \epsilon_M K/(K - K_M)$.*

Démonstration. — Pour le premier point, on vérifie que la connexion définie par $B^{-1}\nabla(BX)$ est compatible avec $I\!I\!I$ et sans torsion. Pour le second, on choisit un repère mobile orthonormé (e_1, e_2) pour σ, et on note ω sa 1-forme de connexion. Alors $(B^{-1}e_1, B^{-1}e_2)$ est un repère mobile orthonormé pour $I\!I\!I$, et la définition de $\tilde{\nabla}$ montre que sa 1-forme de connexion pour $\tilde{\nabla}$ est encore ω. Les 2-formes de courbures coïncident donc aussi, et donc

$$K dv_\sigma = \Omega = \tilde{K} dv_{I\!I\!I} = \tilde{K} K_e dv_\sigma$$

donc $\tilde{K} = K/K_e = \epsilon_M K/(K - K_M)$. □

On en tire en particulier la preuve du lemme E :

Corollaire 2.2 *Dans les situations des théorèmes A, B et C,* $\tilde{K} \in [K_1, K_2]$ *avec* $K_2 > K_1 > 0$.

Démonstration. — On vérifie que c'est le cas dans chacune de ces trois situations, les bornes supérieures et inférieures pour $\tilde{K}$ étant atteintes aux limites des intervalles possibles pour K. □

On pose: $\tilde{B} := B^{-1}$. On a alors un analogue de (1) mais pour $\tilde{B}$ sur $(\Sigma, I\!I\!I)$:

Proposition 2.3 $d^{\tilde{\nabla}}\tilde{B} = 0$.

Démonstration. — On calcule directement que, si X, Y sont des champs de vecteurs sur Σ :

$$\begin{aligned}(d^{\tilde{\nabla}}\tilde{B})(X,Y) &= \tilde{\nabla}_X(\tilde{B}Y) - \tilde{\nabla}_Y(\tilde{B}X) - B^{-1}([X,Y]) \\ &= B^{-1}\nabla_X(BB^{-1}Y) - B^{-1}\nabla_Y(BB^{-1}X) - B^{-1}[X,Y] \\ &= B^{-1}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) \\ &= 0\end{aligned}$$

car ∇ est sans torsion. □

Comme $\det(\tilde{B}) < 0$, il existe en chaque point deux vecteurs U, V appelés vecteurs asymptotiques, unitaires pour $I\!I\!I$, et tels que :

$$\tilde{B}U = kJ_{I\!I\!I}U, \ \tilde{B}V = -kJ_{I\!I\!I}V$$

où $J_{I\!I\!I}$ est la structure complexe associée à $I\!I\!I$ et $k = |\det(\tilde{B})|^{1/2} = 1/\sqrt{-K_e}$. Comme Σ est contractile, U, V sont définis globalement. De plus, on a :

$$I(U,U) = I\!I\!I(\tilde{B}U, \tilde{B}U) = I\!I\!I(kJ_{I\!I\!I}U, kJ_{I\!I\!I}U) = k^2 = \frac{1}{|K_e|} \in \left]0, \frac{1}{\epsilon}\right] \tag{3}$$

où ϵ vient de l'énoncé des théorèmes A, B et C. Il en est de même pour V. Comme (Σ, I) est complète, les courbes intégrales de U et de V ne rencontrent pas $\partial_{I\!I\!I}\Sigma$.

On notera dorénavant θ l'angle entre U et V pour $I\!I\!I$; on supposera $\theta \in]0, \pi[$. θ s'approche de 0 (ou de π) quand l'immersion "dégénère" : la courbure moyenne de l'immersion de Σ dans M est égale à $\cotg(\theta)(|\det(\tilde{B})|)^{-1/2}$.

La proposition suivante et son corollaire décrivent un point important du comportement de U et V sur $(\Sigma, I\!I\!I)$ sous les hypothèses des théorèmes A, B et C :

Proposition 2.4 *Il existe* $\tau_1 > 0$ *tel que :*

$$\|\tilde{\nabla}_U V\|_{I\!I\!I} \leq \tau_1|\sin(\theta)| \tag{4}$$

$$\|\tilde{\nabla}_V U\|_{I\!I\!I} \leq \tau_1|\sin(\theta)| \tag{5}$$

DÉMONSTRATION. — D'après (2.3), $(d^{\tilde{\nabla}}\tilde{B})(U,V)=0$, et donc, en développant cette expression et en notant $\omega_U = I\!I\!I(\tilde{\nabla}_U V, J_{I\!I\!I}V)$, $\omega_V = I\!I\!I(\tilde{\nabla}_V U, J_{I\!I\!I}U)$, on obtient :

$$\tilde{\nabla}_U(\tilde{B}V) - \tilde{\nabla}_V(\tilde{B}U) - \tilde{B}(\tilde{\nabla}_U V - \tilde{\nabla}_V U) = 0$$

donc :

$$-\tilde{\nabla}_U(kJ_{I\!I\!I}V) - \tilde{\nabla}_V(kJ_{I\!I\!I}U) - \tilde{B}(\omega_U J_{I\!I\!I}V) + \tilde{B}(\omega_V J_{I\!I\!I}U) = 0$$

et en utilisant que $\sin(\theta)J_{I\!I\!I}U = V - \cos(\theta)U$ et que $\sin(\theta)J_{I\!I\!I}V = \cos(\theta)V - U$ et en regroupant les termes :

$$\omega_V U + \omega_U V + \left(-(V.\kappa) + \frac{\omega_U}{\sin(\theta)} - \frac{\omega_V\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) J_{I\!I\!I}U + \\ + \left(-(U.\kappa) + \frac{\omega_U\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\omega_V}{\sin(\theta)}\right) J_{I\!I\!I}V = 0$$

avec $\kappa = \ln(k)$. En prenant le produit scalaire (associé à $I\!I\!I$) de cette équation avec V puis avec U et en utilisant la symétrie de $\tilde{B}$ par rapport à $I\!I\!I$, on trouve que :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_U V &= \frac{\sin(\theta)}{2}(V.\kappa)J_{I\!I\!I}V \\ \tilde{\nabla}_V U &= -\frac{\sin(\theta)}{2}(U.\kappa)J_{I\!I\!I}U \end{aligned}$$

donc :

$$\|\tilde{\nabla}_U V\|_{I\!I\!I} \leq \left|\frac{\sin(\theta)}{2}\frac{V.K}{2K_e}\right| \leq \frac{\sin(\theta)}{2}\frac{\|\nabla K\|_\sigma}{|K_e|^{3/2}}$$

puisque $\|V\|_{I\!I\!I} = 1$, soit $\|V\|_\sigma = 1/k$.

Mais on a supposé dans les énoncés des théorèmes A, B et C que $\|\nabla K\|/|K|^{3/2}$ est borné, on obtient donc la majoration voulue de $\|\tilde{\nabla}_U V\|_{I\!I\!I}$. On procède de même pour $\|\tilde{\nabla}_V U\|_{I\!I\!I}$. □

3 Segments géodésiques près du bord

Cette section et les deux suivantes sont consacrées à la preuve du lemme F, qui utilisera seulement que $(\Sigma, I\!I\!I)$ est à courbure positive bornée, et munie d'un endomorphisme $\tilde{B}$ du fibré tangent à déterminant négatif, tel que $I\!I\!I(\tilde{B}\cdot, \tilde{B}\cdot)$ est complète, et dont les directions "asymptotiques" U et V vérifient (4) et (5). Dans la suite, on suppose donc ces hypothèses vérifiées.

Résumons la situation. Dans toute cette section, on se place sur Σ munie de $I\!I\!I$, en particulier toutes les longueurs et les angles sont relatifs à $I\!I\!I$. On dispose d'un segment géodésique plongé γ_0 sur lequel on a deux champs de vecteurs U et V ; pour $s \in [0, L[$, on note $\theta_U(s)$ et $\theta_V(s)$ les angles en $\gamma_0(s)$ (pour $I\!I\!I$) de γ_0' avec U, V, et $\theta(s) = \theta_V(s) - \theta_U(s) = \angle_{I\!I\!I}(U,V)$. Un calcul direct montre alors que :

$$\|\tilde{B}\gamma_0'(s)\|^2_{I\!I\!I} = \frac{|\det_{I\!I\!I}\tilde{B}|}{\sin^2(\theta(s))}[\sin^2(\theta_U(s)) + \sin^2(\theta_V(s)) + 2\cos(\theta(s))\sin(\theta_U(s))\sin(\theta_V(s))] \qquad (6)$$

On définit alors une mesure $\tilde{\mu}$ sur $[0, L[$:

$$d\tilde{\mu} = \frac{[\sin^2(\theta_U(s)) + \sin^2(\theta_V(s)) + 2\cos(\theta(s))\sin(\theta_U(s))\sin(\theta_V(s))]^{1/2}}{\sin(\theta(s))}ds \qquad (7)$$

Comme $(\Sigma, I\!I\!I(\tilde{B}\cdot, \tilde{B}\cdot))$ est complète et $|\det(\tilde{B})| \in]0, 1/\epsilon]$, $\tilde{\mu}([0, L[) = +\infty$.

On appelle "boucle asymptotique" un segment de courbe intégrale de U ou de V. On considère des courbes asymptotiques tangentes à U ; les définitions et propriétés correspondantes pour l'autre famille de boucles asymptotiques seront implicites. Si $\gamma : [0, L_\gamma] \to \Sigma$ est une boucle asymptotique, on note :

$$\delta_\gamma = \pi - \sup\{\theta(\gamma(u)) - \theta(\gamma(v)) \mid u, v \in [0, L_\gamma]\}$$

L'objet principal de cette section est de contrôler le comportement sur γ_0 des orientations de U et de V de la manière suivante :

LEMME 3.1 *Pour tout $c > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que si $[a,b] \subset [0, L[$ avec $|b - a| \leq \rho$, alors:*

1. *soit il existe une courbe intégrale de U, $\gamma : [0, L_\gamma] \to \Sigma$, avec $\delta_\gamma \leq c$, $L_\gamma \leq c$, et $\gamma([0, L_\gamma]) \cap \gamma_0([a,b]) = \{\gamma(0), \gamma(L_\gamma)\}$;*
2. *soit il existe $\sigma_U \in \{-1, 1\}$ tel que $\tilde{\mu}(\{s \in [a,b] \mid \sigma_U \sin(\theta_U(s)) < 0\}) \leq c$.*

Le même résultat s'applique bien entendu à V. On montrera dans la section suivante que la première alternative conduit à une "propagation" le long d'une pseudo-géodésique. La section 5 traitera l'autre cas.

On utilisera aussi le corollaire suivant de ce lemme :

COROLLAIRE 3.2 *Pour tout $c > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que si $[a,b] \subset [0, L[$ avec $|b - a| \leq \rho$, il existe $N \in \mathbf{N}$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq N}, (t_i)_{1 \leq i \leq N}$ tels que :*

- *$a = t_0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < \cdots < s_N < t_N \leq s_{N+1} = b$;*
- *pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, N\}$, il existe $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ tel que :*

$$\tilde{\mu}(\{s \in [t_i, s_{i+1}] \mid \sigma_i \sin(\theta_U(s)) < 0\}) \leq c$$

- *pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$ et tout $r \in [s_i, t_i]$, il existe $s \in [s_i, r]$, $t \in [r, t_i]$, et une courbe intégrale $\gamma : [0, L_\gamma] \to \Sigma$, de U avec $\delta_\gamma \leq c$, $L_\gamma \leq c$, et $\{\gamma(0), \gamma(L_\gamma)\} = \{\gamma_0(s), \gamma_0(t)\}$.*

DÉMONSTRATION. — On applique le lemme précédent, et on voit que soit il existe $\sigma_U \in \{-1, 1\}$ tel que $\tilde{\mu}(\{s \in [a,b] \mid \sigma_U \sin(\theta_U(s)) < 0\}) \leq c$, soit il existe une courbe intégrale de U, $\gamma_1 : [0, L_\gamma] \to \Sigma$, avec $\delta_{\gamma_1} \leq c$, $L_{\gamma_1} \leq c$, et $\gamma_1([0, L_{\gamma_1}]) \cap \gamma_0([a,b]) = \{\gamma_0(a_1), \gamma_0(b_1)\}$, avec $a_1 < b_1$.

Dans le premier cas, le corollaire est démontré ; dans le second cas, on applique encore le lemme 3.1 aux intervalles $[a, a_1]$ et $[b_1, b]$, et on voit à nouveau que soit le corollaire est vrai avec $N = 1$, soit il existe une nouvelles courbe intégrale de U, $\gamma_2 : [0, L_\gamma] \to \Sigma$, avec $\delta_{\gamma_2} \leq c$, $L_{\gamma_2} \leq c$, et $\gamma_2([0, L_{\gamma_2}]) \cap \gamma_0([a,b]) = \{\gamma_0(a_2), \gamma_0(b_2)\}$, avec $a_2 < b_2$.

Puis on applique récursivement la même construction, pour obtenir un ensemble $I \subset [a,b]$ qui est réunion de courbes intégrales de U joignant deux points de $\gamma_0([a,b])$, et ayant une longueur et un δ majorés par c.

I reste une réunion finie d'intervalles à cause de la condition : $\delta_\gamma \leq c$. En effet, si une suite $(s_i, t_i)_{i \in \mathbf{N}}$ s'accumulait sur un point s_∞, le champ de vecteurs U ne pourrait pas être régulier en $\gamma_0(s_\infty)$. On peut avoir $N = 0$, la famille $(s_i, t_i)_{i \in \mathbf{N}_N}$ est alors vide. □

Soit $x, y \in [0, L[$; on notera $L_U(x)$ (resp. $L_V(x)$) la courbe intégrale du champ de vecteur U (resp. V) issue de $\gamma_0(x)$, et de même pour y. Lorsque $L_U(x)$ et $L_V(y)$ (resp. $L_V(x)$ et $L_U(y)$) se coupent, on notera $M^+(x,y)$ (resp. $M^-(x,y)$) leur point d'intersection, qui est nécessairement unique. On notera aussi $L_U^+(x,y)$ (resp. $L_V^+(x,y)$) le segment de $L_U(x)$ entre $\gamma_0(x)$ et $M^+(x,y)$

(resp. le segment de $L_V(y)$ entre $\gamma_0(y)$ et $M^+(x,y)$), et de même avec des exposant $-$ pour les quantités symétriques en échangeant U et V. On notera enfin $\lambda_U^+(x,y)$ la longueur de $L_U^+(x,y)$ (orientée par U) et de même pour les autres valeurs des indices et exposants.

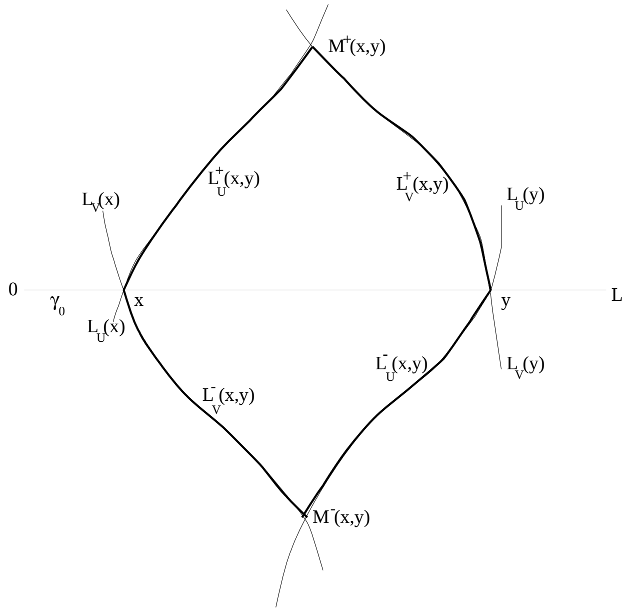

Figure 3.1

On note $\partial_x = \partial/\partial x, \partial_y = \partial/\partial y$, et on pose :

$$\alpha(x,y) = \partial_x \lambda_V^+(x,y),\ \beta(x,y) = \partial_y \lambda_U^+(x,y)$$

Alors :

$$\partial_x M^+(x,y) = \alpha(x,y) V(M^+(x,y)),\ \partial_y M^+(x,y) = \beta(x,y) U(M^+(x,y))$$

Mais $\tilde{\nabla}$ est sans torsion, donc :

$$\tilde{\nabla}_{\partial_x M^+} \partial_y M^+ = \tilde{\nabla}_{\partial_y M^+} \partial_x M^+$$

donc :

$$\tilde{\nabla}_{\partial_x M^+}(\beta U) = \tilde{\nabla}_{\partial_y M^+}(\alpha V)$$

si bien que :

$$(\partial_x \beta) U + \beta \tilde{\nabla}_{\partial_x M^+} U - (\partial_y \alpha) - \alpha \tilde{\nabla}_{\partial_y M^+} V = 0$$

soit :

$$(\partial_x \beta) U - (\partial_y \alpha) + \alpha\beta(\tilde{\nabla}_V U - \tilde{\nabla}_U V) = 0$$

On prend le produit scalaire (pour $I\!I\!I$) de cette équation avec $J_{I\!I\!I} U$ et on obtient :

$$\sin(\theta) \partial_y \alpha = \alpha\beta(\langle \tilde{\nabla}_V U | J_{I\!I\!I} U \rangle - \langle \tilde{\nabla}_U V | J_{I\!I\!I} U \rangle)$$

ce qui montre avec (4) et (5) que :

$$|\partial_y \alpha| \leq 2\tau_1 |\alpha\beta|,\ |\partial_x \beta| \leq 2\tau_1 |\alpha\beta|$$

soit :

$$|\partial_y \alpha| \leq 2\tau_1 |\alpha \partial_y \lambda_U^+|,\ |\partial_x \beta| \leq 2\tau_1 |\beta \partial_x \lambda_V^+| \tag{8}$$

Enfin, un calcul facile montre que, sur $\gamma_0([0,L[)$, c'est à dire pour $y=x$, on a :

$$\alpha(x,x) = -\frac{\sin(\theta_U(x))}{\sin(\theta(x))},\ \beta(x,x) = \frac{\sin(\theta_V(x))}{\sin(\theta(x))} \tag{9}$$

et on obtient par intégration sur $[x,y]$ que, si $M^+(x,y')$ existe pour tout $y' \in [x,y]$, alors :

$$\frac{\partial\lambda_V^+(x,y)}{\partial x} = \alpha \in \left[-\frac{\sin(\theta_U(x))}{\sin(\theta(x))}e^{-2\tau_1\lambda_U^+(x,y)}, -\frac{\sin(\theta_U(x))}{\sin(\theta(x))}e^{2\tau_1\lambda_U^+(x,y)}\right]$$

et, de même, si $M^+(x',y)$ existe pour tout $x' \in [x,y]$, alors :

$$\frac{\partial\lambda_U^+(x,y)}{\partial y} = \beta \in \left[\frac{\sin(\theta_V(y))}{\sin(\theta(y))}e^{-2\tau_1\lambda_U^+(x,y)}, \frac{\sin(\theta_V(y))}{\sin(\theta(y))}e^{2\tau_1\lambda_U^+(x,y)}\right]$$

Il existe donc $L_1 > 0$ tel que, si $[x,y]$ est tel que $M^+(x',y')$ et $M^-(x',y')$ existent pour tout $x',y' \in [x,y]$, et si :

$$\max(|\lambda_U^+(x,y)|, |\lambda_V^+(x,y)|, |\lambda_U^-(x,y)|, |\lambda_V^-(x,y)|) \le 4L_1$$

alors on a :

$$\frac{\partial\lambda_V^+(x,y)}{\partial x} \in \left[-\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_U(x))}{\sin(\theta(x))}, -2\frac{\sin(\theta_U(x))}{\sin(\theta(x))}\right] \ , \ \frac{\partial\lambda_U^+(x,y)}{\partial y} \in \left[\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_V(y))}{\sin(\theta(y))}, 2\frac{\sin(\theta_V(y))}{\sin(\theta(y))}\right] \tag{10}$$

et par un argument de symétrie on a aussi

$$\frac{\partial\lambda_V^-(x,y)}{\partial y} \in \left[-\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_U(y))}{\sin(\theta(y))}, -2\frac{\sin(\theta_U(y))}{\sin(\theta(y))}\right] \ , \ \frac{\partial\lambda_U^-(x,y)}{\partial x} \in \left[\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_V(x))}{\sin(\theta(x))}, 2\frac{\sin(\theta_V(x))}{\sin(\theta(x))}\right] \tag{11}$$

Donnons maintenant un petit résultat qu'on utilisera plusieurs fois :

Assertion 3.3 *Pour tout $t \in [0,L[$, on a :*

$$\left|\frac{d\tilde{\mu}}{dt} - \left|\frac{2\sin(\theta_U(t))}{\sin(\theta(t))}\right|\right| \le 3$$

Si $\frac{d\tilde{\mu}}{dt} > 5$, alors $\sin(\theta_U(t)).\sin(\theta_V(t))$ et $\cos(\theta(t))$ ont le même signe.

Démonstration. — On vérifie simplement que :

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta_U) &+ \sin^2(\theta_V) + 2\cos(\theta)\sin(\theta_U)\sin(\theta_V) - 4\sin^2(\theta_U) \\
&= (\sin^2(\theta_V) - \sin^2(\theta_U)) + 2\sin(\theta_U)(\cos(\theta)\sin(\theta_V) - \sin(\theta_U)) \\
&= \sin(\theta_V - \theta_U)\sin(\theta_V + \theta_U) + 2\sin(\theta_U)\sin(\theta)\cos(\theta_V) \\
&= \sin(\theta_V + \theta_U)\sin(\theta) + \sin(\theta)(\sin(\theta_U + \theta_V) + \sin(\theta_U - \theta_V)) \\
&= 2\sin(\theta)\sin(\theta_U + \theta_V) - \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

On remarque aussi que :

$$\begin{aligned}
|\sin(\theta_U + \theta_V)| &= |\sin(2\theta_U + \theta)| \\
&= |\sin(2\theta_U)\cos(\theta) + \cos(2\theta_U)\sin(\theta)| \\
&\le 2|\sin(\theta_U)\cos(\theta_U)\cos(\theta)| + |\cos(2\theta_U)\sin(\theta)| \\
&\le 2|\sin(\theta_U)| + \sin(\theta)
\end{aligned}$$

et on obtient donc :

$$\left|\left(\frac{d\tilde{\mu}}{ds}\right)^2 - \left(\frac{2\sin(\theta_U)}{\sin(\theta)}\right)^2\right| = \left|\frac{2\sin(\theta_U+\theta_V)}{\sin(\theta)} - 1\right| \leq 2\left|\frac{2\sin(\theta_U)}{\sin(\theta)}\right| + 2$$

Posons pour simplifier :

$$a = \frac{d\tilde{\mu}}{ds},\ b = \left|2\frac{\sin(\theta_U)}{\sin(\theta)}\right|$$

Alors $a, b \geq 0$, et $|a^2 - b^2| \leq 2a + 2$. On en déduit que $|a-b| \leq 3$. En effet, sinon, $a \geq 3$ ou $b \geq 3$; dans le premier cas :

$$|a-b| = \left|\frac{a^2-b^2}{a+b}\right| \leq \left|\frac{2a+2}{a}\right| \leq 2 + \frac{2}{a} \leq 3$$

alors que, dans le second cas :

$$|a-b| = \left|\frac{a^2-b^2}{a+b}\right| \leq \frac{2a+2}{a+3} \leq 2$$

On en déduit donc bien que :

$$\left|\frac{d\tilde{\mu}}{dt} - \left|\frac{2\sin(\theta_U(t))}{\sin(\theta(t))}\right|\right| \leq 3$$

Pour la seconde assertion, on note simplement que, si $d\tilde{\mu}/ds > 5$, alors :

$$|\sin(\theta_U)| > \sin(\theta)$$

d'après ce qu'on vient de montrer. Ainsi :

$$\sin^2(\theta_U) > \sin(\theta)|\sin(\theta_U)|$$

donc :

$$\sin(\theta_U)\sin(\theta_V - \theta) > \sin(\theta)|\sin(\theta_U)|$$

et donc :

$$\sin(\theta_U)\sin(\theta_V)\cos(\theta) > \sin(\theta)(|\sin(\theta_U)| + \cos(\theta_V)\sin(\theta_U)) \geq 0$$

si bien que :

$$\sin(\theta_U)\sin(\theta_V)\cos(\theta) > 0$$

comme annoncé. □

En appliquant les majorations de cette assertion et les équations (10) et (11), on trouve le :

COROLLAIRE 3.4 *Il existe $L_2 > 0, C_2 > 0$ tels que si $[x,y] \subset [0, L[$ avec $\tilde{\mu}([x,y]) \leq L_2$, et si $\epsilon_x = sign(\sin(\theta_U(x))), \epsilon_y = sign(\sin(\theta_U(y)))$, alors:*

$$-\frac{\partial\lambda_V^+}{\partial x}(x,y), \frac{\partial\lambda_U^-}{\partial x}(x,y) \in \left[\epsilon_x\left(\frac{1}{C_2}\frac{d\tilde{\mu}}{ds}(x) - C_2\right), \epsilon_x\left(C_2\frac{d\tilde{\mu}}{ds}(x) + C_2\right)\right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial\lambda_U^+}{\partial y}(x,y), -\frac{\partial\lambda_V^-}{\partial y}(x,y) \in \left[\epsilon_y\left(\frac{1}{C_2}\frac{d\tilde{\mu}}{ds}(y) - C_2\right), \epsilon_y\left(C_2\frac{d\tilde{\mu}}{ds}(y) + C_2\right)\right] \quad (13)$$

DÉMONSTRATION. — Le seul point à vérifier est qu'on a en fait pas besoin de supposer, pour obtenir (10) et (11), que $M^+(x',y')$ et $M^-(x',y')$ existent pour tout $x',y' \in [x,y]$. En effet, les courbes intégrales de U et de V ne rencontrent pas $\partial_{III}\Sigma$ à distance finie (parce que (Σ, I) est complète, et d'après (3)) si bien que, par exemple pour x' fixé, $M^+(x',y')$ existe, quand y' s'éloigne de x', tant que $\lambda_U^+(x',y')$ reste fini. Or c'est toujours le cas, d'après (10) et (11) justement, quand $x',y' \in [x,y]$ et $\tilde{\mu}([x,y])$ est assez petit. □

On en déduit un corollaire simple qui sera utile dans la section 5 :

COROLLAIRE 3.5 *Il existe $\epsilon_3 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_3]$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $a, b \in [0, L[$ avec $|b-a| \leq \alpha$ et :*

$$\tilde{\mu}(\{u \in [a,b] \mid \sin(\theta_U(u)) < 0\}) \leq \alpha$$

alors :

- *si $c : [0,L] \to \Sigma$ est une courbe intégrale de U ou de $-U$ telle que $c(0) = \gamma_0(x), c(L) = \gamma_0(y)$, avec $a \leq x < y \leq b$, et si $C_2 L \leq L_2 - C_2\alpha$, alors $\tilde{\mu}([x,y]) \leq \epsilon$, $L \leq \epsilon$, et les courbes intégrales de V issues de $\gamma_0([x,y])$ rencontrent c après avoir parcouru au plus ϵ ;*
- *si $c : [0, L_2] \to \Sigma$ est une courbe intégrale de U ou de $-U$ telle que $c(0) = \gamma_0(x)$, et si $\sin(\theta_U(x)) < 0$ et $\tilde{\mu}([x,b]) \geq L_2$, alors il existe $t \in [0,\epsilon]$ tel que $c(t) \in \gamma_0([x,b])$.*

Il est clair (par symétrie) que le même corollaire s'applique si on change l'orientation de U, et aussi si on échange U et V.

DÉMONSTRATION. — On suppose par exemple que c est une courbe intégrale de U, la démonstration est essentiellement la même pour $-U$. Ainsi, $\lambda_V^+(x,y) = 0$ et $\lambda_V^+(y,y) = 0$, donc :

$$\int_x^y (\partial_1 \lambda_V^+)(z,y) dz = 0$$

Pour $z \in [x,y]$, on pose :

$$v_+(z) := \sup(0, (\partial_1 \lambda_V^+)(z,y)),\ v_-(z) := \sup(0, -(\partial_1 \lambda_V^+)(z,y))$$

On a donc :

$$\int_x^y v_+(z) dz = \int_x^y v_-(z) dz$$

D'après le corollaire 3.4 :

$$\left(\frac{1}{C_2}\frac{d\tilde{\mu}}{ds} - C_2\right) \sup(0, \epsilon_z) \leq v_-(z)\ ,\ v_+(z) \leq \left(C_2 \frac{d\tilde{\mu}}{dz} + C_2\right) \sup(0, -\epsilon_z)$$

Ainsi :

$$\frac{\tilde{\mu}([x,y])}{C_2} - C_2|y-x| \leq \int_x^y v_-(z) dz = \int_x^y v_+(z) dz \leq C_2 \tilde{\mu}(\{z \in [x,y] \mid \epsilon_z = -1\}) + C_2|y-x|$$

si bien que :

$$\tilde{\mu}([x,y]) \leq C_2^2 \tilde{\mu}(\{z \in [x,y] \mid \epsilon_z = -1\}) + 2C_2^2|y-x| \leq 3\alpha C_2^2$$

et donc, si α est assez petit, on a bien $\tilde{\mu}([x,y]) \leq \epsilon$, et les courbes intégrales de V issues de $\gamma_0([x,y])$ rencontrent c après avoir parcouru au plus ϵ.

En fait, si on prend α encore plus petit, on peut obtenir que $C_2\tilde{\mu}([x,y]) + C_2\alpha \leq \epsilon$; le corollaire 3.4 montre alors que $L \leq \epsilon$.

On passe au second point. Par hypothèse, $\sin(\theta_U(x)) < 0$, donc, d'après (10), $\partial_1\lambda_1^+(y,z) > 0$ pour y et z assez proches de x. Mais $\lambda_V^+(z,z) = 0$, donc, pour $z > 0$ assez proche de x, $\lambda_V^+(x,z) < 0$. Soit $y \in [x,b]$ tel que $\tilde{\mu}([x,y]) > 3\alpha C_2^2$, et que $C_2\tilde{\mu}([x,y]) + C_2\alpha \leq \epsilon$; un tel y existe si α est assez petit.

On reprend les notations v_-, v_+ introduites plus haut, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_V^+(x,y) &= \int_y^x \partial_1\lambda_V^+(z,y)dz \\
&= \int_x^y v_-(z) - v_+(z)dz \\
&\geq \frac{1}{C_2}\tilde{\mu}([x,y]) - C_2|y-x| - C_2\tilde{\mu}(\{z \in [x,y] \mid \epsilon_z = -1\}) - C_2|y-x| \\
&\geq \frac{1}{C_2}\tilde{\mu}([x,y]) - 3\alpha C_2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Il existe donc $z \in]x,y[$ tel que $\lambda_V^+(x,z) = 0$, et alors la courbe intégrale de U issue de $\gamma_0(x)$ (qui prolonge donc c) rencontre γ_0 en $\gamma_0(z)$.

Comme on a supposé que $C_2\tilde{\mu}([x,y]) + C_2\alpha \leq \epsilon$, on a aussi $C_2\tilde{\mu}([x,z]) + C_2\alpha \leq \epsilon$, et le corollaire 3.4 montre que c arrive en $\gamma_0(z)$ après avoir parcouru au plus ϵ. $\square$

On étudie maintenant les courbes asymptotiques dont les deux extrémités sont sur γ_0. On utilisera l'assertion suivante, qui sera aussi utile plus loin :

Assertion 3.6 *Il existe $\omega_0 > 0$ (qui dépend de la borne supérieure K_2 de $\tilde{K}$) tel que, si Ω est un domaine simplement connexe de Σ de diamètre au plus ω_0 à bord régulier par morceaux, et si W_0 est un vecteur unitaire en un point $x_0 \in \partial\Omega$, alors il existe un champ de vecteurs unitaires W sur Ω tel que $W(x_0) = W_0$, que $\tilde{\nabla}_W W = 0$, et que W est parallèle le long des segments de $\partial\Omega$ où W est dirigé vers l'intérieur de Ω. Si $t, z \in \Omega$, il existe une unique courbe s plongée C^1 par morceaux dans Ω qui joint z à t et sur laquelle W est parallèle.*

La courbe qui joint z à t et sur laquelle W est parallèle suit alternativement des segments de courbe intégrale de W, et des segments de $\partial\Omega$ sur lesquels W est dirigé vers l'intérieur (voir la figure 3.2). Notons que, comme W est unitaire et $\tilde{\nabla}_W W = 0$, la 1-forme duale de W est fermée.

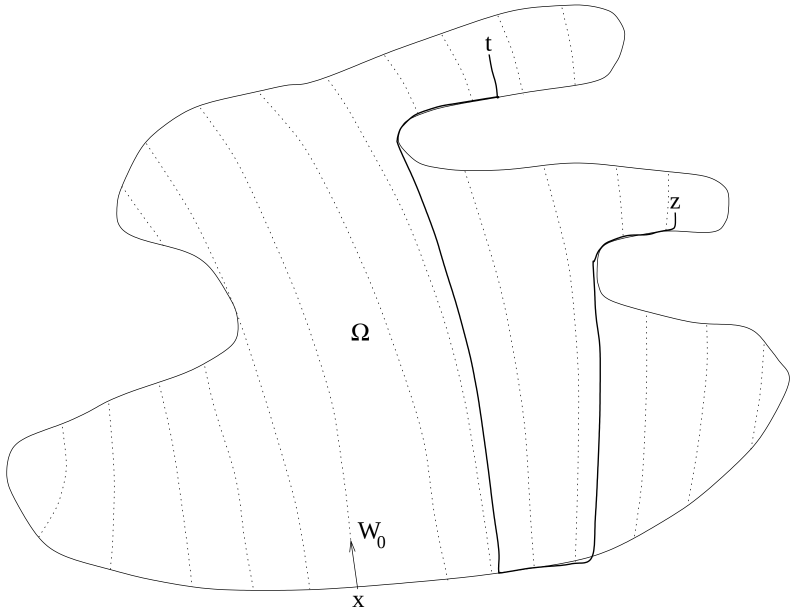

Figure 3.2

DÉMONSTRATION. — On dans considère un domaine $\Omega' \subset \Omega$ et un champ de vecteurs W' sur Ω' tels que :

- W' a, sur Ω', les propriétés demandées pour W ;
- $\Omega' \subset \Omega$ est connexe et borné par des courbes intégrales de W' ;
- (Ω', W') est maximal parmi les choix possibles, en d'autres termes, si (Ω'', W'') vérifie les mêmes propriétés avec $\Omega'' \subset \Omega'$ et $W'' = W'$ sur Ω', alors $\Omega'' = \Omega'$.

Les courbes intégrales de W sont des segments géodésiques ; comme Ω est simplement connexe et $\tilde{K} \leq K_2$, elles sont minimisantes sur leurs segments de longueur strictement inférieure à $\pi/\sqrt{K_2}$. Si $\omega_0 < \pi/\sqrt{K_2}$, les courbes intégrales de W sont donc de longueur au plus ω_0. On remarque alors que $\Omega' = \Omega$ car, ω_0 étant petit et $\tilde{K}$ borné, il ne peut pas y avoir d'intersections entre ces courbes.

Pour montrer l'existence de s, on fixe $t \in \Omega$, et on note Ω' l'ensemble de $z' \in \Omega$ qui peuvent être joints à t par une courbe C^1 par morceaux sur laquelle W est parallèle, et on suppose $\Omega' \neq \Omega$. Alors $\partial\Omega' \setminus \partial\Omega$ est composée de segments $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de courbes intégrales de W. De plus, chacun de ces segments s_i est issu d'un point p_i de $\partial\Omega$, ou bien est tangent à $\partial\Omega$ en un point $q_i \in \partial\Omega$. On constate alors qu'il existe des points de $\Omega \setminus \Omega'$ proches de s_i atteints par des courbes intégrales de W issues d'un point $p \in \partial\Omega$ proche de p_i ou de q_i, avec $p \in \partial\Omega$ et W parallèle sur $\partial\Omega$ entre p_i et p ou entre q_i et p. Donc $\Omega' = \Omega$.

Montrons enfin que s est unique. Dans le cas contraire, il existerait une région $D \subset \Omega$ d'intérieur non vide, bornée par des courbes intégrales de W et par des segments de $\partial\Omega$ où W est dirigé vers l'intérieur. ∂D ne contiendrait alors aucun point où W est dirigé vers l'extérieur, ce qui est impossible. $\square$

Maintenant, on peut exclure certaines situations :

PROPOSITION 3.7 *Il existe $c_3 > 0$ tel que si $g : [0, L_g] \to \Sigma$ est telle que $g' = U$ et que $g([0, L_g]) \cap \gamma_0 = \{g(0), g(L_g)\} = \{\gamma_0(a), \gamma_0(b)\}$, avec $a, b \in [0, L[$, $|b - a| < c_3$, et $\tilde{\mu}([a, b]) \leq c_3$, et si $\sin(\theta_U(g(0))).\sin(\theta_U(g(L_g))) \leq 0$, alors $\sin(\theta_V(g(0))).\sin(\theta_V(g(L_g))) \geq 0$.*

DÉMONSTRATION. — On va montrer que si $\theta_U(g(0)), \theta_V(g(0)) \in [0,\pi]$ et $\theta_U(g(L_g)) \in [-\pi, 0]$, alors $\theta_V(g(L_g)) \in [0,\pi]$; les autres cas s'en déduisent par des arguments de symétrie.

On considère d'abord le cas où $\theta_V(g(0)) \in [0, \pi/2]$. On note Ω le fermé de Σ borné par g et par γ_0 entre $g(0)$ et $g(L_g)$, et h_s le segment de courbe intégrale de V ou de $-V$ issue de $\gamma_0(s)$ qui est dans Ω. Ω est feuilletée par les $(h_s)_{s\in[a,b]}$. De plus, pour $s \in [a,b]$, h_s a soit une extrémité sur γ_0 et une sur g, soit deux extrémités sur γ_0. D'après le corollaire 3.4 appliqué à h_s, on a dans les deux cas :

$$L(h_s) \leq C_2(c_3 + |b-a|) \leq 2C_2c_3$$

Notons que, pour la même raison, on a aussi :

$$L_g \leq 2C_2c_3$$

Ainsi, Ω est feuilleté par des courbes de longueur au plus $2C_2c_3$ issues de γ_0, donc, si c_3 est assez petit, son diamètre est majoré par ω_0.

On applique l'assertion 3.6 à Ω, avec $W_0 = J_{I\!I\!I}\gamma_0'$ en un point de γ_0 entre $g(0)$ et $g(L_g)$. Notons que dans les cas "simples" (quand W est dirigé vers l'extérieur de Ω sauf sur γ_0), les courbes intégrales de W sont simplement les intersections avec Ω des géodésiques orthogonales à γ_0.

Comme W est un champ de vecteurs unitaires avec $\tilde{\nabla}_W W = 0$, W est le gradient d'une fonction y sur Ω, et on peut choisir $y = 0$ sur γ_0. Pour $t \in [0, L_g]$, on note $y(t) := y(g(t))$. On définit aussi $\theta_V(m) = \angle(W, J_{I\!I\!I}V)$ et $\theta_U(m) = \angle(W, J_{I\!I\!I}U)$. Alors $y'(t) = \sin(\theta_U(g(t)))$. Pour $t \in [0, L_g]$, on note encore :

$$\delta_- y(t) := \int_0^t \sup(-y'(s), 0)ds \ , \ \ \delta_+ y(t) := \int_0^t \sup(y'(s), 0)ds$$

de manière que $\delta_-(L_g) = \delta_+(L_g)$, et :

$$\delta\theta_V(t) := \int_0^t |\theta_V'(s)|ds$$

et on pose $\theta_S := \sup_{[0,L_g]} |\theta_V|$.

On note alors que $\delta_+(L_g) \leq \theta_S L_g$ par définition de δ_+, et parce que, lorsque $\theta_U \in]\theta_V - \pi, \theta_V[$, $\sin(\theta_U) \leq |\theta_V|$. Donc $|y(t)| \leq \theta_S L_g$ pour tout $t \in [0, L_g]$. Les courbes intégrales de W sont donc de longueur au plus $2\theta_S L_g$. Comme W est parallèle sur les segments de $\partial\Omega$ où il est dirigé vers l'intérieur, et comme $\tilde{K} > 0$, l'aire de Ω est majorée par $2\theta_S L_g$ multiplié par la longueur totale des segments de $\partial\Omega$ où W est dirigé vers l'intérieur. Mais $\partial\Omega$ est de longueur au plus $L_g + |b-a| \leq L_g + c_3$, si bien que l'aire de Ω est bornée par $2\theta_S L_g(L_g + c_3)$. Comme $\tilde{K} \leq K_2$, on en déduit que :

$$\int_\Omega \tilde{K} dA \leq 2K_2\theta_S L_g(L_g + c_3)$$

et, en appliquant le théorème de Gauss-Bonnet et l'équation (4) :

$$\forall t \in [0, L_g], \ |\theta_V(t)| \leq \theta_V(0) + 2K_2\theta_S L_g(L_g + c_3) + \tau_1 \int_0^{L_g} \sin(\theta(s))ds$$

Or :

$$\sin(\theta(s)) \leq |\sin(\theta_V(s))| + |\sin(\theta_U(s))| \leq \theta_S + |\sin(\theta_U(s))|$$

et par intégration :

$$\int_0^{L_g} \sin(\theta(s))ds \leq L_g\theta_S + 2\delta_+(L_g) \leq 3L_g\theta_S$$

ce qui montre finalement que :

$$\forall t \in [0, L_g],\ |\theta_V(t)| \leq \theta_V(0) + (2K_2(L_g + c_3) + 3\tau_1)\theta_S L_g \tag{14}$$

et, par définition de $\theta_S = \sup |\theta_V|$:

$$\theta_S(1 - (2K_2(L_g + c_3) + 3\tau_1)L_g) \leq \theta_V(0)$$

et donc $\theta_S \leq 2\theta_V(0)$ si c_3 est assez petit pour assurer que $(2K_2(L_g + c_3) + 3\tau_1)L_g \leq 1/2$.

On utilise alors à nouveau la majoration (14) :

$$\forall t \in [0, L_g],\ |\theta_V(t) - \theta_V(0)| \leq (2K_2(L_g + c_3) + 3\tau_1)\theta_S L_g$$

pour montrer que $2|\theta_V(L_g) - \theta_V(0)| \leq \theta_V(0)$, et on obtient le résultat dans le cas où $\theta_V(0) \in [0, \pi/2]$. Pour $\theta_V(g(0)) \in [\pi/2, \pi]$, on transforme U en $-U$ et on change les orientations de Σ et de γ_0, et on se trouve dans la situation où $\theta_V(g(0)) \in [0, \pi/2]$. □

Finalement, on utilisera l'assertion élémentaire suivante :

Assertion 3.8 *Soit $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, et soit f une fonction C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$. Notons μ_+ et μ_- les mesures sur $[a, b]$ de densités* $\sup(f'(x), 0)$ *et* $\sup(-f'(x), 0)$. *Supposons que $\mu_+([a, b]) \geq \epsilon$ et $\mu_-([a, b]) \geq \epsilon$. Notons :*

$$A_f(\epsilon) = \{x \in [a, b] \mid \exists y \in [a, b] \setminus \{x\},\ (f(y) = f(x))\ et\ (\mu_+([x, y]) \leq \epsilon)\}$$

Alors :

$$\mu_+(A_f(\epsilon)) \geq \epsilon$$

Démonstration. — On note :

$$B_f = \{x \in [a, b] \mid \exists y \in [a, b] \setminus \{x\}, f(y) = f(x)\}$$

Supposons que $f(b) \leq f(a)$. Soit $x \in [a, b]$ tel que $f'(x) > 0$. Alors soit $f(x) \leq f(a)$, soit $f(x) \geq f(b)$. Si $f(x) \leq f(a)$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $y \in [a, x[$ tel que $f(y) = f(x)$. Si $f(x) \geq f(b)$, il existe $y \in]x, b]$ tel que $f(y) = f(x)$. Dans tous les cas, $x \in B_f$. Donc $\mu_+(B_f) = \mu_+([a, b]) \geq \epsilon$.

Supposons maintenant que $f(b) \geq f(a)$. Soit $x \in [a, b]$ avec $f'(x) > 0$. Si $x \notin B_f$, alors (par le même raisonnement que ci-dessus) $f(x) \in]f(a), f(b)[$, et de plus $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Donc $\mu_+([a, b] \setminus B_f) \leq f(b) - f(a)$, et donc :

$$\mu_+(B_f) \geq \mu_+([a, b]) - (f(b) - f(a))$$

Mais, par définition de μ_+ et de μ_- comme mesures de variation de f :

$$\mu_+([a, b]) = \mu_-([a, b]) + (f(b) - f(a))$$

et donc :

$$\mu_+(B_f) \geq \mu_-([a, b]) \geq \epsilon$$

Ainsi, $\mu_+(B_f) \geq \epsilon$ dans tous les cas.

Si $B_f = A_f(\epsilon)$, l'assertion est démontrée. Sinon, il existe $(x_0, y_0) \in [a, b]^2$ avec $f(y_0) = f(x_0)$ et $\mu_+([x_0, y_0]) \geq \epsilon$. L'ensemble E des couples $(x, y) \in [a, b]^2$ tels que $f(y) = f(x)$ et que $\mu_+([x, y]) \geq \epsilon$ est compact (et non vide) donc il existe $(x_1, y_1) \in E$ qui minimise $|y - x|$. Comme

$f(y_1) = f(x_1)$, $\mu_-([x_1, y_1]) = \mu_+([x_1, y_1]) \geq \epsilon$. En appliquant ce qu'on a vu plus haut à $[x_1, y_1]$, on voit que l'ensemble B' des $u \in [x_1, y_1]$ tels qu'il existe $v \in [x_1, y_1] \setminus \{u\}$ avec $f(v) = f(u)$ est tel que $\mu_+(B') \geq \epsilon$.

Mais, si $u \in]x_1, y_1[$ et $v \in [x_1, y_1]$ avec $f(v) = f(u)$, alors $\mu_+([u, v]) \leq \epsilon$, car sinon on aurait $(u, v) \in E$ et $|v - u| < |y_1 - x_1|$, ce qui serait contraire à la minimalité de $|y_1 - x_1|$. Donc $B' =]x_1, y_1[\cap A_f(\epsilon)$, donc $\mu_+([x_1, y_1] \cap A_f(\epsilon)) \geq \epsilon$, et donc $\mu_+(A_f(\epsilon)) \geq \epsilon$. $\square$

On utilise maintenant les résultats ci-dessus pour la :

Démonstration du lemme 3.1. — On suppose que la seconde alternative n'est pas vérifiée, par exemple pour U ; ainsi :

$$\tilde{\mu}(\{s \in [a, b] \mid \sin(\theta_U) < 0\}) > c, \ \tilde{\mu}(\{s \in [a, b] \mid \sin(\theta_U) > 0\}) > c$$

Si on note ν_+ (resp. ν_-) la mesure de densité $2 \sup(\sin(\theta_U)/\sin(\theta), 0) ds$ (resp. $2 \sup(-\sin(\theta_U)/\sin(\theta), 0) ds$) et, si ρ est assez petit, on a aussi d'après l'assertion 3.3 :

$$\nu_+([a, b]) \geq c - 3\rho \ , \ \ \nu_-([a, b]) \geq c - 3\rho$$

donc, si ρ est assez petit :

$$\nu_+([a, b]) \geq \frac{c}{2} \ , \ \ \nu_-([a, b]) \geq \frac{c}{2} \tag{15}$$

On note maintenant E_+ l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que $\sin(\theta_U) > 0$ et qu'il existe $y \in [a, b] \setminus \{x\}$ avec :

$$4\nu_+([x, y]) \leq \nu_-([x, y]) \leq c/4$$

On note encore f la fonction définie sur $[a, b]$ par $f(x) = 4\nu_+([a, x]) - \nu_-([a, x])$. On peut appliquer à f l'assertion 3.8, qui montre que $4\nu_+(E_+) \geq c/4$; cette assertion minore en fait même la mesure pour $4\nu_+$ des x tels qu'il existe $y \neq x$ tel que $4\nu_+([x, y]) = \nu_-([x, y]) \leq c/4$.

Or, si $x \in E_+$ et si $y \neq x$ est tel que $4\nu_+([x, y]) \leq \nu_-([x, y]) \leq c/4$, on a d'après (11) :

$$\left(\frac{\partial \lambda_V^-(x, s)}{\partial s} \right)_{|s=x} < 0$$

et :

$$\int_x^y \frac{\partial \lambda_V^-(x, s)}{\partial s} ds \geq \frac{1}{2} \nu_-([x, y]) - 2\nu_+([x, y]) > 0$$

si bien qu'il existe $z \in]x, y]$ avec $\lambda_V^-(x, z) = 0$. De plus, d'après (11) et l'assertion (3.3) :

$$|\lambda_U^-(x, z)| \leq \int_x^z 2 \frac{|\sin(\theta_V)|}{\sin(\theta)} ds \leq \int_x^z 2 \frac{|\sin(\theta_U)|}{\sin(\theta)} ds + 6\rho$$

Donc, si ρ est assez petit :

$$|\lambda_U^-(x, z)| \leq 2\nu_+([x, y]) + 2\nu_-([x, y]) + 6\rho \leq c$$

On a donc une courbe intégrale g de U de longueur au plus c joignant $\gamma_0(x)$ à $\gamma_0(z)$. Dans la suite, on note $\phi(x) := z$, en supposant de plus que g ne rencontre γ_0 qu'en ses extrémités (si ce n'est pas le cas, on peut remplacer g par un de ses segments).

On va montrer qu'on peut choisir x de manière que δ_g soit petit. Si $z \in [a, b]$, il existe au plus deux points dont l'image par ϕ peut être z — les premières intersections avec γ_0 de la courbe intégrale de U passant par $\gamma_0(z)$, de chaque coté de $\gamma_0(z)$.

Par définition de ϕ, on a $\lambda_V^+(x,\phi(x)) = 0$; en dérivant par rapport à x, on obtient que :

$$(\partial_1\lambda_V^+)(x,\phi(x)) + \phi'(x)(\partial_2\phi_V^+)(x,\phi(x)) = 0$$

où ∂_1 et ∂_2 sont les dérivations par rapport à la première et à la seconde variables. Maintenant, un raisonnement géométrique élémentaire montre que, si $\lambda_V^-(u,v) = 0$, alors :

$$(\partial_1\lambda_V^-)(u,v) = (\partial_2\lambda_V^+)(u,u)$$

Mais $\lambda_V^+(u,u) = 0$ pour tout u, et on voit en dérivant par rapport à u que :

$$(\partial_1\lambda_V^+)(u,u) + (\partial_2\lambda_V^+)(u,u) = 0$$

et donc, lorsque $\lambda_V^-(u,v) = 0$, on a :

$$|(\partial_1\lambda_V^-)(u,v)| = |(\partial_1\lambda_V^+)(u,u)|$$

Ainsi :

$$|(\partial_1\lambda_V^+)(x,x)| = |\phi'(x)|.|(\partial_2\lambda_V^-)(x,\phi(x))|$$

donc, avec (10) et (11) :

$$\frac{1}{4}\frac{|\sin(\theta_U(x))|}{\sin(\theta(x))} \leq |\phi'(x)|\frac{|\sin(\theta_U(\phi(x)))|}{\sin(\theta(\phi(x)))} \leq 4\frac{|\sin(\theta_U(x))|}{\sin(\theta(x))}$$

donc on a sur E_+ :

$$\frac{|\sin(\theta_U)|}{4\sin(\theta)}d\mu \leq \phi^*\left(\frac{|\sin(\theta_U)|}{\sin(\theta)}d\mu\right) \leq \frac{4|\sin(\theta_U)|}{\sin(\theta)}d\mu$$

Mais $\nu_+(E_+) \geq c/16$, donc, d'après l'assertion 3.3 :

$$\int_{E_+}\frac{|2\sin(\theta_U)|}{\sin(\theta)}ds \geq \int_{E_+}\frac{2|\sin(\theta_U)|}{\sin(\theta)}ds - 6\rho \geq \frac{c}{16} - 6\rho$$

donc :

$$\int_{\phi(E_+)}\frac{2|\sin(\theta_U)|}{\sin(\theta)}ds \geq \frac{c}{64} - 24\rho$$

et donc, quel que soit $c > 0$, on peut prendre ρ assez petit pour s'assurer qu'il existe $x \in E_+$ tel que $\sin(\theta) \leq c/2$ en x et en $\phi(x)$. En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait décomposer $E_+ = F \cup G$, avec $\sin(\theta(x)) > c/2$ sur F et $\sin(\theta(\phi(x))) > c/2$ sur G, et alors $\mu(F)$ ou $\mu(G)$ devrait être plus grand que ρ si ρ est assez petit.

On peut alors utiliser la proposition 3.7, qui montre que $\sin(\theta_U).\sin(\theta_V)$ a des signes opposés en x et en $\phi(x)$, et la seconde partie de l'assertion 3.3, qui montre que $\cos(\theta)$ a des signes opposés en x et en $\phi(x)$. Donc $\delta_g \leq c$. □

4 Boucles asymptotiques

On s'intéresse dans cette section et la suivante aux dégénérescences de solutions des équations de Codazzi-Gauss, qu'on étudie par l'intermédiaire des courbes asymptotiques. On sait (cf. [Roz62]) que $\tilde{B}$ peut admettre une singularité isolée, i.e. sa trace peut tendre vers l'infini en un point x_0 alors que $\tilde{B}$ est régulière dans un voisinage de x_0 (en dehors de x_0). On va montrer qu'on a quand même "propagation" si on fait des hypothèses assez fortes sur la nature des dégénérescences. Les résultats présentés ici sont moins simples que ceux qu'on connait dans le cas elliptique (voir [Lab89]).

Pour la première alternative dans le lemme 3.1, on va montrer un résultat de propagation en présence de courbes asymptotiques ayant des propriétés géométriques particulières. Dans la section suivante, on traitera l'autre cas dans le lemme 3.1.

Dans toute la suite du papier, si $c : [a, b] \to \Sigma$ est une courbe régulière par morceaux, et si $W \in T_{c(a)}\Sigma$, on note $\Pi(c; W)$ le transporté parallèle de W en $c(b)$ suivant c.

LEMME 4.1 *Il existe $T_0 > 0$ tel que, pour tout $\beta > 0$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que, si g est une courbe intégrale de U de longueur $L_g \leq \epsilon$ avec $\delta_g \leq \epsilon$, si on note $h_u : [-2T_0, 2T_0] \to \Sigma$ la courbe intégrale de V avec $h_u(0) = g(u)$, alors :*

1. *pour tout $u \in [0, L_g]$ et tout $v \in [-T_0, T_0]$, l'angle entre $V(h_u(v))$ et $\Pi(h_{u|[0,v]}; V(h_u(0)))$ est au plus β (en valeur absolue) ;*
2. *pour tout $v \in [-T_0, T_0]$, la courbe intégrale g_v U issue de $h_0(v)$, rencontre h_{L_g} ; si on la considère jusqu'à cette intersection, elle est telle que $\delta_{g_v} \leq \beta$ et que $L_{g_v} \leq 2L_g$;*
3. *il existe $u \in [0, L_g]$ tel que, pour tout $v \in [-T_0, T_0]$, $\theta(h_u(v)) \leq \beta$.*

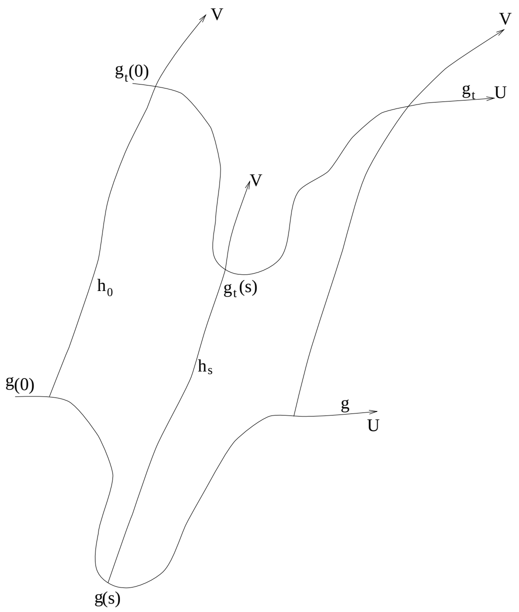

Figure 4.1

On montre ainsi que la boucle g se "propage" le long de V, c'est à dire que, quand on se déplace suivant V, les courbes intégrales de U correspondant à g ont encore de petites valeurs de δ. Mais on utilisera seulement dans la suite la première assertion du lemme.

La preuve de ce lemme utilisera la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2 *Il existe $L_M > 0$ et des fonctions $\phi, \Phi : [0, L_M] \times [0, L_M] \to \mathbf{R}_+$ continues, telles que, pour $L \in [0, L_M]$, $\phi(0, L) = 0$, et $\Phi(0, L) = \Phi(L, 0) = 0$, avec les propriétés suivantes. Si $g_0 : [0, L_0] \to \Sigma$ et $g_1 : [0, L_1] \to \Sigma$ sont des courbes intégrales de U, si $h_0 : [0, L'_0] \to \Sigma$ et $h_1 : [0, L'_1] \to \Sigma$ sont des courbes intégrales de V, avec $g_0(0) = h_0(0)$, $g_0(L_0) = h_1(0)$, $g_1(0) = h_0(L'_0)$ et $g_1(L_1) = h_1(L'_1)$, et si $L_0 \leq L_M$ et $L'_0 \leq L_M$, alors $L_1 \leq \phi(L_0, L'_0)$, $L'_1 \leq \phi(L'_0, L_0)$, et l'aire du domaine borné par g_0, g_1, h_0 et h_1 est au plus $\Phi(L_0, L'_0)$.*

Démonstration. — Soit $u \in [0, L_0]$ et $v \in [0, L_0']$. Comme Σ est simplement connexe, un raisonnement topologique simple montre que la courbe intégrale de V issue de $g(u)$ rencontre la courbe intégrale de U issue de $h(v)$. On note $g_v(u)$ leur intersection. On a alors :

$$\frac{d}{dv}g_v(u) = \alpha(u,v)V \ , \ \ \frac{d}{du}g_v(u) = \beta(u,v)U$$

et α et β vérifient, d'après un calcul identique à celui qui mène à (8) :

$$|U.\alpha| \leq 2\alpha\tau_1, \ |V.\beta| \leq 2\beta\tau_1 \tag{16}$$

De plus, $\alpha(0,v) = 1$ et $\beta(u,0) = 1$.

On peut intégrer (16) sur g_v pour obtenir que :

$$\alpha(u,v) \leq \exp(2\tau_1 L(g_v))$$

On utilise alors à nouveau (16) et on trouve que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv}L(g_v) &= \frac{d}{dv}\int_0^{L_0} \beta(u,v)du \\
&= \int_0^{L_0} \alpha(u,v)(V.\beta)du \\
&\leq \int_0^{L_0} \alpha(u,v).2\tau_1\beta(u,v)du \\
&\leq 2\tau_1(\sup_{u\in[0,L_0]} \alpha(u,v)) \int_0^{L_0} \beta(u,v)du
\end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{d}{dv}L(g_v) \leq 2\tau_1 \exp(2\tau_1 L(g_v))L(g_v) \tag{17}$$

Il suffit d'intégrer cette équation différentielle pour obtenir la majoration de L_1 annoncée ; la majoration de L_1' est obtenue de la même manière, en échangeant u et v. Enfin, la majoration d'aire s'obtient aussi en utilisant les majoration de $L(g_v)$ et de $\sup_{u\in[0,L_0]}\alpha(u,v)$ qu'on a trouvées. □

On en déduit facilement le :

Corollaire 4.3 *Soit $x, y, z \in \Sigma$ tels qu'il existe une courbe intégrale de U (ou de $-U$) de longueur au plus L_M joignant x à y, et une courbe intégrale de V (ou de $-V$) de longueur au plus L_M joignant x à z. Alors la courbe intégrale de U passant par z rencontre la courbe intégrale de V passant par y.*

Démonstration. — En effet, les intersections entre les courbes en question restent à distance bornée tant que les longueurs des courbes intégrales de U et de V joignant x à y et à z restent inférieures à L_M, et les courbes intégrales de U et de V ne rencontrent pas $\partial_{I\!I\!I}\Sigma$ (cf. la section 2). □

On a maintenant tous les éléments pour la preuve du lemme 4.1.

Démonstration du lemme 4.1. — Soit $u \in [0, L_g]$ et $v \in [-T_0, T_0]$. D'après la proposition 4.2, si T_0 et L_g sont intérieurs à une constante fixée, alors la courbe intégrale de U issue de $h_0(v)$ rencontre la courbe intégrale de V issue de $g(v)$. On note $g_v(u)$ leur intersection, et $A(u,v)$ l'aire du domaine de Σ borné par g, $g_{[0,t]}(L_g)$, g_t, $g_{[0,t]}(0)$. Toujours d'après la proposition 4.2, pour

$T_0 \leq L_M$ fixé, pour tout $L_0 > 0$ et tout $A_0 > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, si $L_g \leq \epsilon_0$, alors $L(g_v) \leq L_0$ et $A(u,v) \leq A_0$ pour tout $u \in [0, L_g]$ et pour tout $v \in [-T_0, T_0]$. On suppose dans la suite qu'on a ces majorations, pour des valeurs de L_0, A_0 qu'on va préciser.

Par définition de δ_g, il existe $u_0, u_1 \in [0, L]$ tels que $\theta(g(u_0)) - \theta(g(u_1)) \geq \pi - \delta_g$. Alors $\theta(g(u_0)) \geq \pi - \delta_g$ et $\theta(g(u_1)) \leq \delta_g$. On pose, pour $v \in [-T_0, T_0]$:

$$\delta'_v = \pi - (\theta(g_v(u_0)) - \theta(g_v(u_1)))$$

On a $\delta'_v \geq \delta_{g_v}$ par définition de δ_{g_v} donc, pour majorer δ_{g_v}, il suffit de majorer δ'_v.

On va montrer que, si $T_0 \leq \tau_1/8$ et si $L(g)$ et ϵ sont assez petit, et si, pour tout $s \in [0, v]$, $\delta'_s \leq \epsilon$, alors $\delta'_v \leq \epsilon/2$. Ceci montrera que, pour tout $v \in [-T_0, T_0]$, $\delta'_v \leq \epsilon$.

On appelle C_v la courbe fermée $g_0([u_0, u_1]) \cup g_{[0,v]}(u_1) \cup g_v([u_0, u_1]) \cup g_{[0,v]}(u_0)$. On note W le champ de vecteur sur C_t égal à V sur $g_0([u_0, u_1]) \cup g_v([u_0, u_1])$ et à U sur $g_{[0,v]}(u_1) \cup g_{[0,v]}(u_0)$. D'après le théorème de Gauss-Bonnet, la rotation totale de W sur C_t (i.e. l'intégrale de $\langle \tilde{\nabla} W, JW \rangle$ plus les termes correspondant aux coins) est $-K_v$, où K_v est l'intégrale de $\tilde{K}$ sur l'intérieur de C_v. Mais :

- les termes correspondant à $g_0([u_0, u_1])$ et à $g_v([u_0, u_1])$ sont majorés par $\tau_1 L_0$ d'après (4) ;
- les termes sur $g_{[0,v]}(u_1)$ et $g_{[0,v]}(u_0)$ sont bornés par $\tau_1 \epsilon |v| \exp(2\tau_1 L_0)$ par (5), et parce que $\sin(\theta) \leq \epsilon$ sur ces courbes ;
- $|K_v| \leq K_2 A_0$.

Donc :

$$|\theta(g_0(u_0)) - \theta(g_0(u_1)) + \theta(g_v(u_1)) - \theta(g_v(u_0))| \leq 2\tau_1 L_0 + 2\tau_1 \epsilon |v| \exp(2\tau_1 L_0) + K_2 A_0$$

et donc :

$$\delta'_v \leq \delta_g + 2\tau_1 L_0 + 2\tau_1 |v| \epsilon \exp(2\tau_1 L_0) + K_2 A_0$$

Supposons que $T_0 \leq 1/8\tau_1$. Alors on peut trouver L_0, A_0, δ tels que :

$$\delta + 2\tau_1 L_0 + 2\tau_1 T_0 \epsilon \exp(2\tau_1 L_0) + K_2 A_0 \leq \epsilon/2$$

Ainsi, si ϵ est assez petit et si $\delta_g \leq \delta$, on aura :

$$(\forall s \in [0, v], \delta'_s \leq \epsilon) \Rightarrow (\delta'_v \leq \epsilon/2)$$

si bien que $\delta'_v \leq \epsilon$ pour tout $v \in [-T_0, T_0]$, ce qui prouve la seconde assertion du lemme 4.1. La borne sur L_{g_v} vient de la proposition 4.2.

Soit maintenant $u \in [0, L_g]$ et $v \in [-T_0, T_0]$. D'après (5), l'angle entre $V(g(u))$ et $\Pi(g_{|[u_0,u]}; V(g(u_0)))$ est au plus $\tau_1 L_0$, et l'angle entre $V(g_v(u))$ et $\Pi(g_v([u_0, u]); V(g_v(u_0)))$ est au plus $\tau_1 L_0$. De plus, on vient de voir que l'angle entre $V(g_v(u_0))$ et $\Pi(g_{[0,v]}(u_0); V(g(u_0)))$ est au plus 3ϵ. Enfin, $K_v \leq K_0$. On voit donc en appliquant le théorème de Gauss-Bonnet que l'angle entre $V(g_v(u))$ et $\Pi(g_{[0,v]}(u); V(g(u)))$ est au plus $2\tau_1 L_0 + 3\epsilon + K_0$, ce qui montre la première assertion du lemme 4.1 si L_0 et K_0 sont assez petits.

Finalement, le dernier point est une conséquence simple du second (en diminuant ϵ si nécessaire), il faut prendre $u = u_1$. $\square$

5 Propagation de dégénérescences

On reprend dans cette section la cadre de la section 3. On considère donc un segment géodésique $\gamma_0 : [0, L[\to \Sigma$ tel que $\lim_L \gamma_0 \in \partial\Sigma$, et les autres éléments qui interviennent dans le lemme F. On va préciser la situation dans les régions de $[0, L[$ sans "boucles asymptotiques". On en déduira dans la section suivante la preuve du lemme F.

LEMME 5.1 *Pour tout L_5 et tout L_6 suffisamment petits, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c \in [0, \epsilon[$ et $\rho \in [0, \epsilon[$ avec la propriété suivante. Soit $[a, b] \subset [0, L[$, supposons que $|b - a| \leq \rho$ et qu'il n'existe aucune courbe intégrale γ de U, de longueur $L_\gamma \leq c$ et avec $\delta_\gamma \leq c$, dont les extrémités sont des points de $\gamma_0([a, b])$. Soit $t \in [a, b]$ tel que $\tilde{\mu}([a, t]) \geq L_5$ et que $\tilde{\mu}([t, b]) \geq L_5$. Alors les courbes intégrales g_t de U centrées en $\gamma_0(t)$ de longueur $2L_6$ sont des ϵ-pseudo-géodésiques. De plus, si $s \in [a, b]$ est tel que $\sin(\theta(s)) \leq c$ et que $\tilde{\mu}([s, t]) \leq L_6$, alors $\Pi(\gamma_{0|[s,t]}, U(\gamma_0(s)))$ est un vecteur dirigeant de g_t.*

Dans la suite, le lemme 5.1 sera utile pour contrôler le comportement des courbes asymptotiques hors des régions de $[0, L[$ correspondant à des "boucles asymptotiques" (comme celle décrites dans la section précédente).

La preuve de ce lemme repose sur les deux propositions suivantes ; L_5 et L_6 sont encore des réels qui doivent être choisis assez petits (on précisera comment dans la preuve).

PROPOSITION 5.2 *Pour tout $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que si $a, b \in [0, L[$ avec $\tilde{\mu}([a, b]) \geq L_5$ et $0 \leq b - a \leq \beta$, et si :*

$$\tilde{\mu}(\{s \in [a, b] \mid \sin(\theta_U(s)) < 0\}) \leq \beta, \quad \tilde{\mu}(\{s \in [a, b] \mid \sin(\theta_V(s)) < 0\}) \leq \beta \tag{18}$$

alors la courbe intégrale g_a de U issue de $\gamma_0(a)$ de longueur L_6 est une α-pseudo-géodésique. De plus, si $t \in [a, b]$ est tel que $\sin(\theta(t)) \leq \beta$ et que $\tilde{\mu}([a, t]) \leq L_6$, alors $\Pi(\gamma_{0|[t,a]}, U(\gamma_0(t)))$ est un vecteur dirigeant de g_a.

PROPOSITION 5.3 *Supposons de plus que $\sin(\theta(b)) \leq \beta$. Soit $g_b : [0, L_5] \to \Sigma$ la courbe intégrale de U issue de $\gamma_0(b)$. Supposons encore que, pour tout $u \in [0, L_5]$:*

$$|\angle(U(g_b(u)), \Pi(g_{b|[0,u]}, U(g_b(0))))| \leq \beta$$

Alors, pour tout $t \in [a, b]$, la courbe intégrale de U issue de $\gamma_0(t)$ de longueur L_6 est une α-pseudo-géodésique. De plus, si $s \in [a, b]$ est tel que $\sin(\theta(s)) \leq \beta$ et que $\tilde{\mu}([s, t]) \leq L_6$, alors $\Pi(\gamma_{0|[s,t]}, U(\gamma_0(s)))$ est un vecteur dirigeant de g_t.

On n'a pas énoncé ici les résultats obtenus à partir de ceux-ci par des symétries évidentes : en remplaçant U par $-V$, ou en échangeant a et b et en remplaçant U par V ou par $-U$.

On va donner d'abord la preuve du lemme 5.1 à partir des propositions 5.2 et 5.3, puis s'attaquer aux preuves de ces propositions.

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.1. — Soit $\epsilon > 0$. Choisissons $\alpha > 0$. On applique d'abord le corollaire 3.2 (en remplaçant U par V) et on voit que, si c est assez petit, il existe $N \in \mathbf{N}$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq N}, (t_i)_{1 \leq i \leq N}$ tels que :

- $a = t_0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < \cdots < s_N < t_N \leq s_{N+1} = b$;
- pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, N\}$, il existe $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ tel que :

$$\tilde{\mu}(\{s \in [t_i, s_{i+1}] \mid \sigma_i \sin(\theta_V(s)) < 0\}) \leq \alpha$$

- pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$ et tout $r \in [s_i, t_i]$, il existe $s \in [s_i, r]$, $t \in [r, t_i]$, et une courbe intégrale $\gamma : [0, L_\gamma] \to \Sigma$ de V, avec $\delta_\gamma \leq \alpha$, $L_\gamma \leq \alpha$, et $\{\gamma(0), \gamma(L_\gamma)\} = \{\gamma_0(s), \gamma_0(t)\}$.

Par ailleurs, le lemme 3.1 montre aussi que, si c est assez petit, il existe $\sigma_U \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$\tilde{\mu}(\{s \in [a, b] \mid \sigma_U \sin(\theta_U(s)) < 0\}) \leq \alpha$$

On supposera dans que $\sigma_U = 1$, sinon le raisonnement est similaire.

Soit $a', b' \in [a, b]$ tels que $\tilde{\mu}([a, a']) = \tilde{\mu}([b', b]) = L_5$. Soit $r \in [a', b']$. Si $r \in [s_i, t_i]$ pour un $i \in \{1, \cdots, N\}$, alors il existe une courbe intégrale γ de V telle que $\{\gamma(0), \gamma(L_\gamma)\} = \{\gamma_0(s), \gamma_0(t)\}$, avec $L_\gamma \leq \alpha$, $\delta_\gamma \leq \alpha$ et $s \leq r \leq t$. Le lemme 4.1 montre que, si α a été choisi assez petit, alors les courbes intégrales de U de longueur $2T_0$ centrées sur des points de $\gamma([0, L_\gamma])$ sont des ϵ-pseudo-géodésique. Or le corollaire 3.5 montre que, si α (donc L_γ) est assez petit, alors $\tilde{\mu}([s, t])$ est petit, et la courbe intégrale de U issue de $\gamma_0(r)$ rencontre γ après avoir parcouru une distance au plus $T_0/2$. Si c (et donc $|t - s|$) est assez petit, et si on a pris $L_6 \leq T_0/2$, on voit ainsi que la courbe intégrale de U centrée en $\gamma_0(r)$ de longueur $2L_6$ est une ϵ-pseudo-géodésique.

Si $a' \leq r \leq s_1$, la proposition 5.2 montre que, si $\sigma_0 = 1$, la courbe intégrale de $-U$ issue de $\gamma_0(r)$ de longueur L_6 est une ϵ-pseudo-géodésique ; si $\sigma_0 = -1$, c'est vrai de la courbe intégrale de U issue de $\gamma_0(r)$. De même, si $t_N \leq r \leq b'$ et si $\sigma_N = 1$, la proposition 5.2 montre que la courbe intégrale de U de longueur L_6 issue de $\gamma_0(r)$ est une ϵ-pseudo-géodésique, et la même chose est vraie de la courbe intégrale de $-U$ issue de $\gamma_0(r)$ si $\sigma_N = -1$.

Soit $i \in \{1, \cdots, N\}$. Par définition de s_i, il existe $t \in]s_i, t_i]$ et une courbe intégrale $\gamma : [0, L_\gamma] \to \Sigma$ de V, avec $\delta_\gamma \leq \alpha$, $L_\gamma \leq \alpha$, et $\{\gamma(0), \gamma(L_\gamma)\} = \{\gamma_0(s_i), \gamma_0(t)\}$. Choisissons $\beta > 0$. D'après le point (3.) du lemme 4.1, si α est assez petit, il existe une courbes intégrales g de U centrée sur un point de γ sur laquelle θ reste dans $]0, \beta[$. Le corollaire 3.5 montre que, si α (donc c) est assez petit, $\tilde{\mu}([s_i, t]) \leq \beta$ et g rencontre $\gamma_0([s_i, t])$ en un point $\gamma_0(b_i)$ après une distance au plus β. Ainsi, si β est assez petit, les hypothèses de la proposition 5.3, concernant la courbe intégrale de U issue de $\gamma_0(b)$, sont satisfaites lorsque on prend $b = b_i$.

La proposition 5.3 montre ainsi que, si $t_{i-1} \leq r \leq s_i$, et si $\sigma_{i-1} = 1$, alors la courbe intégrale de U issue de $\gamma_0(r)$ de longueur L_6 est une ϵ-pseudo-géodésique, et la même chose est vraie de la courbe intégrale de $-U$ si $\sigma_{i-1} = -1$. Si $t_i \leq r \leq s_{i+1}$ pour un $i \in \{1, \cdots, N\}$ et si $\sigma_i = 1$, on peut appliquer le même raisonnement, mais pour une courbe $\gamma : [0, L_\gamma] \to \Sigma$ telle que $\gamma(L_\gamma) = \gamma_0(t_i)$; on voit alors que la courbe intégrale de $-U$ issue de $\gamma_0(r)$ de longueur L_6 est une ϵ-pseudo-géodésique si $\sigma_i = 1$, et la même chose est vraie de la courbe intégrale de U si $\sigma_i = -1$.

Il reste à remarquer que les courbes intégrales de U et de $-U$ (resp. de V et de $-V$) issues de $\gamma_0(r), r \in [a', b']$, peuvent être "recollées", et qu'on obtient ainsi (quitte à remplacer ϵ par 2ϵ) des ϵ-pseudo-géodésiques de longueur $2L_6$ centrées en $\gamma_0(t)$. Ceci est dû aux caractérisations des vecteurs dirigeants dans les propositions 5.2 et 5.3, qui montrent que les vecteurs dirigeants pour les deux courbes sont proches.

Ces différents cas montrent le lemme 5.1 pour toutes les positions possibles de $s \in [a', b']$. $\square$

La suite de cette section est consacrée aux preuves des propositions 5.2 et 5.3. Introduisons quelques définitions utiles. On pose :

$$\begin{array}{rclcl} e^+_U(x, y) & = & \int_{L^+_U(x,y)} |\sin(\theta)| ds & = & \int_{y_1=x}^{y} |\sin(\theta(M^+(x, y)))| \left| \frac{\partial \lambda^+_U(x,y_1)}{\partial y_1}) \right| dy_1 \\ e^+_V(x, y) & = & \int_{L^+_V(x,y)} |\sin(\theta)| ds & = & \int_{x_1=x}^{y} |\sin(\theta(M^+(x, y)))| \left| \frac{\partial \lambda^+_V(x_1,y)}{\partial x_1} \right| dx_1 \end{array}$$

et de même avec un exposant $-$ pour les quantités analogues obtenues en échangeant x et y. Pour simplifier les notations, on note :

$$e(x,y) := \max(|e_U^+(x,y)|, |e_V^+(x,y)|, |e_U^-(x,y)|, |e_V^-(x,y)|)$$

Enfin, si $x, y \in [0, L[$, on note $C(x,y)$ le domaine de Σ borné par $L_V^+(x,y), L_U^+(x,y), L_V^-(x,y)$ et $L_U^-(x,y)$, et $K(x,y)$ l'intégrale de $\tilde{K}$ sur $C(x,y)$ (voir la figure 3.1).

On reprend les hypothèses de la proposition 5.2. La proposition suivante permet de contrôler la croissance des grandeurs que l'on vient d'introduire :

PROPOSITION 5.4 *Il existe $L_7 \in]0, L_2]$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c > 0$ avec la propriété suivante. Supposons que $x_0, y_0 \in [a,b]$ avec $0 < y_0 - x_0 \le c$, $\theta(x_0) \le c, \theta(y_0) \le c$, $\tilde{\mu}([x_0, y_0]) \le L_7$, et que*

$$\tilde{\mu}(\{s \in [a,b] \mid \sin(\theta_U(s)) < 0\}) \le c, \;\; \tilde{\mu}(\{s \in [a,b] \mid \sin(\theta_V(s)) < 0\}) \le c \tag{19}$$

Alors :

$$\max(|\theta_U(x_0) - \theta_U(y_0)|, K(x_0, y_0), e(x_0, y_0)) \le \epsilon$$

DÉMONSTRATION. — Soit $\epsilon' > 0$, qu'on précisera plus loin suivant les besoins de la preuve. On note $I := [x_0, y_0]$. On pose :

$$I_0 = \{s \in I \mid \theta(s) \le \epsilon'\}, \; I_r = I \setminus I_0$$

Alors $I_r = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, où :

$$\begin{aligned} I_1 &:= \{s \in I \mid \theta(s) \in]\epsilon', \pi - \epsilon'[\} \\ I_2 &:= \{s \in I \mid \theta(s) \in [\pi - \epsilon', \pi[\text{ et } \sin(\theta_U(s))\sin(\theta_V(s)) < 0\} \\ I_3 &:= \{s \in I \mid \theta(s) \in [\pi - \epsilon', \pi[\text{ et } \sin(\theta_U(s))\sin(\theta_V(s)) \ge 0\} \end{aligned}$$

Si $s \in I_1$, alors $d\tilde{\mu}/ds \le 2/\epsilon'$; donc $\tilde{\mu}(I_1) \le 2c/\epsilon'$. Si $s \in I_2$, $\sin(\theta_U) < 0$ ou $\sin(\theta_V) < 0$, et chaque possibilité correspond à une $\tilde{\mu}$-mesure au plus c par (19). Donc $\tilde{\mu}(I_2) \le 2c$. Enfin, $\tilde{\mu}(I_3) \le 5c$ d'après l'assertion 3.3. Ainsi, $\tilde{\mu}(I_r) \le 2c/\epsilon' + 2c + 5c$. Quitte à choisir c assez petit (par rapport à ϵ'), on a donc $\tilde{\mu}(I_r) \le \epsilon'/4C_2$ (où C_2 provient du corollaire 3.4), ce qu'on suppose dans la suite.

D'après l'énoncé (si $c \le \epsilon'$), $x_0 \in I_0$. Notons :

$$y_1 := \inf(\{y \ge x_0 \mid e(x_0, y) \ge \epsilon'\} \cup \{y_0\})$$

On va montrer que, si $y_1 \ne y_0$, alors $\tilde{\mu}([x_0, y_1]) \ge L_2/4$. On suppose donc que $y_1 < y_0$. On prend $y_2 \in [x_0, y_1]$, et on va majorer $e_U^+(x_0, y_2)$ et $e_V^+(x_0, y_2)$.

D'après le corollaire 3.4 :

$$\begin{aligned} e_U^+(x_0, y_2) &= \int_{y=x_0}^{y_2} \sin(\theta(M^+(x_0,y))) \left|\partial_y \lambda_U^+(x_0,y)\right| dy \\ &\le C_2 \int_{x_0}^{y_2} \sin(\theta(M^+(x_0,y)))\tilde{\mu}(dy) + C_2 \int_{x_0}^{y_2} \sin(\theta(M^+(x_0,y)))dy \\ &\le C_2 \tilde{\mu}(I_r \cap [x_0, y_2]) + \int_{I_0 \cap [x_0, y_2]} \sin(\theta(M^+(x_0,y)))\tilde{\mu}(dy) + C_2 c \end{aligned}$$

donc :

$$e_U^+(x_0, y_2) \le \frac{\epsilon'}{4} + \int_{I_0 \cap [x_0, y_2]} \sin(\theta(M^+(x_0,y)))\tilde{\mu}(dy) + C_2 c \tag{20}$$

Soit $y \in [x_0, y_2]$. On définit un champ de vecteur W sur $\partial C(x_0, y)$ par $W := U$ sur $L_V^+(x_0, y) \cup L_V^-(x_0, y)$ et $W := V$ sur $L_U^+(x_0, y) \cup L_U^-(x_0, y)$. D'après le théorème de Gauss-Bonnet, la rotation totale de W sur $\partial C(x_0, y)$ (i.e. l'intégrale de $\langle DW, JW \rangle$ sur les segments réguliers de $\partial C(x_0, y)$, plus les termes correspondant aux coins) est $2\pi - K(x_0, y)$; comme cette rotation sur les segments $L_V^+(x_0, y), L_U^+(x_0, y), L_V^-(x_0, y)$ et $L_U^-(x_0, y)$ est majorée d'après (4) et (5), on a :

$$|\theta(M^+(x_0, y)) - \theta(x_0) + \theta(M^-(x_0, y)) - \theta(y) + K(x_0, y)| \leq 4\tau_1 e(x_0, y)$$

et, comme $y \leq y_1$, $e(x_0, y) \leq \epsilon'$, donc :

$$\theta(M^+(x_0, y)) + \theta(M^-(x_0, y)) + K(x_0, y) \leq \theta(x_0) + \theta(y) + 4\tau_1 \epsilon'$$

Mais chaque terme est positif et $\theta(x_0) \leq \epsilon'$. Si $y \in I_0$, alors on a aussi $\theta(y) \leq \epsilon'$, on obtient donc que $\theta(M^+(x_0, y)), \theta(M^-(x_0, y))$ et $K(x_0, y)$ sont majorés par $(2 + 4\tau_1)\epsilon'$.

Il reste à intégrer cette majoration dans (20) pour obtenir que, si $\tilde{\mu}([x_0, y_2]) \leq L_2/4$, alors :

$$e_U^+(x_0, y_2) \leq \frac{\epsilon'}{4} + (1 + \tau_1) L_2 \epsilon' + C_2 c$$

donc, quitte à modifier L_2 pour avoir $(1 + \tau_1) L_2 \leq 1/8$ et à supposer que c est assez petit pour que $C_2 c \leq \epsilon'/8$, on voit que :

$$e_U^+(x_0, y_2) \leq \epsilon'/2$$

On obtient de même que $e_V^+(x_0, y_2) \leq \epsilon'/2$, et pareillement avec $-$, si bien que (si ϵ' et c sont assez petits) si $y_1 < y_0$, alors $\tilde{\mu}([x_0, y_1]) \geq L_2/4$. On a donc bien montré que soit $y_1 = y_0$, soit $\tilde{\mu}([x_0, y_0]) \geq L_2/4$.

Mais, si on prend $L_7 \leq L_2/4$, alors $y_1 = y_0$, donc $e_U^+(x_0, y_0) \leq \epsilon'$; si bien que l'angle entre $V(M^+(x_0, y_0))$ et le transporté parallèle de $V(\gamma_0(x_0))$ suivant $L_U^+(x_0, y_0)$ est au plus $\tau_1 e_U^+(x_0, y_0) \leq \tau_1 \epsilon'$. De plus, on a vu plus haut qu'on a :

$$\theta(M^+(x_0, y_0)) \leq (4\tau_1 + 2)\epsilon'$$

L'angle entre $U(M^+(x_0, y_0))$ et le transporté parallèle de $U(\gamma_0(x_0))$ suivant $L_U^+(x_0, y_0)$ est donc au plus :

$$\tau_1 e_U^+(x_0, y_0) + \theta(M^+(x_0, y_0)) + \theta(x_0) \leq \tau_1 \epsilon' + (4\tau_1 + 2)\epsilon' + \epsilon' \leq (5\tau_1 + 3)\epsilon'$$

On sait aussi que l'angle entre $U(M^+(x_0, y_0))$ et le transporté parallèle de $U(\gamma_0(y_0))$ suivant $L_V^+(x_0, y_0)$ est au plus $\tau_1 \epsilon'$. Enfin, on a vu plus haut que $K(x_0, y_0) \leq (4\tau_1 + 2)\epsilon'$. En appliquant le théorème de Gauss-Bonnet, on trouve donc que $|\theta_U(x_0) - \theta_U(y_0)| \leq (10\tau_1 + 5)\epsilon'$, qui est plus petit que ϵ si ϵ' est assez petit.

Si ϵ' est assez petit, on obtient les majorations voulues de $e(x_0, y_0)$ et de $|\theta_U(x_0) - \theta_U(y_0)|$. Enfin, on a trouvé ci-dessus une majoration de $K(x_0, y_0)$. □

On peut maintenant démontrer la proposition 5.2.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.2. — On suppose donc que $0 < |b - a| \leq \beta$. Soit $y_0 \in [a, b]$ tel que $\tilde{\mu}([a, y_0]) = L_7$ $(\leq L_2)$; alors, d'après le corollaire 3.4 :

$$\lambda_U^+(a, y_0) \geq \frac{L_7}{C_2} - C_2 \beta \tag{21}$$

d'où une minoration de $\lambda_U^+(a, y_0)$ par une constante $L_6 > 0$ si β est assez petit.

On choisit encore $\alpha' > 0$, sur lequel on précisera plus loin des conditions. On pose encore :

$$J_0 = \{s \in [a, y_0] \mid \theta(s) \leq \alpha'\},\ J_r = [a, y_0] \setminus J_0$$

D'après le raisonnement fait plus haut pour I_r, $\tilde{\mu}(J_r) \leq 2\beta/\alpha' + 7\beta$, donc, d'après le corollaire 3.4, la courbe (non connexe) :

$$L^+_{U,r} := \{M^+(a, y) \mid y \in J_r\}$$

a une longueur majorée par $C_2(\tilde{\mu}(J_r) + \beta)$, donc par $C_2(2/\alpha' + 8)\beta$. Si β est assez petit, cette longueur est majorée par α. La courbe (non connexe) :

$$L^+_{U,0} := \{M^+(a, y) \mid y \in J_0\}$$

est donc de longueur au moins $L_6 - \alpha$.

Il existe $x_0 \in J_0 \subset [a, y_0]$ tel que $\tilde{\mu}([a, x_0]) \leq \tilde{\mu}(J_r) \leq \alpha'$. On suppose que β est assez petit (par rapport à α') pour que $(2/\alpha' + 8)\beta \leq \alpha'$. On va montrer que g_a est alors une α-pseudo-géodésique dont un vecteur dirigeant est $\Pi(\gamma_{0|[x_0,a]}; U)$.

Par hypothèse, $\tilde{\mu}([a, x_0]) \leq \alpha'$. De plus, pour tout $x \in [a, x_0]$, $\lambda^+_U(x, y_0) \leq C_2(L_7 + \beta)$. On peut alors utiliser le corollaire 3.4 et un argument d'intégration élémentaire pour montrer que :

$$\mathrm{Aire}(\cup_{x \in [a,x_0]} L^+_U(x, y_0)) \leq C_2(L_7 + \beta).C_2(\alpha' + \beta)$$

On peut faire le même raisonnement pour montrer que :

$$\mathrm{Aire}(\cup_{x \in [a,x_0]} L^-_V(x, y_0)) \leq C_2(L_7 + \beta).C_2(\alpha' + \beta)$$

Ainsi :

$$A(a, y_0) - A(x_0, y_0) \leq 2C_2(\alpha' + \beta).C_2(L_7 + \beta) = 2C_2^2(\alpha' + \beta)(L_7 + \beta)$$

donc :

$$K(a, y_0) - K(x_0, y_0) \leq 2K_2C_2^2(\alpha' + \beta)(L_7 + \beta) \tag{22}$$

Soit maintenant $y \in J_0$. Appliquons la proposition 5.4 à (x_0, y). On obtient que $|\theta_U(x_0) - \theta_U(y)| \leq \alpha'$, $K(x_0, y) \leq \alpha'$, et que $e(x_0, y) \leq \alpha'$. Notons encore :

$$\begin{array}{rcl} W_a & = & \Pi(\gamma_{0|[x_0,a]}; U) \\ W_y & = & \Pi(\gamma_{0|[x_0,y]}; U) \\ W_{M^+(x_0,y)} & = & \Pi(L^+_V(x_0, y); W_y) \\ W_{M^+(a,y)} & = & \Pi(L^+_V(a, y); W_y) \\ W & = & \Pi(L^+_U(a, y); W_a) \end{array}$$

Alors :

$$|\angle(U(y), W_y)| = |\theta_U(x_0) - \theta_U(y)| \leq \alpha'$$

En appliquant (5), on en déduit que :

$$|\angle(W_{M^+(x_0,y)}, U(M^+(x_0, y)))| \leq \alpha' + \tau_1 e^+_V(x_0, y) \leq \alpha' + \tau_1\alpha'$$

Comme le segment de $L^+_V(a, y)$ entre $M^+(x_0, y)$ et $M^+(a, y)$ est de longueur au plus $C_2(\alpha' + \beta)$ (d'après le corollaire 3.4), (5) montre encore que :

$$|\angle(W_{M^+(a,y)}, U(M^+(a, y)))| \leq \alpha'(1 + \tau_1) + \tau_1 C_2(\alpha' + \beta) \leq \alpha'(1 + \tau_1 + C_2\tau_1) + \tau_1 C_2\beta$$

Enfin, le théorème de Gauss-Bonnet montre que :

$$|\angle(W, W_{M^+(a,y)})| \leq K(a,y) \leq K(x_0,y) + |K(a,y) - K(x_0,y)| \leq \alpha' + 2K_2C_2^2(L_7+\beta)(\alpha'+\beta)$$

Finalement :

$$|\angle(W, U(M^+(a,y)))| \leq \alpha'(2+\tau_1+\tau_1 C_2) + \tau_1 C_2 \beta + 2K_2C_2^2(L_7+\beta)(\alpha'+\beta) \tag{23}$$

Si α' et β sont assez petits, cette quantité est majorée par α. On a ainsi montré que, pour tout $m \in L^+_{U,0}(a,y_0)$, l'angle entre $U(m)$ et $W(m)$ est au plus α, alors que la longueur de $L^+_{U,r}(a,y_0)$ est au plus α. Ceci montre que $L^+_U(a,y_0)$ est une α-pseudo-géodésique de vecteur dirigeant W.

Si maintenant $t \in [a,b]$ est tel que $\tilde{\mu}([a,t]) \leq L_6$ et que $\theta(t) \leq \beta$, on applique la proposition 5.4 à (x_0,t) et on voit que $|\theta_U(x_0) - \theta_U(t)| \leq \alpha$. Donc, quitte à remplacer α par 2α, $L^+_U(a,y_0)$ admet aussi comme vecteur dirigeant $\Pi(\gamma_{0|[t,a]}; U)$. $\Box$

On peut aussi donner une proposition parallèle à la proposition 5.4, mais pour la proposition 5.3. On introduit pour cela des notations similaires à celles qu'on a utilisées ci-dessus, mais en remplaçant $\gamma_0(y)$ par $g_b(u)$. On note ainsi $L_U(x)$ la courbe intégrale de U issue de $\gamma_0(x)$, $L_V(x)$ la courbe intégrale de V issue de $\gamma_0(x)$, $\overline{L}_V(u)$ la courbe intégrale de V issue de $g_b(u)$, $\overline{L}_U(u) = g_b$, $\overline{K}(x,u)$ l'intégrale de $\tilde{K}$ sur le domaine délimité par $L_U(x), L_V(x), \overline{L}_U(u)$ et $\overline{L}_V(u)$, et de même pour les autres notations. $\overline{M}^+(x,u)$ est l'intersection de $L_U(x)$ et de $\overline{L}_V(u)$. On appelle $\overline{\theta}_U(u)$ et $\overline{\theta}_V(u)$ les angles en $g_b(u)$ entre le transporté parallèle de γ_0' suivant $g_b([0,u])$ et U et V respectivement. Enfin, on note $\overline{L}^+_U(x,u)$ le segment de $L_U(x)$ entre $\gamma_0(x)$ et $\overline{M}^+(x,u)$ et $\overline{L}^+_V(x,u)$ le segment de $\overline{L}_V(u)$ entre $g_b(u)$ et $\overline{M}^+(x,u)$.

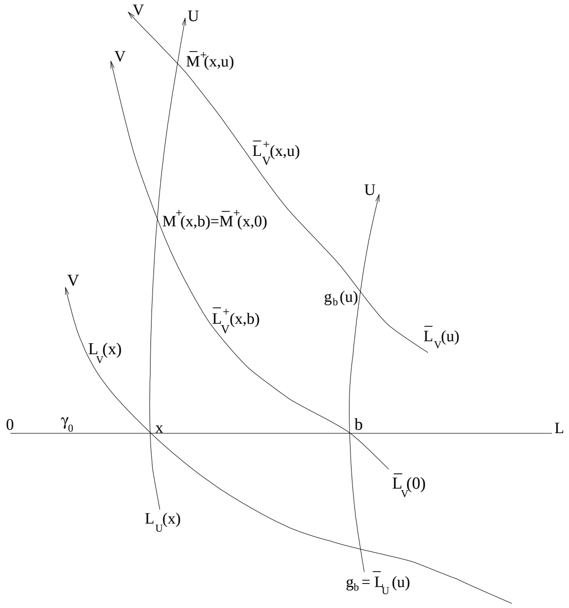

Figure 5.1

On utilisera la proposition suivante, qui est un analogue adapté à notre situation du corollaire 3.4 :

Proposition 5.5 *Il existe $\overline{L}_2 > 0$ tel que si les longueurs de $\overline{L}^+_U(x,u)$ et de $\overline{L}^+_V(x,u)$ sont majorées par $\overline{L}_2$, alors :*

$$\|(\partial_1 \overline{M}^+)(x,u)\| \leq C_2\left(\frac{d\tilde{\mu}}{dx} + 1\right) \ , \ \|(\partial_2 \overline{M}^+)(x,u)\| \leq C_2$$

Démonstration. — La preuve est similaire à celle du corollaire 3.4. Pour la première inégalité, il faut utiliser (9) et (8) (ou (16)) ainsi que l'assertion 3.3. Pour la seconde inégalité, il suffit d'appliquer (16). □

On reprend maintenant les hypothèses de la proposition 5.3. On suppose donc encore que $|b-a| \leq \beta$, que g_b est presque une géodésique dans le sens de l'énoncé de 5.3, et que :

$$\tilde{\mu}(\{s \in [a,b] \mid \sin(\theta_U(s)) < 0\}) \leq \beta, \ \ \tilde{\mu}(\{s \in [a,b] \mid \sin(\theta_V(s)) < 0\}) \leq \beta$$

Pour $x \in [0, b[$ et $u \in [0, \overline{L}_2$, on note encore $\overline{A}(x,u)$ l'aire du domaine de Σ borné par du domaine $\overline{\Omega}(x,u)$ délimité par $g_b([0,u]), \overline{L}_V(u), L_U(x)$ et $L_V(b) = \overline{L}_V(0)$, et $\overline{K}(x,u)$ l'intégrale de $\tilde{K}$ sur $\overline{\Omega}(x,u)$. Alors :

Proposition 5.6 *Il existe $\overline{L}_7 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que si $\beta \leq c$ et si $u \in [0, \overline{L}_7]$, $x_0 \in [a,b]$ et si $\tilde{\mu}([x_0,b]) \leq \overline{L}_7$, alors $\overline{K}(x_0,u) \leq \epsilon$. Si de plus $\theta(x_0) \leq c$, alors $\theta(\overline{M}^+(x_0,u)) \leq \epsilon$.*

Démonstration. — On choisit $\epsilon' > 0$ (on précisera plus loin sa valeur). On note encore :

$$I_0 := \{x \in [x_0,b] \mid \theta(x) \leq \epsilon'\}, \ I_r := [x_0,b] \setminus I_0$$

Le début de la preuve de la proposition 5.4 montre que $\tilde{\mu}(I_r) \leq \epsilon'$ si c est assez petit.

On note alors :

$$u_1 := \inf\{u \in [0, \overline{L}_7] \mid \exists x \in I_0, \theta(\overline{M}^+(x,u)) \geq \epsilon\} \cup \{\overline{L}_7\})$$

On veut montrer que $u_1 = \overline{L}_7$. On choisit donc $x \in I_0$ et $u \leq u_1$, et on va prouver que $\theta(\overline{M}^+(x,u)) \leq \epsilon/2$.

La proposition 5.4 appliquée à (x,b) montre que $\theta(M^+(x,b)) \leq \epsilon'$ et que $e(x,b) \leq \epsilon'$. On utilisera ces majorations pour contrôler $\theta(\overline{M}^+(x,u))$. D'après la proposition 4.2, si $\overline{L}_7$ est assez petit, la courbe :

$$C_U(x,u) := \{\overline{M}^+(x,v) \mid v \in [0,u]\}$$

est de longueur au plus $2u \leq 2\overline{L}_7$. Par définition de u_1, $\theta \leq \epsilon$ en chaque point de $C_U(x,u)$. D'après (4) :

$$|\angle(V(\overline{M}^+(x,u)), \Pi(C_U(x,u); V(M^+(x,b))))| \leq 2\tau_1 \overline{L}_7 \epsilon \tag{24}$$

Comme $e(x,b) \leq \epsilon'$, on voit aussi que :

$$|\angle(U(\gamma_0(b)), \Pi(L_V^+(x,b); U(M^+(x,b))))| \leq \tau_1 \epsilon' \tag{25}$$

Par ailleurs, une hypothèse de la proposition 5.3 affirme que :

$$|\angle(U(g_b(u)), \Pi(g_{b|[0,u]}; U(\gamma_0(b))))| \leq \beta \tag{26}$$

Enfin, la proposition 5.5 montre que les courbes :

$$\overline{L}_{V,0}^+ := \{\overline{M}^+(x',u) \mid x' \in I_0\}, \ \overline{L}_{V,r}^+ := \{\overline{M}^+(x',u) \mid x' \in I_r\}$$

ont des longueurs majorées par $C_2(\tilde{\mu}(I_0)+c) \leq C_2(\overline{L}_7 + c)$ et par $C_2(\tilde{\mu}(I_r)+c) \leq C_2(\epsilon'+c)$ respectivement. Comme $\theta \leq \epsilon$ sur $\overline{L}_{V,0}^+$ (car $u \leq u_1$), on obtient avec (5) que :

$$|\angle(U(\overline{M}^+(x,u)), \Pi(\overline{L}_V^+(x,u), U(g_b(u))))| \leq \tau_1(\epsilon C_2(\overline{L}_7 + c) + C_2(\epsilon' + c)) \tag{27}$$

Pour contrôler l'aire $\overline{A}(x,u)$, on utilise la proposition 5.5 et le fait que $\theta(\overline{M}^+(y,v)) \leq \epsilon$ lorsque $y \in I_0$ pour obtenir que :

$$\begin{aligned}
\overline{A}(x,u) &\leq \int_{v=0}^{u}\int_{y=x}^{b} \sin(\theta(\overline{M}^+(y,v)))\|(\partial_1\overline{M}^+)(y,v)\|\|(\partial_2\overline{M}^+)(y,v)\|dydv \\
&\leq C_2\int_{v=0}^{u}\left(\int_{y\in I_0}\sin(\theta(\overline{M}^+(y,v)))\|(\partial_1\overline{M}^+)(y,v)\|dy + \int_{y\in I_r}\|(\partial_1\overline{M}^+)(y,v)\|dy\right)dv \\
&\leq C_2u(\epsilon C_2(\tilde{\mu}(I_0)+c) + C_2(\tilde{\mu}(I_r)+c)) \\
&\leq C_2^2\overline{L}_7(\epsilon(\overline{L}_7+c) + (\epsilon'+c))
\end{aligned}$$

L'intégrale de $\tilde{K}$ sur $\overline{\Omega}(x,u)$ est donc au plus :

$$\overline{K}(x,u) \leq C_2K_2\overline{L}_7(\epsilon C_2(\overline{L}_7+c) + C_2(\epsilon'+c)) \tag{28}$$

On note maintenant que :

$$\theta(\overline{M}^+(x,u)) \leq \theta(M^+(x,b)) + |\angle(U(\overline{M}^+(x,u)), \Pi(C_U(x,u); U(M^+(x,b))))| + \\ + |\angle(V(\overline{M}^+(x,u)), \Pi(C_U(x,u); V(M^+(x,b))))|$$

Or, d'après le théorème de Gauss-Bonnet :

$$|\angle(U(\overline{M}^+(x,u)), \Pi(C_U(x,u); U(M^+(x,b))))| \leq |\angle(U(\gamma_0(b)), \Pi(L_V^+(x,b); U(M^+(x,b))))| + \\ + |\angle(U(g_b(u)), \Pi(g_{b|[0,u]}; U(\gamma_0(b))))| + |\angle(U(\overline{M}^+(x,u)), \Pi(\overline{L}_V^+(x,u), U(g_b(u))))| + \overline{K}(x,u)$$

Comme $\theta(M^+(x,u)) \leq \epsilon'$, on peut utiliser (24), (25), (26), (27) et (28) pour obtenir que :

$$\theta(\overline{M}^+(x,u)) \leq \epsilon' + 2\tau_1\overline{L}_7\epsilon + \tau_1\epsilon' + \beta + \\ + \tau_1(\epsilon C_2(\overline{L}_7+c) + C_2(\epsilon'+c)) + C_2^2K_2\overline{L}_7(\epsilon(\overline{L}_7+c) + (\epsilon'+c))$$

Si $\overline{L}_7$ est choisi assez petit, et si ϵ' et c (et donc β car $\beta \leq c$) sont assez petits par rapport à ϵ, on trouve que :

$$\theta(\overline{M}^+(x,u)) \leq \epsilon/2$$

Ceci nous assure que, pour tout $u \leq u_1$ et pour tout $x \in I_0$, $\theta(\overline{M}^+(x,u)) \leq \epsilon/2$. Ainsi, $u_1 = \overline{L}_7$. □

On peut en déduire la proposition 5.3 à peu près comme plus haut pour la preuve de la proposition 5.2 à partir de la proposition 5.4.

Démonstration de la proposition 5.3. — Soit $t \in [a,b]$. Si $\tilde{\mu}(t,b)) \geq L_5$, la proposition 5.2 permet de conclure. Sinon, sa démonstration permet de montrer que $L_U^+(t,b)$ est une α-pseudo-géodésique, mais sa longueur peut être inférieure à L_6 et d'autres arguments sont nécessaires. Pour $u \in [0,\overline{L}_7]$, on note encore :

$$C_U(t,u) := \{\overline{M}^+(t,v) \mid v \in [0,u]\}$$

et on remarque que, si $\overline{L}_7$ est assez petit, d'après la proposition 4.2, $C_U(t,\overline{L}_7)$ est de longueur au moins $\overline{L}_7/2$, donc au moins L_6 si L_6 aussi est assez petit. Il suffit donc de montrer que $\overline{L}_U(t,\overline{L}_7)$ est une α-pseudo-géodésique pour pouvoir conclure. On fixe pour cela $\alpha' > 0$.

D'après la proposition 5.2 appliqué à (t,b), si β est assez petit, $L_U^+(t,b)$ est une α'-pseudo-géodésique de vecteur dirigeant W. De plus, la preuve de la proposition 5.2 montre que, comme $\theta(b) \leq \beta$:

$$|\angle(W, U(M^+(t,b)))| \leq \alpha' \tag{29}$$

Soit $u \in [0, \overline{L}_7]$. On décompose à nouveau :

$$[t, b] = I_0 \cup I_r$$

où :

$$I_0 := \{s \in [t, b] \mid \theta(s) \leq \alpha'\} \ , \ I_r := [t, b] \setminus I_0$$

Le même argument qu'au début de la preuve de la proposition 5.4 montre que, si β est assez petit, alors $\tilde{\mu}(I_r) \leq \alpha'$. Alors, d'après (4) et la proposition 5.6, on a :

$$|\angle(U(\overline{M}^+(t,u)), \Pi(\overline{L}_V(t,u), U(g_b(t))))| \leq \tau_1 \int_t^b \sin(\theta(\overline{M}^+(s,u))) \|\partial_1 \overline{M}^+(s,u)\| ds \leq$$
$$\leq \tau_1 C_2 (b-t) + \tau_1 C_2 \int_{I_0} \sin(\theta(\overline{M}^+(s,u))) d\tilde{\mu}(ds) + \tau_1 C_2 \tilde{\mu}(I_r)$$

si bien que :

$$|\angle(U(\overline{M}^+(t,u)), \Pi(\overline{L}_V(t,u), U(g_b(t))))| \leq \tau_1 C_2 ((b-t) + \alpha' \overline{L}_7 + \alpha') \tag{30}$$

Mais le théorème de Gauss-Bonnet indique que :

$$|\angle(U(\overline{M}^+(t,u)), \Pi(C_U(t,u), U(M^+(t,b))))| \leq |\angle(U(M^+(t,b)), \Pi(L_V^+(t,b), U(g_b(0))))| +$$
$$+ |\angle(U(g_b(u)), \Pi(g_b, U(g_b(0))))| + |\angle(U(\overline{M}^+(t,u)), \Pi(\overline{L}_V(t,u), U(g_b(u))))| + \overline{K}(t,u)$$

Enfin, la proposition 5.6 montre que, si β est assez petit, $\overline{K}(t,u) \leq \alpha'$, alors que l'énoncé qu'on cherche à démontrer affirme que :

$$|\angle(U(g_b(u)), \Pi(g_b, U(g_b(0))))| \leq \beta$$

On voit donc en appliquant deux fois (30) que :

$$|\angle(U(\overline{M}^+(t,u)), \Pi(C_U(t,u), U(M^+(t,b))))| \leq \beta + 2(\tau_1 C_2 (b-t) + \alpha' \overline{L}_7 + \alpha') + \alpha'$$

Si α' et β sont assez petits, ceci assure que $\overline{L}_U^+(t, \overline{L}_7)$ est une α-pseudo-géodésique. Pour vérifier que le transporté parallèle de $U(\gamma_0(s))$ est bien un vecteur dirigeant, on procède comme plus haut à la fin de la preuve de la proposition 5.2. □

6 Preuve du lemme F

On passe maintenant à la preuve du lemme F. Il nous faut encore une proposition qui limite la proximité, sur γ_0, entre les courbes intégrales de U et de V qui vérifient les hypothèses du lemme 4.1.

Proposition 6.1 *Il existe $L_8 > 0$ et $C_8 > 0$ tels que, si $\gamma_U : [0, L_U] \to \Sigma$ et $\gamma_V : [0, L_V] \to \Sigma$ sont des courbes intégrales respectivement de U et de V, avec $\max(L_{\gamma_U}, L_{\gamma_V}, \delta_{\gamma_U}, \delta_{\gamma_V}) \leq C_8$, si $\gamma_U(0) = \gamma_0(x_U), \gamma_U(L_U) = \gamma_0(y_U)$, $\gamma_V(0) = \gamma_0(x_V)$ et $\gamma_V(L_V) = \gamma_0(y_V)$, et si $|y_U - x_V| \leq C_8$, alors $\tilde{\mu}([y_U, x_V]) \geq L_8$.*

Démonstration. — On suppose le contraire, on va montrer que c'est impossible si L_8 et C_8 sont assez petits.

Le corollaire 3.4 montre que, si L_8 est assez petit, la courbe intégrale c_V de V issue de $\gamma_0(y_U)$ rencontre la courbe intégrale c_U de U issue de $\gamma_0(x_V)$ à distance au plus $\tilde{\mu}([y_U, x_V]) C_2 + C_8 C_2$

de $\gamma_0(y_U)$; cette distance est inférieure à $T_0/2$ (où T_0 vient du lemme 4.1) si L_8 et C_8 sont assez petits.

D'après le second point du lemme 4.1 appliqué à γ_U, le segment s_U de c_U centré en $c_U \cap c_V$ de longueur $4C_8$ a une petite valeur de δ_{s_U}. En effet, si L_8 est assez petit, cette courbe contient un segment s'_U qui coïncide avec une courbe g_v obtenue en prenant $g = g_0$ égal à γ_U dans le lemme 4.1. D'après le second point du lemme 4.1, $\delta_{s'_U}$ est petit, donc δ_{s_U} est petit.

Cela contredit le premier point du lemme 4.1 appliqué à γ_V, car, pour L_8 assez petit, s_U est dans une courbe intégrale de U issue d'un point de γ_V. □

Démonstration du lemme F. — On prend $C_0 = C_2$, et $L_0 = \min(T_0/2, L_5/C_0, L_6)$. Rappelons que C_2 vient du corollaire 3.4, T_0 du lemme 4.1, et L_5 et L_6 du lemme 5.1. On considère quatre cas, suivant les positions de U et de V le long de γ_0.

1er cas. Il existe $\epsilon_0 > 0, s_0 \in [0, L[$ tels que si γ est une courbe intégrale de U ou de V dont les extrémités sont dans $\gamma_0([s_0, L[)$, alors $L_\gamma > \epsilon_0$ ou bien $\delta_\gamma > \epsilon_0$.

D'après le lemme 3.1 :

$$\lim_{s\to L} \tilde{\mu}\{t \in [s, L[\mid \sin(\theta_V(t)) < 0\} = 0$$

(ou la même chose en remplaçant V par $-V$, mais ça ne change rien au raisonnement), et il en est de même pour U .

Le lemme 5.1 va permettre de montrer le lemme F, avec simplement $I = \emptyset$ et $J =]0, L[$. En particulier, le point (1.) de la définition en est une conséquence immédiate.

Les points (2.) et (3.) du lemme F sont clairs parce que $I = \emptyset$. Enfin, le point (4.) est une conséquence du corollaire 3.5. En effet, le premier point de ce corollaire montre que les intersections des h_u avec γ_0 sont proches, alors que les second point montre que les h_u sont orientées du même coté que γ_0 en leur première et en leur dernière intersection.

2ème cas. Il existe $\epsilon_0 > 0, s_0 \in [0, L[$ tels que, si γ est une courbe intégrale de V dont les extrémités sont dans $\gamma_0([s_0, L[)$, alors $L_\gamma > \epsilon_0$ ou bien $\delta_\gamma > \epsilon_0$, mais l'analogue pour les courbes intégrales de U est faux. Donc, pour tout $\epsilon_0 > 0$ et tout $s_0 \in [0, L[$, il existe une courbe intégrale de U, g, qui a ses extrémités sur $\gamma_0([s_0, L[)$ et telle que $L_g \leq \epsilon_0$ et que $\delta_g \leq \epsilon_0$. On va montrer que le lemme F est vérifié, avec $I = \emptyset$ et $J = [0, L[$.

On choisit une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de $\mathbf{R}_+^*$ qui tend vers 0. Soient $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ des suites qui lui sont associées par le lemme 5.1, i.e. c_n est ρ_n sont est associé à ϵ_n par l'énoncé de ce lemme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On choisit une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ croissant vers L telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il n'existe aucune courbe intégrale γ de V de longueur $L_\gamma \leq c_n$ et avec $\delta_\gamma \leq c_n$ dont les extrémités sont des points de $\gamma_0([a_n, L[)$, et telle que $L - a_n \leq \rho_n$. On note $(a'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite telle que $a'_n > a_n$ et que $\tilde{\mu}([a_n, a'_n]) = L_5$.

Le lemme 5.1 montre que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les courbes intégrales de V de longueur $2L_6$ centrées en un point de $[a'_n, L[$ sont des ϵ_n-pseudo-géodésiques, ce qui prouve le point (1.) du lemme F. Les points (2.) à (4.) sont faciles à vérifier comme dans le premier cas ci-dessus.

3ème cas. Comme pour le deuxième cas, mais après échange de U et de V ; le raisonnement est le même, et le lemme F est vérifié avec $I = [0, L[$ et $J = \emptyset$.

4ème cas. Aucun des trois premiers cas ci-dessus ne sont vérifiés. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $s_0 \in [0, L[$, il existe une courbe intégrale de U, g, qui a ses extrémités sur $\gamma_0([s_0, L[)$ et telle que $L_g \leq \epsilon$ et $\delta_g \leq \epsilon$, et la même chose est vraie pour V.

On raisonne comme dans le deuxième cas ; on choisit une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de réels qui décroit vers 0, et on note $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\rho'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ les suite qui lui sont associée par le lemme 5.1. Puis on note $(\rho''_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite associée à $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par le lemme 3.1, et on pose : $\rho_n = \min(\rho'_n, \rho''_n)$. Quitte à diminuer éventuellement les ϵ_n, on suppose que $\rho_1 \leq C_8$ (où C_8 vient de la proposition 6.1). Enfin, on note $a_n := L - \rho_n$, et b_n l'unique élément de $[a_n, L[$ tel que $\tilde{\mu}([a_{n+1}, b_n]) = 1$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on applique le corollaire 3.2 sur $[a_n, b_n]$, et on obtient deux familles finies $(s_{n,1}, \cdots, s_{n,k_n})$ et $(t_{n,1}, \cdots, t_{n,k_n})$ croissantes de points de $[a_n, b_n]$ telles que $s_{n,k} < t_{n,k} < s_{n,k+1}$ et que, pour tout $r \in [s_{n,k}, t_{n,k}]$, il existe une courbe intégrale de U ayant une extrémité sur $\gamma_0([s_{n,k}, r])$ et une extrémité sur $\gamma_0([r, t_{n,k}])$, et qui est de longueur et de δ au plus c_n. Enfin, il existe $\sigma_{n,k} \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$\tilde{\mu}(\{s \in [t_{n,k-1}, s_{n,k}] \mid \sigma_{n,k} \sin(\theta_U(s)) < 0\}) \leq c_n$$

En ordonnant les familles obtenues pour n croissant, on obtient deux suites $(s_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(t_p)_{p\in\mathbf{N}}$ croissantes dans $[0, L[$ et une fonction $n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ croissante tendant vers l'infini telles que :

- $s_p < t_p < t_{p+1}$;
- pour tout $r \in [s_p, t_p]$, il existe une courbe intégrale de U ayant une extrémité sur $\gamma_0([s_p, r])$ et une extrémité sur $\gamma_0([r, t_p])$, et qui est de longueur et de δ au plus $c_{n(p)}$;
- il existe $\sigma_p \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\tilde{\mu}(\{s \in [t_p, s_p] \mid \sigma_p \sin(\theta_U(s)) < 0\}) \leq c_{n(p)}$$

On fait de même en remplaçant U par V, et on obtient aussi des suites $(s'_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(t'_p)_{p\in\mathbf{N}}$ croissantes dans $[0, L[$ et une fonction $n' : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ croissante tendant vers l'infini telles que :

- $s'_p < t'_p < t'_{p+1}$;
- pour tout $r \in [s'_p, t'_p]$, il existe une courbe intégrale de V ayant une extrémité sur $\gamma_0([s'_p, r])$ et une extrémité sur $\gamma_0([r, t'_p])$, et qui est de longueur et de δ au plus $c_{n'(p)}$;
- il existe $\sigma'_p \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\tilde{\mu}(\{s \in [t'_p, s'_p] \mid \sigma'_p \sin(\theta_V(s)) < 0\}) \leq c_{n'(p)}$$

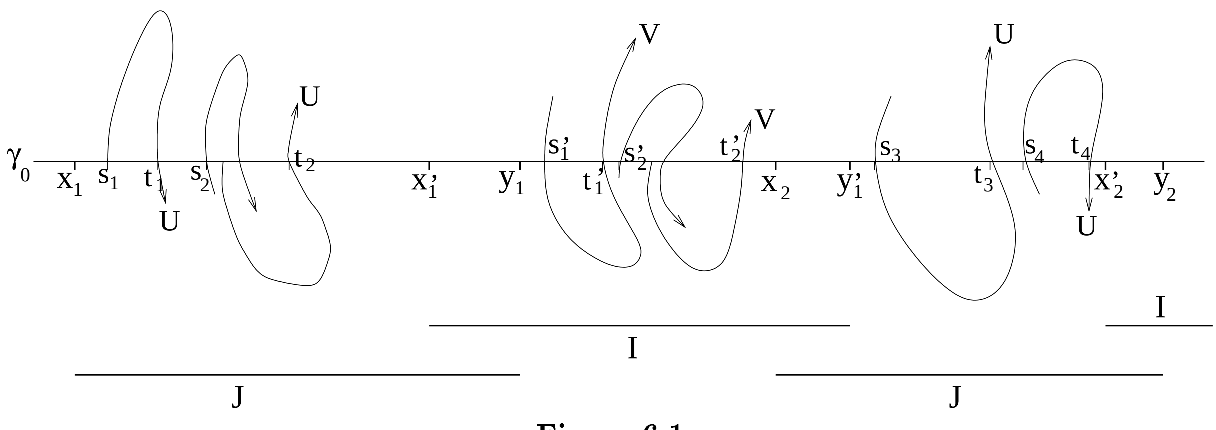

Figure 6.1

Utilisons la proposition 6.1. Comme $c_1 \leq C_8$, si $s'_q > s_p$, alors $[s_p, t_p] \cap [s'_q, t'_q] = \emptyset$, et $\tilde{\mu}([t_p, s'_q]) \geq L_8$. Ainsi, il existe deux suites $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}, (q_i)_{i\in\mathbf{N}}$ strictement croissantes d'entiers telles que :

$$\cdots < t'_{q_{i-1}} < s_{p_i} < t_{p_i} < s_{p_i+1} < t_{p_i+1} < \cdots < s_{p_{i+1}-1} <$$
$$< t_{p_{i+1}-1} < s'_{q_i} < t'_{q_i} < s'_{q_i+1} < \cdots < t'_{q_{i+1}-1} < s_{p_{i+1}} < t_{p_{i+1}} < \cdots$$

avec de plus $\tilde{\mu}([t'_{q_{i-1}}, s_{p_i}]) \geq L_8$ et $\tilde{\mu}([t_{p_{i+1}-1}, s'_{q_i}]) \geq L_8$.

Quitte à diminuer L_5, on suppose que $3L_5 < L_8$ (où L_5 provient du lemme 5.1), et on note :

$$\begin{aligned} x_i &\in [t'_{q_{i-1}}, s_{p_i}] & \text{tel que} \quad & \tilde{\mu}([t'_{q_{i-1}}, x_i]) = L_5 \\ y_i &\in [t_{p_{i+1}-1}, s'_{q_i}] & \text{tel que} \quad & \tilde{\mu}([y_i, s'_{q_i}]) = L_5 \\ x'_i &\in [t_{p_{i+1}-1}, s'_{q_i}] & \text{tel que} \quad & \tilde{\mu}([t_{p_{i+1}-1}, x'_i]) = L_5 \\ y'_i &\in [t'_{q_{i+1}-1}, s_{p_{i+1}}] & \text{tel que} \quad & \tilde{\mu}([y'_i, s_{p_{i+1}}]) = L_5 \end{aligned}$$

Puis on pose $I = \cup_i]x'_i, y'_i[$, $J = \cup_i]x_i, y_i[$.

Le lemme 5.1 montre que le point (1.) du lemme F est vérifié. Le point (2.) provient de la définition des vecteurs dirigeants dans le lemme 5.1. (3.) est une conséquence du corollaire 3.4 et de la construction de I et de J, qui montre que les intervalles maximaux de $I \cap J$ ont des $\tilde{\mu}$-mesures au moins L_5. Enfin, comme pour le premier cas encore, (4.) est une conséquence du corollaire 3.5. □

Par ailleurs, la preuve du théorème D est une conséquence des lemmes 4.1 et 5.2, qui font apparaître une suite de segments ϵ_n-pseudo-géodésiques, avec $\epsilon_n \to 0$. La courbure moyenne est "souvent grande" sur ces segments car elle est proportionnelle à $\mathrm{cotg}(\theta)$, et θ y est "souvent" petit. On utilise ensuite un argument de compacité immédiat pour trouver une sous-suite qui converge vers un segment géodésique avec les propriétés demandées.

7 Convexité

L'objectif de cette section est de montrer le lemme G, que nous rappelons ici :

LEMME G. — *Dans les conditions des théorèmes A, B et C, $(\Sigma, I\!I\!I)$ est convexe.*

On raisonne par l'absurde, on suppose donc que $(\Sigma, I\!I\!I)$ est à bord géodésique mais non convexe. Rappelons qu'on note $\tilde{\nabla}$ sa connexion de Levi-Civita. Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de segments géodésiques $\gamma_n : [0, L] \to \Sigma$ telle que $(\gamma_n(u))$ converge vers une limite $\gamma_0(u) \in \overline{\Sigma}$ pour chaque $u \in [0, L]$, et qu'il existe $u \in]0, L[$ tel que $\gamma_0(u) \in \partial_{I\!I\!I}\Sigma$, alors que $\gamma_0(0) \in \Sigma$. On note alors :

$$u_0 = \inf\{u \in [0, L] \mid \lim_{n\to\infty} \gamma_n(u) \in \partial_{I\!I\!I}\Sigma\}$$

Ainsi, $u_0 \geq d(\gamma_0(0), \partial\Sigma) > 0$. De plus, $\gamma_{0|[0,u_0[}$ est un segment géodésique de Σ tel que $\lim_{u_0} \gamma_0 \in \partial\Sigma$, on lui applique le lemme F. On obtient ainsi deux ouverts $I, J \subset [0, u_0[$ et deux familles de courbes intégrales $(g_u)_{u\in[0,u_0[}, (h_u)_{u\in[0,u_0[}$ de U et de V respectivement telles que, pour $u \in I$ (resp. $u \in J$), g_u (resp. h_u) est une $\epsilon(u)$-pseudo-géodésique de longueur $2C_0L_0$ centrée en $\gamma_0(u)$, avec $\epsilon(u) \to 0$ quand $u \to u_0$.

Il faut d'abord donner quelques résultats utiles sur la géométrie des domaines simplement connexes, suivant la géométrie de leurs bords. C'est une extension de l'assertion 3.6, et la preuve est similaire.

Assertion 7.1 *Il existe $\omega_1(K_2) > 0$ tel que, si Ω est un ouvert de Σ simplement connexe à bord régulier par morceaux, de diamètre au plus ω_1, et si $\partial\Omega = \partial_c\Omega \cup \partial_r\Omega$, avec $\partial_c\Omega$ connexe, d'intérieur non vide, et localement concave, alors il existe un champ de vecteurs unitaires W sur $\Omega \cup \partial_r\Omega$ tel que :*

- *les courbes intégrales de W sont géodésiques ;*
- *si g est une courbe intégrale de W qui arrive en un point $m \in \partial_c\Omega$, alors la géodésique orthogonale à g en m est une géodésique de support de $\partial_c\Omega$;*
- *en tout point de $\partial_r\Omega$ où W est dirigé vers l'intérieur de Ω, W est parallèle le long de $\partial\Omega$.*

Pour tout $m \in \Omega$, il existe une unique courbe régulière par morceaux joignant m à $\partial_c\Omega$ dans $\Omega \cup \partial_r\Omega$, constituée de segments intégraux de W et de morceaux de $\partial_r\Omega$ sur lesquels W est dirigé vers l'intérieur de Ω. W est donc parallèle le long de cette courbe.

Démonstration. — On considère un domaine $\Omega' \subset \Omega$ et un champ de vecteurs W' sur Ω tels que :

- W' a les propriétés demandées sur Ω' ;
- $\Omega' \subset \Omega$ est connexe, et borné par des segments de courbe intégrale de W' ;
- (Ω', W') est maximal parmi les choix possibles, i.e. si (Ω'', W'') a les mêmes propriétés, $\Omega' \subset \Omega''$ et $W' = W''$ sur Ω', alors $\Omega'' = \Omega'$.

Si ω_1 est assez petit, les géodésiques de Ω sont minimisantes, et deux géodésiques issues de $\partial_c\Omega$ ne peuvent pas se couper. Par maximalité, Ω' contient donc toutes les géodésiques issues de $\partial_c\Omega$, et dont les normales sont des droites de support à $\partial_c\Omega$. De même, il ne peut pas y avoir d'intersection entre deux courbes intégrales de W issues de points de $\partial_r\Omega$ assez proches où W est vers l'intérieur de Ω. Donc, toujours par maximalité, $\Omega' = \Omega$.

Montrons que, pour tout $m \in \Omega$, il existe une courbe s_m dans $\Omega \cup \partial_r\Omega$ joignant m à $\partial_c\Omega$, composée de courbes intégrales de W ou de segments de $\partial_r\Omega$ où W est vers l'intérieur. On note Ω' l'ensemble des $m \in \Omega$ pour lesquels une telle courbe s_m existe, on suppose $\Omega' \neq \Omega$. Alors $\partial\Omega' \setminus \partial\Omega$ est composée de segments $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de courbes intégrales de W. De plus, chacun de ces segments s_i est issu d'un point p_i de $\partial_r\Omega$ ou de $\partial_c\Omega$, ou bien est tangent à $\partial\Omega$ en un point $q_i \in \partial\Omega$. On constate alors qu'il existe des points de $\Omega \setminus \Omega'$ proches de s_i atteints par des courbes intégrales de W issues d'un point $p \in \partial\Omega$ proche de p_i ou de q_i, avec $p \in \partial_c\Omega$, ou bien $p \in \partial_r\Omega$ et W parallèle sur $\partial_r\Omega$ entre p_i et p ou entre q_i et p. Donc $\Omega' = \Omega$.

Finalement, il faut montrer que s_m est unique. Dans le cas contraire, il existerait une région $D \subset \Omega$ d'intérieur non vide, bornée par des courbes intégrales de W et par des segments de $\partial_c\Omega$ ou par des segments de $\partial_r\Omega$ où W est dirigé vers l'intérieur. ∂D ne contiendrait alors aucun point où W est dirigé vers l'extérieur, ce qui est impossible. □

On va maintenant borner l'intégrale de $\tilde{K}$ sur le domaine borné par une ϵ-pseudo-géodésique et par la courbe minimisante qui joint ses extrémités.

Proposition 7.2 *Il existe $\omega_2 > 0$ avec la propriété suivante. Soit Ω' un ouvert simplement connexe à bord régulier par morceaux dans Σ, de diamètre au plus ω_2 (au sens intrinsèque sur Ω'). Alors :*

1. *our tout $\alpha > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $\gamma : [0, L] \to \Omega'$ est une ϵ-pseudo-géodésique avec $L \leq \omega_2$, et si s est la courbe minimisante qui joint $\gamma(L)$ à $\gamma(0)$ dans Ω', alors l'intégrale de $\tilde{K}$ sur la réunion des domaines bornés par γ et par s est au plus αL.*

2. si $c : [0,L] \to \Omega'$ est une courbe à courbure géodésique $|k| \leq K_2\omega_2$, alors $L \leq 3d(c(0), c(L))$.

Démonstration. — Quitte à déformer un peu γ, on peut supposer que γ rencontre s en un nombre fini de points $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = L$. Il suffit de montrer le résultat pour les différents intervalles. On suppose donc que γ et s ne se rencontrent qu'en $\gamma(0)$ et en $\gamma(L)$. γ et s bordent donc un domaine $\Omega \subset \Omega'$. Comme s est minimisante, $\partial\Omega = \partial_c\Omega \cup \partial_r\Omega$, avec $\partial_c\Omega = \gamma([0,L])$ concave.

On applique d'abord l'assertion 7.1 à Ω, on obtient un champ de vecteurs W sur Ω, tel que $\tilde{\nabla}_W W = 0$. Ainsi, W^* est fermée, donc $W^* = dy$, où y est une fonction telle que $y = 0$ sur $\partial_c\Omega$. De plus, pour tout $t \in [0,L]$, il existe une unique courbe s_t, joignant $\gamma(t)$ à un point $m_t \in \partial_c\Omega$, composée de segments intégraux de W et de morceaux de γ où W est vers l'intérieur. On note W_γ un vecteur dirigeant de γ. Pour $t \in [0,L]$, on appelle :

- $\theta_0 := \angle(-JW, W_\gamma)$ en $\gamma(0)$;
- $\theta(t) := \angle(-JW, \gamma')$;
- $k(t)$ l'angle entre $-s'_t$ en $s(u(t))$ et le transporté parallèle de $\lim_{s\to 0^+} W(c(s))$ en $s(t)$ suivant $s([0,u(t)])$;
- $K(t)$ l'intégrale de $\tilde{K}$ sur le domaine borné par $\gamma([0,t])$, s_t et $\partial_c\Omega$ entre $\gamma(0)$ et m_t ;
- $y(t) := y(\gamma(t))$;
- $\theta_c(t) := \angle(W_\gamma, \gamma'(t))$.

Il est facile de vérifier que m_t est continue par rapport à t, et varie de manière monotone. Si m_t n'est pas localement constante en t, alors s_t est un segment de courbe intégrale de W.

De plus, $y'(t) = \sin(\theta(t))$, alors que le théorème de Gauss-Bonnet, appliqué au domaine borné par $\gamma([0,t])$, s_t et $\partial_c\Omega$ entre $\gamma(0)$ et m_t, montre que :

$$\theta(t) = \theta_0 + k(t) - K(t) + \theta_c(t)$$

Ainsi :

$$y'(t) = \sin(\theta_0 + k(t) - K(t) + \theta_c(t))$$

Soit $t_0 \in [0,L]$ un point où $y : [0,L] \to \mathbf{R}$ atteint son maximum. k est croissante, donc soit $\theta_0 + k \leq 0$ sur $[0,t_0]$, soit $\theta_0 + k \geq 0$ sur $[t_0, L]$. On suppose que $\theta_0 + k \leq 0$ sur $[0,t_0]$, sinon il suffit de remplacer $[0,t_0]$ par $[t_0,L]$ dans le raisonnement qui suit. Comme la fonction sinus est 1-lipschitzienne, on a sur $[0,t_0]$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sin((\theta_0 + k(t)) - (K(t) - \theta_c(t))) \\ &\leq \sin((\theta_0 + k(t)) + |K(t)| + |\theta_c(t))| \\ &\leq |K(t)| + |\theta_c(t))| \end{aligned}$$

Mais $|\theta_c(t)| \leq \epsilon$ sauf sur un sous-ensemble de $[0,L]$ de mesure au plus ϵ, donc :

$$\max_{[0,L]} y = y(t_0) \leq L(\max_{[0,L]} K + \epsilon) + \epsilon$$

Le même type de raisonnement permet de minorer y sur $[0,L]$. En effet, si $t_1 \in [0,L]$ est tel que $y(t_1) < 0$, alors s_{t_1} ne peut pas être composée simplement d'un segment de courbe intégrale de W joignant $\gamma(t_1)$ à $\partial_c\Omega$. Il existe donc un intervalle $[t_2,t_3] \subset [0,L]$ contenant t_1, maximal, tel que, pour tout $t \in [t_2, t_3]$, $m_t = m_{t_1}$. Ainsi, pour tout $t \in [t_2, t_3]$, $k(t) = k(t_1)$. De plus, s_{t_2} et s_{t_3} sont des segments de courbes intégrales de W, et $y(t_2) \geq 0$, $y(t_3) \geq 0$.

Supposons par exemple que $\theta_0 + k(t_1) \geq 0$ (sinon la minoration est similaire, il faut remplacer $[t_2, t_1]$ par $[t_1, t_3]$ dans ce qui suit). Alors le même calcul que plus haut montre que :

$$\begin{aligned} y(t_1) &= y(t_2) + \int_{t_2}^{t_1} y'(t)dt \\ &\geq y(t_2) + \int_{t_2}^{t_1} \sin((\theta_0 + k(t_1)) + (\theta_c(t) - K(t)))dt \\ &\geq \int_{t_2}^{t_1} -(\max_{[0,L]} K + \epsilon)dt - \epsilon \\ &\geq -L(\max_{[0,L]} K + \epsilon) - \epsilon \end{aligned}$$

si bien que :

$$\min_{[0,L]} y \geq -L(\max_{[0,L]} K + \epsilon) - \epsilon$$

Par ailleurs, quand t varie, la variation de $K(t)$ est majorée par K_2 multipliée par la variation de l'aire du domaine D_t borné par $\gamma([0,t])$, s_t et $\partial_c\Omega$ entre $\gamma(0)$ et m_t ; et la dérivée de l'aire de D_t est controlée par la longueur du segment intégral de W maximal de s_t qui arrive en $\gamma(t)$. Ce segment est de longueur au plus $\max y - \min y$. Si ω_2 est assez petit, $K(t)$ est donc lipschitzienne de rapport $2K_2 \left(\max_{[0,L]} y - \min_{[0,L]} y\right)$, si bien que :

$$\max_{[0,L]} K \leq 4K_2L^2 \left(\max_{[0,L]} K + \epsilon\right) + 4L\epsilon$$

et donc :

$$\max_{[0,L]} K \leq \frac{4K_2L^2\epsilon + 4L\epsilon}{1 - 4K_2L^2\epsilon} \tag{31}$$

On en tire le premier point.

On passe maintenant au second point. On note encore $s : [0,d] \to \Omega'$ la courbe minimisante joignant $c(0)$ à $c(L)$ dans Ω'. On veut montrer que $L \leq 3d$. Quitte à déformer un peu c, on peut supposer que c ne rencontre s qu'en $n+1$ points $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = L$. Il suffit alors de démontrer l'inégalité pour chacun de ces segments. En fait, il suffit même de la montrer en supposant que $t_i - t_{i-1} \leq 3\omega_2$; en effet, si $t_i - t_{i-1} > 3\omega_2$, alors on peut appliquer le résultat sur $[t_{i-1}, t]$, où $t = t_{i-1} + 3\omega_2$, et on voit que $d(c(t_{i-1}), c(t)) \geq \omega_2$, ce qui contredit le fait que Ω' est de diamètre inférieur à ω_2.

Pour simplifier un peu les notations, on va montrer l'inégalité pour $i = 0$, donc pour l'intervalle $[t_0, t_1] = [0, t_1]$. $c([0,t_1])$ rencontre s en $c(0) = s(0)$ et $c(t_1) = s(u_1)$ seulement ; $s([0,u_1])$ et $c([0,t_1])$ délimitent un domaine simplement connexe Ω_0, et $\partial\Omega_0$ est concave le long de s. On peut appliquer l'assertion 7.1 à Ω_0, on obtient un champ de vecteurs W sur $\Omega_0 \setminus s$ dont les courbes intégrales sont géodésiques et "orthogonales" à s, et qui est parallèle sur les segments de c sur lesquels W est vers l'intérieur. Pour tout $t \in [0,t_1]$, il existe une unique courbe s_t joignant $c(t)$ à $s([0,u_1])$ dans $\Omega_0 \cup c([0,t_1])$, formée de segments intégraux de W et de segments de c sur lesquels W est vers l'intérieur. Soit y la fonction telle que $Dy = W$ et que $y = 0$ sur s.

On reprend les notations de la première partie de la preuve, en remplaçant γ par c. Pour $t \in [0,t_1]$, on note encore $\kappa(t)$ l'intégrale de la courbure géodésique de c sur $[0,t]$. Ainsi, $|k'(t)| \leq K_2\omega_2$.

On remarque alors que :

$$y'(t) = \sin(\theta(t)) \tag{32}$$

alors que le théorème de Gauss-Bonnet, appliqué au domaine borné par $c([0,t])$, $s([0,u(t)])$ et s_t montre que :

$$\theta(t) = \theta_0 + k(t) + \kappa(t) - K(t) \tag{33}$$

Soit y_M le maximum de y sur $[0,t_1]$, et soit $t_M \in [0,t_1]$ tel que $y(t_M) = y_M$. Alors $y'(t_M) = 0$, donc $\theta(t_M) = 0$, et $\kappa(t_M) \geq -K_2\omega_2 t_M$. Ainsi :

$$0 \geq \theta_0 - K_2\omega_2 t_M + k(t_M) - K(t_M)$$

et donc :

$$\theta_0 + k(t_M) \leq K_2\omega_2 t_M + K(t_1) \tag{34}$$

Mais, pour tout $t \in [0,t_M]$, on a :

$$y'(t) \leq \max(0,\theta(t)) \leq \theta_0 + k(t_M) + K_2\omega_2 t_M \tag{35}$$

si bien que, comme $t_M \leq t_1 \leq 3\omega_2$:

$$\begin{array}{rcl} y_M = y(t_M) & \leq & (\theta_0 + k(t_M))t_M + K_2\omega_2 t_M^2 \\ & \leq & (K_2\omega_2 t_M + K(t_1))t_M + K_2\omega_2 t_M^2 \\ & \leq & (3K_2\omega_2^2 + K(t_1))3\omega_2 + 9K_2\omega_2^3 \\ & \leq & 18K_2\omega_2^3 + 3K(t_1)\omega_2 \end{array}$$

Soit maintenant $y_m := \min_{[0,t_1]} y$ et t_m tel que $y(t_m) = y_m$, il existe alors $t_- \in [0,t_m]$ et $t_+ \in [t_m,t_1]$ tels que $y(t_-) \geq 0$, $y(t_+) \geq 0$, et $y'(t_-) = y'(t_+) = 0$. En appliquant le même raisonnement que pour y_M mais sur $[t_-,t_+]$, on trouve que :

$$y_m = y(t_m) \geq -18K_2\omega_2^3 - 3K(t_1)\omega_2$$

Par ailleurs, le même raisonnement que dans la première partie de la preuve montre que, si ω_2 est assez petit, on a :

$$K'(t) \leq 2K_2(y_M - y_m)$$

si bien que :

$$K(t_1) \leq 2(36K_2^2\omega_2^3 + 6K(t_1)K_2\omega_2)t_1 \leq 72K_2^2\omega_2^3 t_1 + 12K(t_1)K_2\omega_2(3\omega_2)$$

Si ω_2 est assez petit, on en tire que :

$$K(t_1) \leq \frac{72K_2^2\omega_2^3}{1 - 36K_2\omega_2^2} t_1 \leq t_1$$

Toujours pour ω_2 assez petit, on en déduit en utilisant (34) que :

$$\theta_0 + k(t_M) \leq K_2\omega_2 t_M + K(t_1) \leq 6\omega_2 \leq \pi/8$$

(33) montre alors que, pour tout $t \in [0,t_M]$:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{4} \tag{36}$$

et on voit aussi que $k(t_M) \leq 2t_1$.

Le même résultat s'applique de manière symétrique sur $[t_M, t_1]$, si bien que (36) est valide pour tout $t \in [0, t_1]$, et que $k(t_1) \leq 4t_1$.

On déduit en particulier de (36) que c est un "graphe" au-dessus de s, i.e. les s_t sont des segments de courbes intégrales de W. Un raisonnement élémentaire montre alors que (si ω_2 est assez petit) :

$$u'(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta(t) - y(t)k'(t)$$

si bien que, avec (36) :

$$u'(t) \geq \frac{1}{2} - y_M k'(t)$$

Ainsi :

$$u_1 \geq \frac{t_1}{2} - 4y_M t_1$$

et donc, si ω_2 est assez petit, on a bien $3u_1 \geq t_1$. □

On va aussi utiliser un "feuilletage" des domaines simplement connexes par les courbes minimisantes vers un point fixé.

Proposition 7.3 *Il existe $\omega_4 > 0$ ($\omega_4 \leq \omega_2$) et une fonction $\eta : [0, \omega_4] \to \mathbf{R}_+$ continue s'annulant en 0, avec les propriétés suivantes. Soit Ω un domaine simplement connexe à bord régulier par morceaux de Σ, et soit $m_0 \in \Omega$ à distance $r(m) \leq \omega_4$ de tous les $m \in \Omega$ (pour la distance intrinsèque d de Ω). Alors :*

1. *pour tout m dans l'intérieur de Ω, il existe une unique courbe s_m de longueur $d(m_0, m)$ joignant m_0 à m. s_m est C^1 par morceaux, et géodésique en dehors de ses points de contact avec $\partial\Omega$;*

2. *si X_0 est un vecteur unitaire en m_0, et si X en $m \in \Omega$ est le transporté parallèle de X_0 en m suivant s_m, alors X est lipschitz de rapport $K_2 d(m_0, m)$;*

3. *si $Y := JX$, il existe deux fonctions λ et μ presque partout continues sur Ω telles que :*

$$|\lambda(m) - 1| \leq \eta(r(m)) \ , \ |\mu(m) - 1| \leq \eta(r(m))$$

et telles que λX^* et μY^* admettent des "primitives" x et y sur Ω.

Ici, x est une primitive de λX^* au sens où, pour toute courbe régulière $\gamma : [0, 1] \to \Omega$, $x(\gamma(1)) - x(\gamma(0)) = \int_0^1 \langle \lambda X, \gamma'(s) \rangle ds$. X est lipschitz, au sens où l'angle entre X en $\gamma(1)$ et le transporté parallèle en $\gamma(1)$ de X en $\gamma(0)$ suivant $\gamma([0, 1])$ est majoré par une constante multipliée par la longueur de γ. Cela implique que X est presque partout différentiable.

Démonstration. — On montre facilement que, pour chaque couple (m, m') de points de Ω, il existe un chemin s qui les joint et qui est de longueur $d(m, m')$. Supposons que ce chemin n'est pas toujours unique. Soit $(m_n, m'_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de couples pour lesquels le chemin minimisant n'est pas unique, et tels que $d(m_n, m'_n)$ tend vers la borne inférieure des valeurs possibles. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $m_n \to m_\infty$ et que $m'_n \to m'_\infty$. Un raisonnement classique montre qu'alors :

- soit il existe deux courbes minimisantes joignant m_∞ à m'_∞, qui sont dans des directions opposées en m_∞ et en m'_∞ ;

- soit il existe un unique chemin minimisant s_∞ joignant m_∞ à m'_∞, et un champ de vecteurs v régulier par morceaux le long de s_∞, qui s'annule en m_∞ et en m'_∞, et qui induit une variation nulle de la longueur de s_∞ au premier et au second ordre.

Dans le premier cas, par simple connexité de Σ, les deux chemins en question forment (ensemble) une courbe fermée concave de Ω, de longueur au plus $2\omega_4$. D'après le théorème de Gauss-Bonnet, cette courbe borne un domaine concave. Mais, si ω_4 est assez petit, une telle courbe ne peut pas exister (parce que m_0 est à distance au plus ω_4 de tous les points de Ω).

Dans le second cas, v doit s'annuler aux points où s_∞ n'est pas géodésique (sans quoi la variation de longueur de s_∞ induite par v au premier ordre ne serait pas nulle). Il doit donc exister deux points conjugués le long d'un segment de s_∞ qui est dans l'intérieur de Ω. C'est impossible si ω_4 est assez petit. On a donc montré que, si ω_4 est assez petit, il existe un unique chemin minimisant s_m joignant m_0 à chaque point $m \in \Omega$.

Il est clair que s_m est géodésique dans l'intérieur de Ω ; s_m est donc C^1 en dehors des points de $\partial\Omega$ où $\partial\Omega$ n'est pas C^1, donc s_m est C^1 par morceaux.

On passe maintenant au second point. Pour tout $m \in \overline{\Omega}$, on note Dr le vecteur unitaire en m dans la direction de s_m (Dr est aussi le gradient de la distance à m_0). Dr est un champ de vecteurs continu sur Ω, et différentiable sauf aux points m tels que s_m est tangent à $\partial\Omega$. Par définition, $\tilde{\nabla}_{Dr}X = 0$.

La variation de X quand on se déplace dans la direction JDr est donnée par le théorème de Gauss-Bonnet, appliqué à des triangles dont un coté est une "petite" courbe intégrale c de JDr et les autres sont des courbes intégrales s et s' de Dr. Comme $\tilde{K} \leq K_2$ et le diamètre de Ω est petit, les aires de ces triangles sont majorées par $L(c).L(s)$. On en déduit le second point.

Pour le troisième point, on définit une fonction ω sur Ω comme suit. Soit $m \in \Omega$. On note $\gamma : [0, M_r[\rightarrow \Omega$ la courbe intégrale de JDr issue de m. Pour t assez petit, on note $D(t)$ le domaine de Ω borné par s_m, $s_{r(t)}$ et $\gamma([0,t])$, puis on pose :

$$\omega(m) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_{D(t)} \tilde{K} da$$

Ainsi, ω est continue sauf aux points m tels que s_m est tangente à $\partial_{I\!I\!I}\Sigma$. En dehors de ces points, le théorème de Gauss-Bonnet montre que :

$$\omega = -\langle \tilde{\nabla}_{JDr}X, Y \rangle \tag{37}$$

et la définition de ω indique que :

$$|\omega| \leq K_2 d(m_0, m) \tag{38}$$

Soit λ et μ deux fonctions différentiables le long des courbes intégrales de Y et de X respectivement. λX^* et μY^* admettent des primitives x et y si et seulement si :

$$d\lambda(Y) = \omega\lambda dr(Y) \ , \ d\mu(X) = -\omega\mu dr(X) \tag{39}$$

Pour le vérifier, on remarque que λX^* admet une primitive si et seulement si son intégrale sur chaque "carré" dont les cotés sont des courbes intégrales de X ou de Y est nulle. L'intégrale de λX^* sur les courbes intégrales de Y étant nulle, il suffit que les intégrales sur les courbes intégrales de X se "compensent", donc que la variation de λ le long des courbes intégrales de

Y compense la variation de la longueur, le long des courbes intégrales de X, entre les points d'intersections avec des courbes intégrales fixées de Y. Ceci se traduit par :

$$d\lambda(Y) - \lambda\langle\tilde{\nabla}_Y X, Y\rangle = 0$$

donc, d'après (37), par :

$$d\lambda(Y) + \lambda\omega\langle Y, JDr\rangle = 0$$

d'où (39) pour λ. L'argument est presque le même pour μ.

Pour définir λ, on considère les courbes intégrales de Y. Chacune à une courbure géodésique bornée par $K_2\omega_4$ d'après (38), et la seconde assertion de la proposition 7.2 montre qu'elles sont de longueur au plus $3\omega_4$. Soit c_Y l'une de ces courbes ; on remarque que la distance de c_Y à m_0 est réalisée en un unique point $m_1 \in c_Y$. En effet, si s_m est la courbe minimisante joignant $m \in c_Y$ à m_0, il est facile de vérifier que (pour ω_4 assez petit) la distance entre m_0 et m est une fonction convexe sur c_Y. De plus, m_1 dépend continuement de c_Y. On définit alors λ sur c_Y par $\lambda(m_1) = 1$ et par (39). Par définition, λ est différentiable le long des courbes intégrales de Y.

Soit $m \in c_Y$, tel que la longueur de c_Y entre m_1 et m est t. Alors :

$$d(m_1, m) \leq d(m_1, m_0) + d(m_0, m) \leq 2d(m_0, m)$$

Ainsi, $t \leq 3d(m_0, m)/2$, donc $|\log(\lambda(m))| \leq 3K_2\omega_4 d(m_0, m)/2$, ce qui implique les contrôles annoncés sur λ. Les résultats analogues pour μ sont obtenus de la même manière, mais pour les courbes intégrales de X. □

On utilisera aussi le corollaire suivant de cette proposition, qui concerne le cas où Ω n'est plus exactement un domaine de Σ à bord régulier par morceaux, mais où au contraire $\partial\Omega$ peut rencontrer $\partial\Sigma$.

COROLLAIRE 7.4 *Soit $\Omega \subset \Sigma$ simplement connexe, et soit $m_0 \in \Omega$. Supposons qu'il existe un segment géodésique c_0 issu de m_0 dans $\overline{\Omega}$ (i.e. c_0 est limite d'une suite de segments géodésiques c_n dans l'intérieur de Ω qui ont une extrémité en m_0) tel que $\partial\Omega \setminus c_0$ est une courbe (pas nécessairement connexe) régulière par morceaux de Σ. Alors la conclusion de la proposition 7.3 s'applique aussi à Ω.*

DÉMONSTRATION. — Les c_n sont des segments géodésiques dans Ω ; si ω_4 est assez petit, ils sont minimisants entre m_0 et chacun de leurs points. On en déduit que c_0 est aussi minimisant entre m_0 et chacun de ses points. En effet, sinon, il existerait $m \in c_0 \setminus \{m_0\}$ tel que la distance d_0 entre m et m_0 sur c_0 est $d(m, m_0) + \epsilon$, avec $\epsilon > 0$. Mais il existerait une suite (m_n) convergeant vers m, avec $m_n \in c_n$ et $d(m_0, m) \to d_0 + \epsilon$. Pour n assez grand, on aurait $d(m, m_n) \leq \epsilon/2$, d'où $d(m_0, m_n) \leq d(m_0, m) + d(m, m_n) \leq d_0 + \epsilon/2$, ce qui est impossible. Donc c_0 est minimisante entre m_0 et chacun de ses points.

On suppose maintenant que c_0 est maximal, c'est à dire qu'on ne peut pas le prolonger en un "segment géodésique" au sens qu'on a défini. On note Ω_0 la composante connexe de $\Omega \setminus c_0$ dont l'adhérence contient m_0, et $(\Omega_i)_{i\in\mathcal{I}}$ les autres composantes connexes de $\Omega \setminus c_0$.

On raisonne d'abord sur les $\Omega_i, i \in \mathcal{I}$. Chaque Ω_i est simplement connexe. Pour chaque i, soit m_i le point de $c_0 \cap \overline{\Omega_i}$ le plus proche de m_0. Pour $m \in \Omega_i$, on définit s_m comme la courbe constituée du segment de c_0 entre m_0 et m_i, et de la courbe minimisante dans Ω_i entre m_i et m. Comme c_0 est minimisante entre m_0 et m_i, on vérifie que, pour chaque $m \in \Omega_i$, la longueur de s_m est égale à la distance entre m_0 et m.

On peut donc appliquer la construction utilisée dans la preuve de la proposition précédente, mais en définissant X et Y dans Ω_i à partir de m_i. On définit d'abord X et Y sur c_0 par transport parallèle le long des c_n, et en prenant la limite quand $n \to \infty$; puis on définit X et Y sur Ω_i à partir de m_i. Il est clair que X et Y sont alors continus sur c_0, et ils restent donc lipschitziens sur Ω.

On étudie maintenant Ω_0. On a supposé que c_0 est maximal, donc :

$$\Omega_0 = \cup_{n\in\mathbf{N}}\Omega_n$$

où Ω_n est égal à Ω_0 privé du "secteur angulaire" bordé par c_0 et par c_n. On peut appliquer la proposition 7.3 à Ω_n, et on obtient des champs de vecteurs X et Y ; de plus, commme les c_n sont minimisantes, les courbes minimisantes entre un point $m \in \Omega_0 \setminus \Omega_n$ et m_0 ne rencontrent pas c_n, si bien que les champs obtenus pour $m > n$ coïncident avec les champs correspondant à n. On a donc des champs de vecteurs X et Y sur Ω_0 lipschitziens comme annoncé dans l'énoncé.

Puis on définit λ et μ encore comme dans la preuve de la proposition précédente, et on obtient à nouveau des fonctions presque partout continues (hors des courbes intégrales de Y et de X respectivement qui sont tangentes à $\partial\Omega$) et telles que λX^* et μY^* admettent des primitives x et y. □

On suppose maintenant que Ω est le domaine décrit dans la proposition 7.3, et que $c : [0, L] \to \Omega$ est une ϵ-pseudo-géodésique de vecteur dirigeant W. On note $t_0 := d(c(0), m_0)$, et on appelle x et y les primitives de λX^* et de μY^* qui s'annulent en m_0.

Proposition 7.5 *Il existe $\omega_5 > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in]0, 1]$, il existe $\epsilon_\alpha > 0$ tel que, si $\epsilon \le \epsilon_\alpha$, $L \le \omega_5$, et si on note $\theta(t)$ l'angle entre X et W en $c(t)$ et $\theta_0 = \theta(0)$, alors, pour tout $t \in [0, L]$:*

$$(1-\eta(t+t_0))t\cos(\theta_0) - K_2t_0t^2 - 2\epsilon - 2\alpha t^2 \le x(t) - x(0) \le$$
$$\le (1+\eta(t+t_0))t\cos(\theta_0) + K_2t_0t^2 + 2\epsilon + 2\alpha t^2 \quad (40)$$

$$(1-\eta(t+t_0))t\sin(\theta_0) - K_2t_0t^2 - 2\epsilon - 2\alpha t^2 \le y(t) - y(0) \le$$
$$\le (1+\eta(t+t_0))t\sin(\theta_0) + K_2t_0t^2 + 2\epsilon + 2\alpha t^2 \quad (41)$$

Démonstration. — Montrons d'abord la majoration de (40), la minoration correspondante est très similaire. Pour tout $s \in [0, t]$, on note $\theta_c(s) := \angle(W, c'(t))$. Alors :

$$x'(s) = \lambda(c(s))\cos(\theta(s) + \theta_c(s))$$

Mais le théorème de Gauss-Bonnet montre que :

$$|\theta(s) - \theta_0| \le K(s)$$

où $K(s)$ est l'intégrale de $\tilde{K}$ sur le domaine borné par $c([0, s])$ et par les courbes minimisantes $s_{c(0)}$ et $s_{c(s)}$ entre m_0 d'une part et $c(0)$ et $c(s)$ d'autre part.

La proposition 7.2 montre que, si ϵ_α est assez petit, l'intégrale de $\tilde{K}$ sur le domaine borné par $c([0, s])$ et par la courbe minimisante m_s entre $c(0)$ et $c(s)$ est au plus αs ; par ailleurs, l'aire du "triangle" de cotés $s_{c(0)}, m_s$ et $s_{c(s)})$ est majorée par t_0t (si ω_5 est assez petit), et l'intégrale de $\tilde{K}$ sur ce triangle est donc au plus K_2t_0t. Ainsi, $|\theta(s) - \theta_0| \le \alpha s + K_2t_0t$.

Comme c est une ϵ-pseudo-géodésique, on a :

$$|\theta_c(u)| \le \epsilon$$

sauf sur un ensemble $U \subset [0,t]$, qui est de mesure au plus ϵ. Ainsi :

$$|x'(s)| \leq \lambda(c(s)) \tag{42}$$

sur U, alors que, pour $s \in [0,t] \setminus U$:

$$|x'(s) - \lambda(c(s))\cos(\theta_0)| \leq \lambda(c(s))(\epsilon + |\theta(s) - \theta_0|)$$

D'après la proposition 7.3, $\lambda(c(s))$ est compris entre $1-\eta(t)$ et $1+\eta(t)$ et, si ω_5 est assez petit, on peut supposer que $|\eta(t)| \leq 1/2$ pour $t \leq \omega_5$. On voit ainsi que, pour tout $s \in [0,t] \setminus U$:

$$|x'(s) - \lambda(c(s))\cos(\theta_0)| \leq 2(\epsilon + \alpha s + K_2 t_0 t) \tag{43}$$

En intégrant (42) et (43), on trouve que :

$$x(t) \leq (1+\eta(t))t\cos(\theta_0) + 2\epsilon t + \alpha t^2 + \epsilon + K_2 t_0 t^2$$

Si ϵ_α est assez petit, on a $2\epsilon t \leq \alpha t^2 + \epsilon$, et la majoration de x suit. La minoration est obtenue de la même manière, et le même raisonnement montre aussi (41). □

On revient maintenant dans le cadre décrit au début de la section, on va considérer des domaines particuliers attachés à γ_0.

Définition 7.6 *Soit $u_1, u_2 \in [0, u_0[$ et $d > 0$. On note :*

$$\Omega(u_1,u_2;d) = \left(\bigcup_{u\in[u_1,u_2]\cap I} g_u([-d,d])\right) \cup \left(\bigcup_{u\in[u_1,u_2]\cap J} h_u([-d,d])\right)$$

$\Omega(u_1,u_2;d)$ ne rencontre pas $\partial_{I\!I\!I}\Sigma$; et, si u_1, u_2 sont assez proches de u_0 et $d \leq \omega_5/3$, $\Omega(u_1,u_2;d)$ est de diamètre au plus ω_5. Par contre, $\Omega(u_1,u_2;d)$ n'est pas très adapté aux constructions qui vont suivre, parce qu'il n'a pas de raison d'être simplement connexe. Ceci nous conduit à introduire un objet analogue mais simplement connexe. On utilisera pour cela la proposition suivante.

Proposition 7.7 *Soit $\Omega_1, \cdots, \Omega_N$ des ouverts simplements connexes d'une surface Σ. Pour $1 \leq i \leq N$, soit $\Omega_{i,0} \subset \Omega_i$ un ouvert tel que $\Omega_0 := \cup_i \Omega_{i,0}$ soit simplement connexe. Notons $\tilde{\Omega}$ le relevé universel de $\cup_i \Omega_i$, et $\pi : \tilde{\Omega} \to \cup_i \Omega_i$ la projection canonique. Choisissons une composante connexe $\overline{\Omega}_0$ de $\pi^{-1}\Omega_0$, et appelons $\overline{\Omega}_i$ la composante connexe de $\pi^{-1}\Omega_i$ contenant $(\pi^{-1}\Omega_{i,0}) \cap \overline{\Omega}_0$. Alors $\overline{\Omega} := \cup_i \overline{\Omega}_i$ est une surface simplement connexe à bord régulier par morceaux.*

Démonstration. — En raisonnant par récurrence, on voit qu'il suffit de montrer la proposition pour $N = 2$. Dans ce cas, $\overline{\Omega}_1$ et $\overline{\Omega}_2$ sont des ouverts simplement connexes dont la réunion est simplement connexe, donc $\overline{\Omega}$ est simplement connexe. □

On peut maintenant définir le domaine simplement connexe analogue à $\Omega(u_1,u_2;d)$ qu'on utilisera. On écrit pour cela $I \cap [u_1,u_2]$ (resp. $J \cap [u_1,u_2]$) comme une réunion finie d'intervalles ouverts disjoints, $I \cap [u_1,u_2] = \cup_i I_i$ (resp. $J \cap [u_1,u_2] = \cup_j J_j$). Pour chaque i, on pose : $\Omega_i = \cup_{u\in I_i} g_u([-d,d])$, et $\Omega_{i,0}$ est un ϵ'-voisinage de γ_0 dans Ω_i (pour ϵ' assez petit). De même, $\Omega'_j = \cup_{u\in J_j} h_u([-d,d])$, et $\Omega'_{j,0}$ est une ϵ'-voisinage de γ_0 dans Ω'_j. Puis on pose :

$$\overline{\Omega}(u_1,u_2;d) := \left(\cup_i \overline{\Omega}_i\right) \cup \left(\cup_j \overline{\Omega}_j\right)$$

On va considérer sur $\overline{\Omega}(u_1, u_2; d)$ les objets géométriques relevés de ceux dont on dispose sur $\Omega(u_1, u_2; d)$, i.e. la métrique, les champs de vecteurs U et V, etc ; on utilisera les mêmes notations sur $\overline{\Omega}(u_1, u_2; d)$ pour les objets relevés.

On choisit un vecteur unitaire Y en $m_0 := \gamma_0(u_1)$, et on considère le champ de vecteurs Y sur $\overline{\Omega}(u_1, u_2; \omega_5/3)$ qui lui est associé par transport parallèle le long des courbes minimisantes vers m_0, suivant la proposition 7.3. On note θ_Y l'angle entre γ_0' et Y le long de $\gamma_0([u_1, u_2])$. y est encore la primitive de μY^* qui s'annule en m_0.

COROLLAIRE 7.8 *Il existe $\beta_1 > 0$ et $y_M > 0$ tel que, pour tout $y_1 \leq y_M$, il existe $T_1(y_1) > 0$ tels que, si $u_2 - u_1 \leq \beta_1$, alors, pour tout $u \in [u_1, u_2] \cap I$, si $\epsilon(u) \leq \beta_1$ et $|\theta_g(u) - \theta_Y| \leq \beta_1$, alors $y(g_u(T_1)) - y(g_u(0)) \geq y_1 - 3\epsilon(u)$. De plus, $\lim_{y_1 \to 0} T_1(y_1) = 0$.*

DÉMONSTRATION. — g_u est une $\epsilon(u)$-pseudo-géodésique, donc il suffit d'utiliser la minoration de (41). □

La même chose est bien sûr vraie pour les h_u quand $u \in J$. On va en déduire en particulier dans la proposition suivante que les angles $\theta_g(u)$ ne peuvent pas varier trop rapidement. Ceci n'est possible que parce qu'on a évité les situations trop pathologiques grâce au corollaire précédent. Dans la proposition suivante, β_1 vient du corollaire précédent, et $\epsilon(s)$ du lemme F.

PROPOSITION 7.9 *Pour tout $c_2 > 0$, il existe $\epsilon_2 > 0$ tel que si $u_1, u_2 \in I$ avec:*

- $u_0 > u_2 \geq u_1 \geq u_0 - \epsilon_2$;
- *pour tout $s \in [u_1, u_2]$, $\epsilon(s) \leq \epsilon_2$;*
- *pour tout $s \in [u_1, u_2] \cap I$, $|\theta_g(s) - \theta_Y| \leq \beta_1$;*
- *il existe θ_Y tel que, pour tout $s \in [u_1, u_2] \cap I$, $|\theta_g(s) - \theta_Y| \leq \beta_1$, et, pour tout $s \in [u_1, u_2] \cap J$, $|\theta_h(s) - \theta_Y| \leq \beta_1$;*

alors $|\theta_g(u_2) - \theta_g(u_1)| \leq c_2$.

DÉMONSTRATION. — On considère d'abord le cas où g_{u_1} et g_{u_2} ne sont pas disjointes. D'après le point (4.) du lemme F, on peut alors supposer que $\gamma_0(u_2) = g_{u_1}(t_d)$, avec $|t_d| \leq \phi(\epsilon_2)$, où $lim_0 \phi = 0$. Alors pour tout $t \in [0, \omega_5/3 - t_d]$, $g_{u_2}(t) = g_{u_1}(t + t_d)$, si bien que, si $|t_d|$ est petit, x et y sont très proches sur g_{u_2} et sur g_{u_1}. On applique alors l'assertion 7.5 à $\overline{\Omega}(u_1, u_2; d)$ et on constate que, si $|t_d|$ est petit, $|\theta_g(u_2) - \theta_g(u_1)|$ doit être petit, ce qui implique la proposition.

Supposons maintenant que g_{u_1} et g_{u_2} sont disjointes. Fixons $\epsilon_2 > 0$ qu'on rendra petit par la suite. Soit $y_1 \in]3\epsilon_2, y_M]$. Considérons :

$$\overline{\Omega}' = \{m \in \overline{\Omega}(u_1, u_2; \omega_5/3) \mid y(m) \leq y_1 - 3\epsilon_2\}$$

$\overline{\Omega}(u_1, u_2; \omega_5/3)$ est simplement connexe et $dy \neq 0$, donc chaque composante connexe de $\overline{\Omega}'$ est simplement connexe. De plus, d'après le corollaire 7.8, $g_{u_1}([0, T_1(y_1)])$ et $g_{u_2}([0, T_1(y_1)])$ sortent de $\overline{\Omega}'$. On peut donc considérer la composante connexe de $\overline{\Omega}'$ délimitée par $g_{u_1}([0, T_1(y_1)])$, $g_{u_2}([0, T_1(y_1)])$ et $\gamma_0([u_1, u_2]))$, on la note $\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3)$.

Par définition de $\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3)$, $\partial\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3)$ peut se décomposer en quatre réunions de segments :

$$\begin{aligned}
\partial_0(y_1) &= \partial\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3) \cap \gamma_0([u_1, u_2]) \\
\partial_1(y_1) &= \partial\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3) \cap g_{u_1}([0, T_1]) \\
\partial_2(y_1) &= \partial\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3) \cap g_{u_2}([0, T_1]) \\
\partial_+(y_1) &= \partial\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3) \setminus (\partial_0(y_1) \cup \partial_1(y_1) \cup \partial_2(y_1))
\end{aligned}$$

Un point important est qu'il existe $y_2 > 0$ ($y_2 \leq y_M$, où y_M provient du corollaire 7.8) tel que, si $y_1 \leq y_2$, alors $y = y_1 - 3\epsilon_2$ sur $\partial_+(y_1)$. En d'autres termes, les points de $\partial_+(y_1)$ correspondent à la valeur maximale de y, et non pas à des g_u ou des h_v pour $u \in \partial I$ ou $v \in \partial J$.

Pour le montrer, on note :

$$y_i = \inf\{y(m), m \in \partial_+(y_1)\}$$

On raisonne par l'absurde, et on suppose que $y_i < y_1 - 3\epsilon - 2$. Il existe $m_i \in \partial\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3)$ tel que $y(m_i) = y_i$. Ainsi, $m_i \in g_u([0, T_1])$, pour un $u \in \partial I$ (ou bien $m_i \in h_v([0, T_1])$, pour un $v \in \partial J$). D'après l'assertion 7.5, g_u (resp. h_v) atteint m_i après avoir parcouru une distance t qui est petite si y_2 est petit. Le point (3.) du lemme F montre alors que $m_i \in h_J([-C_0 t - \epsilon_2, C_0 t + \epsilon_2])$ (resp. $m_i \in g_I([-C_0 t - \epsilon_2, C_0 t + \epsilon_2])$). Dans les deux cas, m_i est dans l'intérieur de $\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3)$, ce qui est exclu. Ainsi, $y = y_1 - 3\epsilon_2$ sur $\partial_+(y_1)$.

$\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3)$ est simplement connexe et $\partial_+(y_1) \cap \partial_0(y_1) = \partial_1(y_1) \cap \partial_2(y_1) = \emptyset$. De plus, $\partial_0(y_1)$ est connexe. On en déduit que $\partial_+(y_1)$ contient exactement un segment $s_+(y_1)$ qui joint un point de $g_{u_1}([0, T_1])$ à un point de $g_{u_2}([0, T_1])$, sans quoi g_{u_1} devrait rencontrer g_{u_2} dans $\overline{\Omega}_{y_1}(u_1, u_2; \omega_5/3)$, ce qui est exclu ($\partial_+(y_1)$ peut aussi contenir des segments joignant deux points de $\partial_1(y_1)$ ou bien deux points de $\partial_2(y_1)$). Comme $y = y_1 - 3\epsilon_2$ sur $s_+(y_1)$, dx ne s'y annule pas ; on en déduit que, pour tout $y_1 \in]3\epsilon_2, y_2]$, il existe $m_1 = g_{u_1}(t_1)$ et $m_2 = g_{u_2}(t_2)$ (pour $t_1, t_2 \in [0, T_1(y_1)]$) tels que :

$$y(m_1) = y(m_2) = y_1 - 3\epsilon_2 \ \text{ et } \ x(m_1) < x(m_2) \tag{44}$$

On choisit maintenant $\alpha > 0$, et on suppose que ϵ_2 est plus petit que le ϵ_α qui lui est associé par la proposition 7.5. D'après (41), on doit avoir :

$$y_1 - 3\epsilon_2 = y(g_{u_1}(t_1)) \leq (1 + \eta(t_1))t_1 \sin(\theta_g(u_1)) + 2\alpha t_1^2 + 2\epsilon_2$$

On en tire une minoration de t_1 ; par contre (en ajoutant les termes correspond à $y(\gamma_0(u_2))$, qui n'est pas nul ici) :

$$(1 - \eta(t_2 + (u_2 - u_1)))t_2 \sin(\theta_g(u_2)) - K_2(u_2 - u_1)t_1^2 - 2\alpha t_2^2 - 2\epsilon_2 + y(g_{u_2}(0)) \leq y(g_{u_2}(t_2)) = y_1 - 3\epsilon_2$$

Si $T_1(y_1)$ est assez petit (donc si y_1 est assez petit), comme $t \in [0, T_1(y_1)]$ on en déduit une majoration de t_2.

De manière similaire, (40) montre que :

$$\begin{aligned}(1 - \eta(t_1)t_1 \cos(\theta_g(u_1)) - 2\alpha t_1^2 - 2\epsilon_2 \leq x(g_{u_1}(t_1)) < \\ < x(g_{u_2}(t_2)) \leq (1 + \eta(t_1 + (u_2 - u_1))t_2 \cos(\theta_g(u_2)) + K_2(u_2 - u_1)t_1^2 + 2\alpha t_2^2 + 2\epsilon_2 + x(g_{u_2}(0))\end{aligned}$$

Si $\theta_g(u_2) > \theta_g(u_1) + c_2$, ces inégalités sont incompatibles, pour α et ϵ_2 assez petit, avec la minoration de t_1 et la majoration de t_2 obtenus grâce à y.

En répétant la même preuve, mais avec U et V remplacés par $-U$ et par $-V$, on montre de la même manière qu'on ne peut pas avoir $\theta_g(u_1) > \theta_g(u_2) + c_2$. □

On peut voir maintenant que les "directions" des courbes g_u et h_u convergent en u_0 :

LEMME 7.10 *Si $u_0 \in \overline{I}$, alors $\theta_g(u)$ tend vers une limite θ_L quand $u \to u_0$, $u \in I$. De même, si $u_0 \in \overline{J}$, alors $\theta_h(u) \to \theta_L$ quand $u \to u_0, u \in J$.*

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la proposition précédente et de la condition (2.) du lemme F. □

On va maintenant raisonner différemment suivant que $\theta_L = 0$ ou que $\theta_L \in]0, \pi[$; les autres cas s'en déduisent par symétrie. On va d'abord exclure le cas où $\theta_L = 0$.

On raisonne pour cela par l'absurde, et on suppose que $\theta_L = 0$. On suppose aussi que $u_0 \in \overline{I}$, sinon il faut remplacer les g_v par les h_v dans la suite de cette démonstration. On peut choisir $u_1 \in [0, u_0[$ tel que, pour tout $u \in [u_1, u_0[$, on ait $|\theta_g(u) - \theta_L| \leq \beta_1$ si $u \in I$, et $|\theta_h(u) - \theta_L| \leq \beta_1$ si $u \in J$.

Soit $u_2 \in [u_1, u_0[\cap I$. Le point (4.) du lemme F montre qu'on peut supposer (quitte à bien choisir u_2) que :

$$g_{u_2}([-\omega_5/3, \omega_5/3]) \cap \gamma_0(]u_2, u_0[) = \emptyset$$

On choisit $u_3 \in]u_2, u_0[$, et on pose :

$$2\epsilon_m = d(\gamma_0([u_3, u_0[), g_{u_2}([-\omega_5/3, \omega_5/3]))$$

Ainsi, $\epsilon_m > 0$ par compacité de $g_{u_2}([-\omega_5/3, \omega_5/3])$.

On considère dans la suite un $u' \in [u_3, u[$ fixé (d'une manière qu'on précisera dans la suite) et un $u \in [u_3, u_0[\cap I$ qui tendra vers u_0. On applique la proposition 7.3 à $\overline{\Omega}(u_2, u; \omega_5/3)$, avec $m_0 \in \gamma_0([u_3, u])$ et $Y = \gamma_0'$. On considère la courbe suivante :

$$s_{u'} := \{p \in \overline{\Omega}(u_2, u; \omega_5/3) \mid y(p) = y(\gamma_0(u'))\}$$

$s_{u'} \neq \emptyset$, car $\gamma_0(u') \in s_{u'}$. Le segment de $s_{u'}$ issu de $\gamma_0(u')$ doit rencontrer $g_u([-\omega_5/3, 0])$ si u_3 est assez proche de u_0. En effet, $g_u([-T_1(u - u'), 0])$ contient au moins un point $g_u(t_{u,u'})$ où $y = y(\gamma_0(u'))$ d'après (41), il suffit donc de montrer que ce point est sur le segment de $s_{u'}$ issu de $\gamma_0(u')$.

On pose pour cela :

$$\Omega''(u_2, u; \omega_5/3) := \{m \in \overline{\Omega}(u_2, u; \omega_5/3) \mid |y(m)| \leq u_2 - u\}$$

Comme $\overline{\Omega}(u_2, u; \omega_5/3)$ et simplement connexe et $dy \neq 0$, $\Omega''(u_2, u; \omega_5/3)$ est simplement connexe.

D'après le corollaire 7.8, si u_2 est assez proche de u_0, g_{u_2} et g_u sortent de $\overline{\Omega}(u_2, u; \omega_5/3)$, donc $\Omega''(u_2, u; \omega_5/3) \setminus (g_{u_2} \cup g_u)$ a une composante connexe $\Omega_0''(u_2, u; \omega_5/3)$ dont le bord rencontre g_{u_2} et g_u. Ainsi :

$$\partial\Omega_0''(u_2, u; \omega_5/3) = \partial_{u_2} \cup \partial_u \cup \partial_- \cup \partial_+$$

où $\partial_{u_2} = \partial\Omega_0''(u_2, u; \omega_5/3) \cap g_{u_2}$, $\partial_u = \partial\Omega_0''(u_2, u; \omega_5/3) \cap g_u$, et où ∂_- et ∂_+ sont les composantes connexes de $\partial\Omega_0''(u_2, u; \omega_5/3) \setminus (\partial_{u_2} \cup \partial_u)$. On les choisit de manière que $y = \pm(u_2 - u)$ sur $\partial_\pm \cap \partial_u$.

Le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 7.9 montre alors que $y = u_2 - u$ sur ∂_+ et que $y = -(u_2 - u)$ sur ∂_-. Comme $g_u(t_{u,u'}) \in \partial_u \cap s_{u'}$, il nous suffit de montrer que $s_{u'}$ ne peut pas rencontrer ∂_{u_2} entre $\gamma_0(u')$ et $g_u(t_{u,u'})$.

Or $x(g_u(t_{u,u'})) \in [-\epsilon_m, \epsilon_m]$ si u_3 est proche de u_0, d'après (40) et le fait que $\lim_{u_0} \theta_g = \lim_{u_0} \epsilon = 0$. $s_{u'}$ ne peut donc pas rencontrer $g_{u_2}([-\omega_5/3, \omega_5/3])$ avant $g_u([-\omega_5/3, \omega_5/3])$. Donc le segment de $s_{u'}$ issu de $\gamma_0(u')$ rencontre $g_u([-\omega_5/3, 0])$.

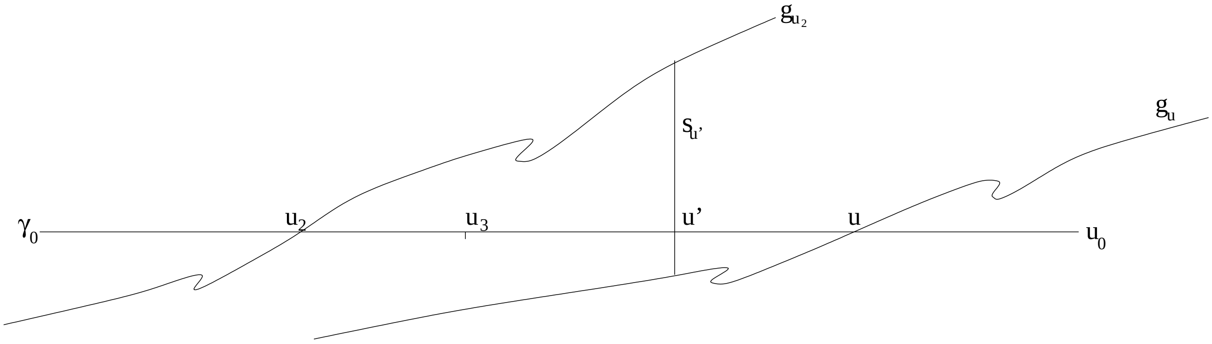

Figure 7.1

Maintenant, (40) montre que $\lim_{u\to u_0} x(g_u(t_{u,u'})) = 0$, si bien que $\lim_{u\to u_0} g_u(t_{u,u'}) = \gamma_0(u') \in \Sigma$. Ceci contredit le point (4.) du lemme F, et on conclut que θ_L ne peut pas être nul.

On sait maintenant que $\theta_L \neq 0$, mais on va montrer que c'est impossible aussi, ce qui terminera la preuve du lemme G. On donne d'abord directement la preuve principale, en laissant de coté les démonstrations des propositions utilisées, qu'on donnera ensuite. Il faut d'abord se restreindre à un domaine convenable.

PROPOSITION 7.11 *Il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \in]0, r_0]$, $B(\gamma_0(u_0), r) \setminus \gamma_0([0, L])$ a une composante connexe, notée $B^+(r)$, qui est simplement connexe et qui contient $\gamma_0(u_0)$ dans son bord, mais qui ne rencontre pas $\partial\Sigma \setminus \gamma_0([0, L])$.*

Heuristiquement, comme γ_0 est limite d'une suite de segments géodésiques, $B^+(r)$ est limite d'une suite de demi-disques dont les diamètres sont les γ_n. On suppose dans la suite que $B^+(r)$ est "au-dessus" de γ_0 et que $\theta_L \in]0, \pi[$, si bien que, pour $u \in I$ assez proche de u_0, le vecteur dirigeant de g_u en 0 est dirigé vers $B^+(r)$ (la même chose étant vraie pour J et les h_u). Alors :

PROPOSITION 7.12 *Il existe $\epsilon_3 > 0$ et $T_3 > 0$ tels que, pour tout $u \in [u_0 - \epsilon_3, u_0[$, $g_u(]0, T_3])$ (si $u_0 \in \overline{I}$) et $h_u(]0, T_3])$ (si $u_0 \in \overline{J}$) ne rencontrent pas $\gamma_0([u_0, L])$.*

Notons que, dans cette proposition, ϵ_3 et T_3 dépendent de toutes les données "géométriques", et non pas seulement des constantes K_2, τ_1, etc. On peut maintenant conclure la preuve en remarquant que, si $\theta_L \in]0, \pi[$, les $(g_u)_{u\in I}$, doivent converger vers une limite contenant des points intérieurs à Σ. Plus précisément :

PROPOSITION 7.13 *Si $u_0 \in \overline{I}$, il existe $T_4 > 0$ tel que $g_u([T_4/2, T_4])$ reste, quand $u \to u_0, u \in I$, dans un compact de Σ (qui ne rencontre pas $\partial\Sigma$).*

La même chose est bien sûr vraie pour les h_u si $u_0 \in \overline{J}$. C'est à nouveau en contradiction avec le point (4.) du lemme F. On a montré qu'on ne pouvait avoir ni $\theta_L = 0$, ni $\theta_L \neq 0$; cette contradiction conclut la preuve du lemme G, modulo les preuves des trois propositions qui restent à montrer.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 7.11. — Soit c une courbe régulière qui relie $\gamma_0(0)$ à $\gamma_0(L)$ dans Σ. Par compacité de c, on peut poser : $r_0 = d(c, \gamma_0(u_0))/2$, et $r_0 > 0$.

Il existe une unique composante connexe Ω_0 de $\Sigma \setminus (c \cup \gamma_0([0, L]))$ d'adhérence compacte qui contient $\gamma_0(u_0)$ dans son bord. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note Ω_n une composante connexe de $\Omega_0 \setminus \gamma_n$

dont le bord ne rencontre pas γ_0, de manière que $\Omega_n \to \Omega_0$ (au sens de Hausdorff). On choisit $m_n \in \partial\Omega_n$ tel que $m_n \to \gamma_0(u_0)$, et on appelle $B_n^+(r)$ la boule de centre m_n et de rayon r dans Ω_n. Alors on vérifie que $B_n^+(r) \to B^+(r)$.

Mais $B_n^+(r)$ est un demi-disque de rayon r, et $\tilde{K} \leq K_2$; si r est assez petit, alors (pour n assez grand) $B_n^+(r)$ est simplement connexe. Donc $B^+(r)$ est simplement connexe. □

Démonstration de la proposition 7.12. — On choisit $r \leq \min(\omega_5/3, r_0)$. On applique le corollaire 7.4 à $B^+(r)$, avec $m_0 := \gamma_0(u_0 - r/4)$, $c_0 = \gamma_0(u_0 - r, u_0 + r)$, et Y en m_0 tel que $\angle(\gamma', Y) = \theta_L$.

On raisonne par l'absurde, et on suppose la conclusion de la proposition fausse. On peut donc trouver $u \in [0, u_0[$ aussi proche de u_0 et t aussi petit qu'on le veut tels que $g_u([0,t]) \cap \gamma_0([0,L]) = \{g_u(0), g_u(t)\} = \{\gamma_0(u), \gamma_0(u_b)\}$ avec $u_b \in]u_0, L]$. On suppose ici qu'on a choisi un tel couple (u,t), avec $t \leq r/2$ et $u_0 - u \leq r/2$. Alors $g_u([0,t]) \subset B^+(r)$. Notons que $g_u([0,t]) \subset \Sigma$ et que $\gamma_0(u_0) \in \partial\Sigma$; on peut donc poser $r'(u) := d(\gamma_0(u_0), g_u([0,t]))$, et $r'(u) > 0$ par compacité de $g_u([0,t])$.

Pour $u' \in]u, u_0[\cap I$, on pose : $\Omega'(u,u') := \Omega(u,u';r/2) \cup B^+(r)$. $\Omega'(u,u')$ n'est pas nécessairement simplement connexe ; on va à nouveau utiliser la proposition 7.7 pour définir une surface à bord "modifiée" $\overline{\Omega}'(u,u')$ qui remplacera $\Omega'(u,u')$. On remarque encore que $I \cap [u,u']$ et $J \cap [u,u']$ sont des réunions disjointes d'intervalles ouverts I_i et J_j respectivement, puis on pose $\Omega_i = \cup_{u \in I_i} g_u([-r/2, r/2])$, $\Omega'_j = \cup_{u \in J_j} h_u([-r/2, r/2])$. Enfin, $\Omega_{i,0}$ est un ϵ-voisinage de γ_0 dans Ω_i, $\Omega'_{j,0}$ un ϵ-voisinage de γ_0 dans Ω_j, et B_0 un ϵ-voisinage de γ_0 dans $B^+(r)$. On applique la proposition 7.7 en utilisant comme ouverts les Ω_i, Ω'_j et $B^+(r)$, et on appelle $\overline{\Omega}'(u,u')$ la surface simplement connexe à bord régulier par morceaux obtenue.

On note encore $\overline{\gamma}_0$ la composante connexe du relevé de γ_0 à $\overline{\Omega}'(u,u')$ qui est dans le bord du relevé de $B^+(r)$. On applique à $\overline{\Omega}'(u,u')$ le corollaire 7.4, à nouveau avec $m_0 := \overline{\gamma}_0(u_0 - r/4)$, $c_0 = \gamma_0([u_0 - r, u_0 + r]) \cap \overline{\Omega}'(u,u')$, et $Y(m_0) = J\gamma'_0$. On note $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les fonctions obtenues, et $\overline{X}, \overline{Y}$ les champs de vecteurs correspondant. On remarque alors que $\overline{x}, \overline{y}, \overline{X}$ et $\overline{Y}$ coïncident avec x, y, X et Y respectivement sur $B^+(r)$. C'est parce que, d'après les choix fait ci-dessus :

$$\overline{\Omega}'(u,u') \cap \partial B^+(r) \subset \gamma_0([0,L])$$

si bien que les courbes minimisantes de points de $B^+(r)$ vers m_0 dans $\overline{\Omega}'(u,u')$ restent dans $B^+(r)$. De plus, $y = 0$ sur $\overline{\gamma}_0$.

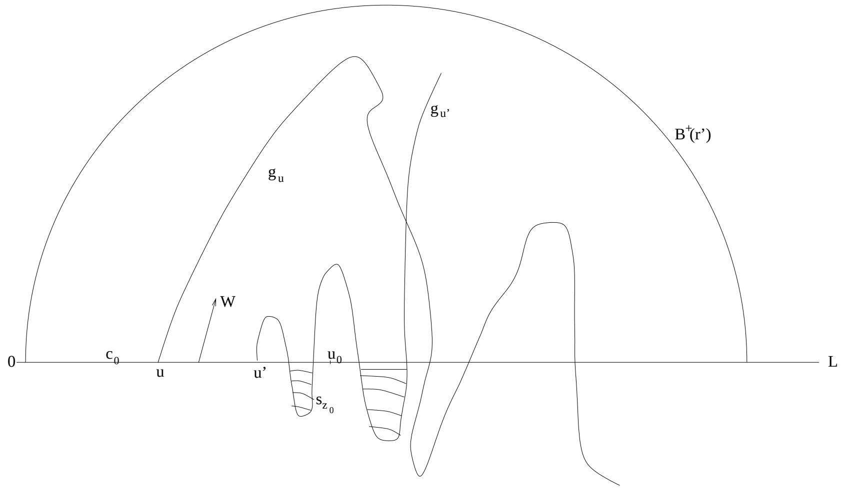

Figure 7.2

Comme $u' \in I$, l'assertion 7.5 montre que $y > 0$ sur $g_{u'}([t'(u'), r/2])$ pour un $t'(u') > 0$ tel que $t'(u') \to 0$ quand $u' \to u_0$. On va montrer que (pour u' assez proche de u_0) $g_{u'}([t'(u'), r/2]) \subset B^+(r)$.

On choisit $y_1 > 0$, et on note :

$$\overline{\Omega}''(y_1) = \{p \in \overline{\Omega}(u, u') \mid y(p) \leq y_1\}$$

Si y_1 est assez petit, la proposition 7.5 montre que $y(g_u(t)) > y_1$ et que $y(g(_{u'}(t)) > y_1$ pour $t \in [0, r/2]$ assez proche de $r/2$. Ainsi, $g_u([0, r/2])$ et $g_{u'}([0, r/2])$ sortent de $\overline{\Omega}''(y_1)$. On peut donc noter $\overline{\Omega}'_{y_1}(u, u')$ la composante connexe de $\overline{\Omega}''(y_1) \setminus (g_u([0, r/2]) \cup g_{u'}([0, r/2]))$ qui contient un voisinage de $\gamma_0([u, u'])$. A nouveau :

$$\partial\overline{\Omega}'_{y_1}(u, u') = \partial_0(y_1) \cup \partial_u(y_1) \cup \partial_{u'}(y_1) \cup \partial_+(y_1)$$

où $\partial_0(y_1) \subset \gamma_0$, $\partial_u(y_1) \subset g_u$, $\partial_{u'}(y_1) \subset g_{u'}$. On montre aussi, comme dans la preuve de la proposition 7.9, que $y = y_1$ sur $\partial_+(y_1)$. Comme $dy \neq 0$, $\overline{\Omega}'_{y_1}(u, u')$ est simplement connexe.

Il faut remarquer que les minima locaux négatifs de y sur $\overline{\Omega}'_{y_1}(u, u')$ ne peuvent pas être atteints en des points de $g_u([0, r/2])$. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'un tel minimum est atteint en un point $g_u(t_m), t_m \in [0, r/2]$. On remarque que, comme X est partout orienté comme $-Jdy$, le bord de $\partial\overline{\Omega}'_{y_1}(u, u')$ est orienté comme $-X$ en tous les minima locaux de y, et comme X en tous les maxima locaux de y. Ceci montre que $g'_u(t_m) = -X$. De plus, comme $y(g_u(0)) = 0$ et $dy(g'_u(0)) > 0$, $(y \circ g_u)_{|[0, t_m]}$ doit avoir un maximum local en un point $t_M \in [0, t_m]$, avec $g'_u(t_M) = X$. Ainsi, $dx(g'_u(t_M)) > 0$ et $dx(g'_u(t_m)) =< 0$, si bien que $(x \circ g_u)_{|[t_M, t_m]}$ doit avoir un maximum local en point $t_x \in [t_M, t_m]$, avec $g'_u(t_x) = -Y$.

Rappelons que $g'_u = U$ partout sur g_u, et que l'équation (4) indique que $\|\tilde{\nabla}_U V\| \leq \tau_1$. On a donc $U(g_u(t_m)) = -X$, $U(g_u(t_M)) = X$ et $U(g_u(t_x)) = -Y$. Comme $\angle(U, V) \in]0, \pi[$ partout, on voit que $\angle_{g_u(t_m)}(X, V) \in]-\pi, 0[$, $\angle_{g_u(t_x)}(X, V) \in]-\pi/2, \pi/2[$ et que $\angle_{g_u(t_M)}(X, V) \in]0, \pi[$. D'après la proposition 7.3 et (4), on doit avoir :

$$-\frac{\tau_1 r}{2} - \frac{K_2 r^2}{4} \leq \angle_{g_u(0)}(X, V) \leq \frac{\tau_1 r}{2} + \frac{K_2 r^2}{4}$$

Mais, en $g_u(0)$, le vecteur dirigeant W de g_u fait un angle proche de θ_L avec $X = \gamma'_0(u)$; et U est partout transverse à V, et $|\angle(U, W)| \leq \epsilon(u)$ sur g_u sauf sur un intervalle de longueur $\epsilon(u)$. Donc U doit être dirigé du même coté de V que W, si bien que, si r est assez petit, on doit avoir $\angle_{g_u(0)}(U, V) \in]-\pi, 0[$, ce qui est exclu. On vient donc de montrer que les minima locaux négatifs de y sur $\overline{\Omega}'_{y_1}(u, u')$ ne sont jamais atteints sur g_u, ils sont donc atteints sur $g_{u'}$.

Pour $y_0 < 0$, soit :

$$s_{y_0} = \{p \in \overline{\Omega}'_{y_1}(u, u') \mid y(p) = y_0\}$$

C'est une réunion disjointe de courbes dont les extrémités ne peuvent rencontrer que $g_u([0, r/2])$ ou $g_{u'}([0, r/2])$, mais pas $g_{[u,u'] \cap I}(r/2) \cup h_{[u,u'] \cap J}(r/2)$ d'après le corollaire 7.8 et l'assertion 7.5. On va montrer que ces extrémités doivent (pour u' proche de u_0) être toutes les deux sur $g_{u'}([0, r/2])$.

On suppose au contraire qu'il existe y tel que s_y rencontre $g_u([0, r/2])$, et on note :

$$y_0 = \inf\{y < 0 \mid s_y \cap g_u([0, r/2]) \neq \emptyset\}$$

Alors s_{y_0} doit rencontrer $g_u([0, r/2])$ en un point p_0 qui se situe, sur un segment de s_{y_0} de longueur l_0, entre deux intersections avec $g_{u'}([0, r/2])$, donc entre deux points $g_{u'}(t_1)$ et $g_{u'}(t_2)$, avec $0 \leq t_1 < t_2 \leq t'(u')$. Si u' est assez proche de u_0, l'assertion 7.5 montre que $t'(u') < r'(u)/6$, si bien que $d(g_{u'}(t_1), g_{u'}(t_2)) < r'(u)/6$. La seconde assertion de la proposition 7.2 montre alors que la longueur du segment de s_{y_0} entre $g_{u'}(t_1)$ et $g_{u'}(t_2)$ est au plus $r'(u)/2$, donc $d(p_0, \overline{\gamma}_0(u')) \leq r'(u)/2 + t'(u')$. On doit donc avoir :

$$d(\overline{\gamma}_0(u_0), p_0) < r'(u)$$

ce qui est impossible car $p_0 \in g_u([0, r/2])$. Ainsi, les s_{y_0} (pour $y_0 < 0$) ne peuvent rencontrer que $g_{u'}([0, r/2])$, et donc $g_{u'}$ doit "revenir" dans $B^+(r)$: $g_{u'}([t'(u'), r/2]) \subset B^+(r)$.

De plus, si u' est assez proche de u_0, $g_{u'}(t'(u'))$ est dans le domaine de $B^+(r)$ délimité par $g_u([0,t])$, et où y est majoré par $t + (u_0 - u)$. On voit en appliquant à nouveau l'assertion 7.5 que $g_{u'}([t'(u'), r/2])$ doit sortir de ce domaine, donc rencontrer $g_u([0,t])$, ce qui est impossible. $\square$

Démonstration de la proposition 7.13. — Par définition, $\mathrm{diam}(B^+(r)) \leq 2r$ donc, pour $2r \leq \omega_0$, on peut appliquer le corollaire 7.4, en prenant encore pour Y le vecteur unitaire en $\overline{\gamma}_0(u_0 - r/4)$ tel que $\angle(\gamma_0'(u_0), Y) = \theta_L$. La proposition 7.12 et le point (4.) du lemme F montrent que, pour $u \in [0, u_0[\cap I$ assez proche de u_0, $g_u([t(u), T_3])$ reste dans $B^+(r)$, où $t(u)$ est le plus grand t tel que $g_u(t) \in \overline{\gamma}_0([0, L[)$. On peut donc appliquer l'assertion 7.5, qui montre que, pour chaque $t \in [0, T_3]$:

$$\begin{aligned} \limsup_{u\to u_0, u\in I, t(u)\leq t} |x(g_u(t))| &\leq K_2 r t^2/4 \\ \limsup_{u\to u_0, u\in I, t(u)\leq t} |y(g_u(t)) - t| &\leq K_2 r t^2/4 \end{aligned}$$

et la même chose est vraie pour $h_u([0, T_3])$ quand $u \in J$.

Ainsi, les courbes $g_u([T_3/2, T_3])$ restent dans un compact quand $u \to u_0$ dans I, et il en est de même pour J et les h_u. $\square$

8 Une borne d'aire

Pour pouvoir conclure, on aura encore besoin d'un lemme naturel :

Lemme 8.1 *Si $K_2 \geq \tilde{K} \geq K_1 > 0$, et si $(\Sigma, I\!I\!I)$ est convexe, alors l'aire de $(\Sigma, I\!I\!I)$ est finie.*

La preuve de ce lemme repose sur la :

Proposition 8.2 *Dans les conditions du lemme 8.1, deux points $x_0, y_0 \in \Sigma$ quelconques sont joints par une géodésique minimisante dans $(\Sigma, I\!I\!I)$.*

Démonstration. — Soit $x \in \Sigma$ et $y \in \overline{\Sigma}$ avec $d(x,y) < \pi/\sqrt{K_2}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une géodésique g joignant x à y et de longueur au plus $d(x,y) + \epsilon$. En effet, il existe une courbe régulière $\gamma : [0, L[\to \Sigma$, paramétrée à vitesse 1, avec $\gamma(0) = x, \gamma(L) = y$, et de longueur $L \leq d(x,y) + \epsilon$. On note I l'ensemble des $s \in [0, L[$ tels qu'il existe une famille à un paramètre $(g_u)_{u\in[0,s]}$ de géodésiques joignant $x = \gamma(0)$ à $\gamma(u)$. $0 \in I$, et I est ouvert d'après l'injectivité de l'application exponentielle, et fermé d'après la convexité de Σ. Donc $I = [0, L[$, et g_L est la géodésique cherchée.

Ce raisonnement peut être précisé, pour montrer plus : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que, si $d(x,y) \leq \pi/2\sqrt{K_2}$ et si $L - d(x,y) \leq a$, alors la distance de Hausdorff $d_H(\gamma, g_L)$ est au plus ϵ. Pour le voir, on note $l(s)$ la longueur de g_s, $\theta(s)$ l'angle en $\gamma(s)$ entre $g_s'(l(s))$ et $\gamma'(s)$, et $\alpha(s)$ l'angle en x entre $\gamma'(0)$ et $g'(0)$. On appelle aussi $j_s(r)$ la norme en $g_s(r)$ du champ de Jacobi J_s orthogonal à g_s, tel que $J_s(0) = 0$ et que $\|J_s\|'(0) = 1$. On a alors :

$$l'(s) = \cos(\theta(s))$$

si bien que :

$$\int_0^L \cos(\theta(s))ds \geq L - a \tag{45}$$

et on en déduit aussi que :

$$\forall s \in [0, L[, l(s) \geq s - a$$

Par ailleurs, pour $s \in [0, L[$:

$$j_s(l(s))\alpha'(s) = \sin(\theta(s)) \tag{46}$$

alors que :

$$j_s(s) \geq \sin\left(\frac{s}{\sqrt{K_2}}\right) \tag{47}$$

Maintenant, (45) montre que $\theta(s)$ est proche de 1, sauf sur un ensemble E de mesure petite, donc que $\sin(\theta(s))$ est proche de 0 sauf sur E. (47) et (46) montrent alors que α varie peu sur $[2a, L[$, si bien que, pour tout $s \in [2a, L[$, $d_H(g_s, g_L)$ est petite.

Pour résumer, si $x \in \Sigma, y \in \overline{\Sigma}$ et si $d(x, y) \leq \pi/2\sqrt{K_2}$, alors toute suite minimisante de courbes joignant x à y converge vers une géodésique minimisante entre x et y, qui, par convexité de Σ, ne peut rencontrer $\partial\Sigma$ qu'en y. Si maintenant $x_0, y_0 \in \Sigma$, il existe une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de courbes régulières, $\gamma_n : [0, L_n] \to \Sigma$, avec $\gamma_n(0) = x_0$, $\gamma_n(L_n) = y_0$, et $L_n \to d(x_0, y_0)$. On peut appliquer le résultat précédent à des segments $\gamma_{n|[s,t]}$, avec $t - s \leq \pi/2\sqrt{K_2}$ et $\lim \gamma_n(s) \in \Sigma$, et on voit que $\gamma_n([s, t])$ converge vers un segment géodésique qui ne peut rencontrer $\partial\Sigma$ qu'en $\lim \gamma_n(t)$. Ainsi, (γ_n) converge vers un segment géodésique minimisant qui joint x_0 à y_0 dans Σ. □

On peut en déduire la preuve du lemme 8.1.

Démonstration du lemme 8.1. — Soit $x \in \Sigma$, et $g : [0, L] \to \Sigma$ un segment géodésique minimisant pour $I\!I\!I$ (paramétré à vitesse 1) avec $g(0) = x$. Soit U un champ de Jacobi orthogonal sur g avec $U(g(0)) = 0$, notons $U' = \tilde{\nabla}_{g'}U, U'' = \tilde{\nabla}_{g'}U'$. Alors

$$U'' = -R(g', U)g' = -K(g(t))U$$

et comme $K \geq K_1$, si $\|U(s)\| \neq 0$ pour tout $s \in]0, t[$, $\|U(g(t))\| \leq \sin(\sqrt{K_1}t)\|U'(g(0))\|$, donc U doit s'annuler pour un certain $t \leq \pi/\sqrt{K_1}$. Comme g est minimisant, $L \leq \pi/\sqrt{K_1}$. Tout point de Σ est donc à distance au plus $\pi/\sqrt{K_1}$ de x (pour $I\!I\!I$).

On en déduit par intégration une borne d'aire:

$$\text{Aire}(\Sigma, I\!I\!I) \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/\sqrt{K_1}} \frac{\sin(\sqrt{K_1}t)}{\sqrt{K_1}}dt \leq \frac{2\pi}{K_1}\int_0^{\pi} \sin(t)dt \leq \frac{4\pi}{K_1}$$

□

9 Conclusions

On peut maintenant donner les preuves des théorèmes A, B et C. D'après le lemme E, $\partial_{I\!I\!I}\Sigma$ doit, dans chaque cas, être géodésique; le lemme 8.1 montre alors que l'aire de $(\Sigma, I\!I\!I)$ doit être bornée. Mais on en déduit en utilisant la formule de Gauss que l'aire de (Σ, σ) doit aussi être bornée (le rapport des éléments d'aire entre les deux métrique est $|K_e|$, qui est minoré). Or, dans chaque cas, (Σ, σ) est une surface complète simplement connexe à courbure négative, donc d'aire infinie.

Notons que le plan euclidien admet une immersion isométrique dans S^3: il suffit pour la trouver de passer au revêtement universel du tore de Clifford:

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2}\right\} \subset S^3$$

Il n'est donc pas arbitraire de demander, dans le théorème B, que la courbure de (Σ, σ) soit strictement négative.

Nous voudrions donner ultérieurement des extensions de ces résultats aux espaces ambiants à courbure variable (entre certaines bornes) ainsi qu'au cas où on suppose seulement $K < -1$ dans le théorème A, et $K < 0$ dans le théorème B.

References

[BS92] Yu. D. Burago and S. Z. Shefel'. The geometry of surfaces in Euclidean spaces. In Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller, editors, *Geometry III*, chapter I, pages 1–86. Springer, 1992. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 48).

[Efi64] N.V. Efimov. Apparition de singularités sur les surfaces à courbure négative. *Mat. Sbornik*, 64 (106) : 2:286–320, 1964.

[GHL87] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Springer, 1987.

[Hil01] D. Hilbert. Uber Fläschen von konstanter Gaußscher Krummung. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2:87–99, 1901.

[Klo72] T. Klotz-Milnor. Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature. *Advances in Mathematics*, 8:474–543, 1972.

[Lab89] F. Labourie. Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes. *Journal of Differential Geometry*, 30:395–424, 1989.

[Roz62] E. R. Rozendorn. An isolated point on a surface of negative curvature with a regular metric. *Soviet Math.*, 3:473–477, 1962.

[Roz92] E. R. Rozendorn. Surfaces of negative curvature. In Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller, editors, *Geometry III*, chapter II, pages 87–178. Springer, 1992. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 48).

[Spi75] M. Spivak. *A comprehensive introduction to geometry, Vol.I-V.* Publish or perish, 1970-1975.

[SX87] B. Smyth and F. Xavier. Efimov's theorem in dimension greater than two. *Invent. Math*, 90:443–450, 1987.