Il n'y a pas de classification borélienne des homéomorphismes de Brouwer

Frédéric Le Roux
Université Paris Sud
Bat. 430
91405 Orsay Cedex FRANCE
e-mail : leroux@topo.math.u-psud.fr

Résumé

On considère l'espace $\mathcal{B}_2$ des homéomorphismes du plan obtenus en recollant deux translations, muni de la topologie compacte-ouverte. On construit une famille dans $\mathcal{B}_2$, continûment indexée par les éléments du Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, pour laquelle les classes de conjugaison correspondent aux orbites du décalage (ou « shift ») sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Ceci permet de montrer qu'il n'y a pas de classification borélienne de la relation de conjugaison sur $\mathcal{B}_2$.

Abstract

In this paper, we consider the space $\mathcal{B}_2$ of the planar homeomorphisms that are obtained by gluing two translations together, endowed with the compact-open topology. We construct an embedding of the Cantor set $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ in $\mathcal{B}_2$, such that in this Cantor set of homeomorphisms the conjugacy classes are given by the orbits of the shift map on $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. As a classical consequence, we explain why there cannot be any borelian classification of the conjugacy relation on the space $\mathcal{B}_2$.

1 Introduction

Un *homéomorphisme de Brouwer* est un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, sans point fixe. Brouwer a montré qu'un tel homéomorphisme possède des propriétés étonnantes : tout point est dans un *domaine de translation*, qui est un « grand » ouvert connexe, simplement connexe, invariant, sur lequel l'homéomorphisme est conjugué à une translation (voir [3, 6]). Autrement dit, le plan est recouvert par des cartes qui « trivialisent » la dynamique : tout homéomorphisme de Brouwer s'obtient en recollant un certain nombre de translations.

Dans cet article, on se propose de donner un sens précis à la constatation suivante : malgré leur simplicité dynamique apparente, l'étude des classes de conjugaison des homéomorphismes de Brouwer est complexe. La difficulté la plus évidente est héritée de la complexité des feuilletages du plan. Un argument très simple, expliqué à la fin de l'article (partie 8), permet de voir que les feuilletages du plan « ne sont pas classifiables ». Or tout feuilletage du plan est orientable et sans feuille fermée ; en se déplaçant le long des feuilles, on obtient donc un flot dont le temps 1 est un homéomorphisme de Brouwer (et les cartes du feuilletages sont des domaines de translation de l'homéomorphisme). Cette construction entraîne alors la « non-classifiabilité » des homéomorphismes de Brouwer.

Cependant, cette complexité-là est due au recollement d'une infinité de feuilletages triviaux : si on se limite à ceux qui possèdent un atlas contenant moins de n cartes (c'est-à-dire tels que le plan est recouvert par au plus n ouverts sur lesquels le feuilletage est homéomorphe au feuilletage horizontal du plan), il ne subsiste qu'un nombre fini de classes d'équivalence de feuilletages homéomorphes. Par exemple, tous les feuilletages du plan avec un atlas à deux cartes sont homéomorphes au feuilletage horizontal ou au feuilletage de Reeb (représenté figure 4) : autrement dit, il n'y a qu'une seule manière non triviale de recoller deux copies du feuilletage trivial (voir [5]). Il est donc naturel de se demander, dans le cadre des homéomorphismes de Brouwer, si la complexité diminue de manière aussi fondamentale lorsqu'on se limite à ceux obtenus en recollant deux translations. Nous allons montrer qu'il n'en est rien : contrairement à ce qui se passe pour les feuilletages, il y a une très grande diversité de recollements possibles entre deux domaines de translation, et il n'existe pas non plus de classification « raisonnable » des homéomorphismes de Brouwer obtenus de cette manière.

En résumé, il y a au moins deux types d'objections à la possibilité de classifier les homéomorphismes de Brouwer : la première peut être obtenue en recollant de manière simple une infinité de translations, tandis que celle que nous allons exposer consiste à recoller deux translations d'une infinité de façons distinctes.

On énonce d'abord le résultat précis, et on explique pourquoi il suffit de montrer que la partition de l'ensemble de ces homéomorphismes en classes de conjugaison contient une copie de la partition du Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ en orbites du décalage (partie 2). On effectue ensuite cette construction en exhibant une famille d'homéomorphismes de Brouwer obtenus en compliquant l'ensemble singulier de l'homéomorphisme de Reeb (parties 3 et 4).

Sur l'idée de « classification borélienne », on peut lire (dans un cadre très différent !) l'article de Effros ([4]). Cette idée est développée par la théorie descriptive des ensembles, dont traite le livre de Kechris [10] ; l'article [9] en donne une introduction ; mais ce qui suit ne nécessite pas ces lectures.

2 Définitions et énoncés

Définition 1. *Soit τ la translation du plan donnée par $(x, y) \mapsto (x, y-1)$; on dira qu'un homéomorphisme h du plan est* obtenu en recollant deux translations *si le plan est recouvert par deux ouverts connexes et simplement connexes O_1 et O_2, invariants par h (i.e. $h(O_i) = O_i$) et tels que les restrictions de h à O_1 et O_2 sont conjuguées à τ.*

On note $\mathcal{B}$ l'espace des homéomorphismes de Brouwer muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, et $\mathcal{B}_2$ le sous-espace formé de ceux obtenus en recollant deux translations. Nous nous intéressons ici à la relation d'équivalence donnée par la conjugaison par les homéomorphismes du plan préservant l'orientation. L'espace $\mathcal{B}$ a déjà été étudié dans [1] et [11] ; en particulier, Marc Bonino a montré que les conjugués à la translation sont denses dans $\mathcal{B}$, et l'auteur a prolongé ce résultat en montrant que chaque classe de conjugaison est dense.

On désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathcal{C}$ l'espace topologique produit $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ (cet espace est homéomorphe à l'ensemble de Cantor triadique). On considère sur $\mathcal{C}$ l'homéomorphisme de décalage : $(u_n) \mapsto (u_{n-1})$.

Définition 2. *On appelle* partition de $\mathcal{C}$ en orbites du décalage *la relation d'équivalence donnée par : pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $(u_n) \in \mathcal{C}$, $(u_n) \sim (u_{n+p})$.*

Définition 3. *Soit X et Y deux espaces topologiques munis chacun d'une relation d'équivalence notée $\sim$. On dira que $(X, \sim)$* contient une copie de *$(Y, \sim)$ si il existe une application continue injective Φ de Y dans X qui est* compatible *avec les deux relations d'équivalence,* i.e. *telle que $\Phi(y_1) \sim \Phi(y_2)$ si et seulement si $y_1 \sim y_2$.*

Voici le résultat principal de l'article :

Théorème 1. *La relation de conjugaison dans $\mathcal{B}_2$ contient une copie de la partition du Cantor en orbites du décalage. Autrement dit, il existe une famille d'homéomorphismes de Brouwer obtenus en recollant deux translations, $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{C}}$, continûment indexée par les éléments de $\mathcal{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :*

1. ***injectivité :*** *$\alpha \neq \beta$ entraîne $h_\alpha \neq h_\beta$;*
2. ***compatibilité :*** *deux homéomorphismes h_α et h_β sont conjugués si et seulement si les deux suites α et β sont dans la même orbite du décalage.*

Soit X un espace topologique ; rappelons que la *tribu des boréliens de X* est la plus petite tribu (c'est-à-dire un ensemble de parties de X stable par passage au complémentaire et union dénombrable et contenant l'ensemble vide) engendrée par les ouverts de X. Une application de X dans l'intervalle $[0,1]$ est alors dite *borélienne* si l'image réciproque de tout borélien est un borélien.

Définition 4. *Un* invariant total *(ou* classification*) pour une relation d'équivalence est une application f telle que les classes d'équivalence soient exactement les préimages des singletons par cette application (*i. e. $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$*).*

Trouver une copie de la partition du Cantor en orbites du décalage est une méthode classique pour montrer l'impossibilité de classifier (voir [9], p.215) :

Corollaire 2. *Il n'existe pas d'application borélienne de $\mathcal{B}_2$ dans $[0,1]$ qui soit un invariant total de la relation de conjugaison.*

Preuve du corollaire — L'existence d'une classification borélienne pour $\mathcal{B}_2$ donnerait, par composition avec l'application $\alpha \mapsto h_\alpha$ du théorème 1, une classification borélienne de la partition de $\mathcal{C}$ en orbites du décalage. Nous raisonnons par l'absurde pour montrer que ceci est impossible.

Supposons qu'il existe une application borélienne ϕ de $\mathcal{C}$ dans $[0,1]$ telle que $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ si et seulement si $\alpha \sim \beta$. Considérons la mesure produit μ sur $\mathcal{C}$ obtenue à partir de la mesure équiprobable $(1/2, 1/2)$ sur $\{0,1\}$; l'application ϕ est intégrable pour cette mesure. De plus, μ est une mesure ergodique pour le décalage (voir par exemple [8], proposition 4.2.13) : comme la fonction ϕ est constante sur les orbites du décalage, elle est constante presque partout. *A fortiori* il existe deux orbites sur lesquelles elle prend la même valeur ; autrement dit, ϕ n'est pas un invariant total. $\square$

Remarquons que l'on peut renforcer l'énoncé du corollaire 2 en remplaçant $[0,1]$ par n'importe quel espace métrique séparable, puisque la tribu des boréliens du complété d'un tel espace topologique est isomorphe à la tribu des boréliens de l'intervalle (voir [10], théorème 15.6).

3 Construction d'ensembles fermés dans l'anneau et le plan

Dans cette partie, on abandonne provisoirement les systèmes dynamiques pour obtenir un résultat intermédiaire de topologie du plan ; on construit notamment une copie de la partition en orbites du décalage dans l'espace des fermés connexes localement connexes du plan, muni de la relation d'homéomorphie (pour une topologie de Hausdorff, par exemple).

3.1 Ecriture d'une suite de 0 et de 1

Donnons-nous un élément $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{C}$; nous allons construire un fermé connexe $K_{(u_n)}$ dans l'anneau $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en « écrivant » la suite (u_n) (voir figure 1).

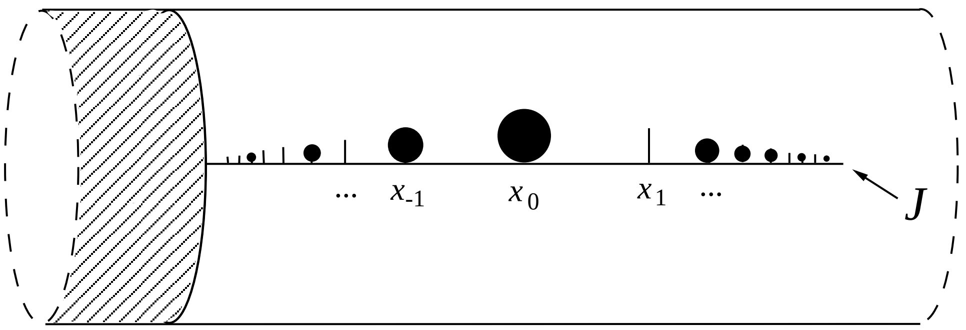

FIG. 1: Phrase infinie sur rouleau de machine à écrire à deux touches.

Appelons J le segment $[-3,-1]\times\{0\}$ dans l'anneau. On commence par choisir une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans J, ordonnés sur J suivant les valeurs de n (par exemple, on peut prendre $x_n = (-2 + (\text{signe de } n)\times \Sigma_{p=1}^{|n|}2^{-p}, 0)$). Ces points sont les emplacements où nous allons coller des symboles correspondant au 0 et au 1.

Soit $S_{0,0}$ un disque euclidien fermé, pas trop grand, situé au dessus de J et tangent à J en x_0 (c'est un dessin du '0') ; soit aussi $S_{0,1}$ le diamètre vertical du même disque (c'est un dessin du '1'). Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on construit de même deux ensembles $S_{n,0}$ et $S_{n,1}$ en prenant un disque tangent à J en x_n et son diamètre vertical ; on s'arrange pour que tous les disques choisis soient disjoints (en particulier, le diamètre des disques $S_{n,0}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).

On obtient maintenant le compact $K_{(u_n)}$ en écrivant sur chaque emplacement x_n le symbole correspondant à la valeur de u_n ; plus précisément, on pose $P =]-\infty, -3] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et

$$K_{(u_n)} = J \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S_{n,u_n} \cup P.$$

3.2 Propriétés de la construction

Les premières propriétés sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 3. *Les ensembles $K_{(u_n)}$ sont fermés, connexes et localement connexes. L'application $(u_n) \mapsto K_{(u_n)}$ est injective ; elle est aussi compatible avec les relations d'équivalence, c'est-à-dire qu'on a $(u_n) \sim (v_n)$ si et seulement si les ensembles $K_{(u_n)}$ et $K_{(v_n)}$ sont homéomorphes.*

Preuve — L'injectivité est immédiate. Si $(u_n) \sim (v_n)$, il est facile de construire un homéomorphisme entre $K_{(u_n)}$ et $K_{(v_n)}$. La réciproque n'est pas beaucoup plus difficile ; on peut s'aider de la notion de *points de branchements* (le fait que les ensembles construits contiennent le demi-anneau P évite que $K_{(u_n)}$ soit homéomorphe à $K_{(u_{-n})}$). $\square$

L'application $(u_n) \mapsto K_{(u_n)}$ possède aussi une propriété de continuité qui apparaîtra dans le lemme 5.

3.3 Une famille de fermés du plan invariants par une translation

Soit π l'application de revêtement universel $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; pour toute suite α, on pose $F_\alpha = \pi^{-1}(K_\alpha)$. Cet ensemble est fermé, connexe et localement connexe, et invariant par la translation $\tau : (x, y) \mapsto (x, y - 1)$. On compactifie le plan en la sphère $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$; à partir de maintenant, nous utiliserons la métrique de la sphère (dont la restriction au plan est donnée par la projection stéréographique).

Définition 5. *On appelle $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ qui sont connexes, localement connexes et dont le complémentaire est connexe ; et $\mathcal{K}^*$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ formé des compacts K de la sphère qui sont situés dans le demi-plan $\{x \leq 0\} \cup \{\infty\}$ et qui sont invariants par τ (*i.e. *$\tau(K) = K$).*

On rajoute à l'ensemble F_α le point à l'infini pour en faire un élément de $\mathcal{K}^*$ que l'on note toujours F_α.

4 Construction d'homéomorphismes de Brouwer

Nous allons fabriquer la famille d'homéomorphismes requise par le théorème 1 comme cas particulier d'un procédé qui produit un homéomorphisme de Brouwer h_F à partir de chaque compact F de $\mathcal{K}^*$.

4.1 La famille d'homéomorphismes $(h_F)_{F \in \mathcal{K}^*}$: idée de la construction

Soit $F \in \mathcal{K}^*$; nous voulons associer à F un homéomorphisme de Brouwer h_F. Pour cela, nous allons partir de l'homéomorphisme de Reeb R représenté figure 2 (une description précise en est donnée dans la preuve du lemme 9). Considérons l'action de R ; on peut diviser le plan en trois régions : sur le demi-plan F_0 situé à gauche de la droite $\Delta_{-1} = \{x = -1\}$, R coïncide avec la translation τ ; à droite de $\Delta_1 = \{x = 1\}$, $R = \tau^{-1}$; et dans la bande ouverte O_0 située entre ces deux droites, l'orbite d'un point descend puis fait demi-tour et remonte. L'homéomorphisme h_F va être construit en remplaçant F_0 par F. De manière un peu moins vague, h_F sera égal à τ sur F, à τ^{-1} sur le demi-plan $\{x \geq 1\}$; le lemme 7 va nous fournir un homéomorphisme ϕ_F entre O_0 et l'ouvert O_F complémentaire de $F \cup \{x \geq 1\}$, et on construira h_F sur O_F en conjugant R par ϕ_F. Les contraintes sont les suivantes : il faut tout d'abord pouvoir choisir ϕ_F de manière à ce que les trois morceaux se recollent bien, c'est-à-dire que l'application h_F soit continue (ce sera notamment l'objet de la condition 3 du lemme 7). Ensuite, et c'est le plus difficile, nous voulons obtenir une construction « canonique », c'est-à-dire que l'application $F \mapsto h_F$ doit vérifier une condition de continuité (rappelons que le théorème 1 réclame une application $\alpha \mapsto h_\alpha$ *continue*) ; il faut pour cela munir $\mathcal{K}^*$ d'une topologie plus fine que la topologie de Hausdorff, qui nécessite la notion d'*équi-connexité locale*. Enfin, la construction doit vérifier une propriété de compatibilité, afin que l'on puisse en déduire le théorème 1.

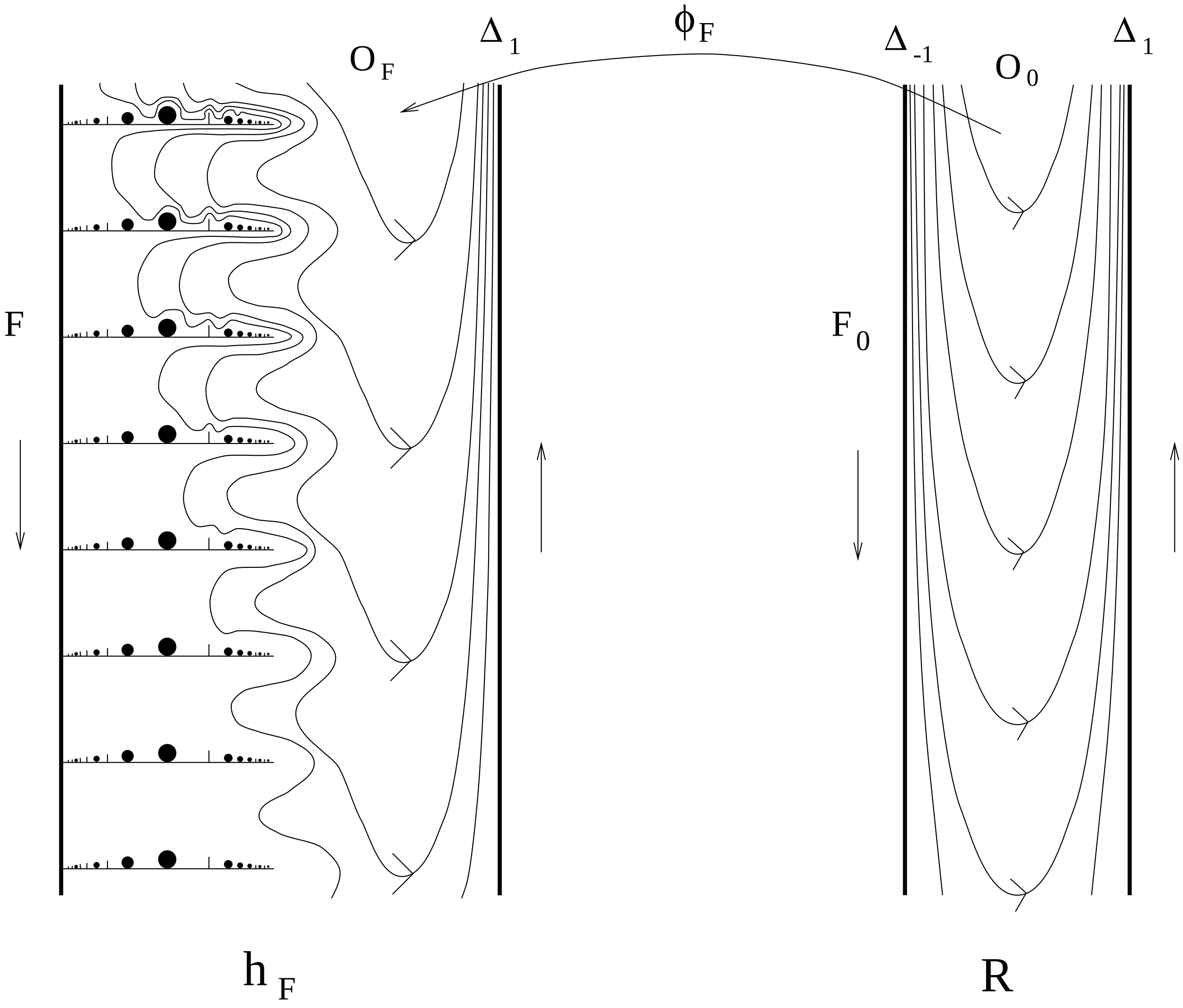

FIG. 2: Construction de h_F à partir de l'homéomorphisme de Reeb.

Ces propriétés sont formalisées dans la proposition 4 (les définitions sont données dans la partie suivante) :

Proposition 4. *Il existe une application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^* & \longrightarrow & \mathcal{B}_2 \\ F & \longmapsto & h_F \end{array}$$

possédant les propriétés suivantes :

1. ***extension*** *: pour tout F, la restriction de h_F à F coïncide avec la translation τ, et sa restriction à $\{x \geq 1\}$ avec τ^{-1} ;*
2. ***compatibilité*** *: deux homéomorphismes h_F et $h_{F'}$ sont conjugués si et seulement si il existe un homéomorphisme épais entre F et F' qui conjugue les restrictions de τ à F et F' ;*
3. ***continuité*** *: si (F_n) est une suite de compacts convergeant vers F_∞ de manière équi-localement connexe, alors la suite des homéomorphismes h_{F_n} converge vers h_{F_∞}.*

4.2 Définitions et outils

Cette partie contient les définitions des termes *épais* et *équi-connexité locale*, et on y présente notamment des résultats sur le paramétrage des ouverts connexes simplement connexes de la sphère.

Equi-connexité locale. Rappelons que l'ensemble des compacts d'un espace métrique peut être muni de la topologie de Hausdorff, pour laquelle deux compacts sont proches si tout point du premier est proche d'un point du deuxième et réciproquement. La notion d'équi-connexité locale permet d'affiner cette topologie sur l'ensemble $\mathcal{K}$; une des motivations pour l'introduction de ce concept est d'éviter le comportement dessiné sur la figure 3 : il existe une suite d'arcs γ_n qui converge (pour la topologie de Hausdorff) vers le segment $[0,1] \times \{0\}$, mais pour laquelle il n'existe pas de suite de paramétrages (c'est-à-dire de suite d'applications continues injective Γ_n de l'intervalle dans le plan telles que $\Gamma_n([0,1]) = \gamma_n$) convergeant vers un paramétrage du segment (au sens de la topologie de la convergence uniforme).

Pour tout $r > 0$ et $c \in \mathbb{S}^2$, on note $B_r(c)$ le disque du plan de centre c et de rayon r (pour la métrique de la sphère). Nous donnons seulement une définition séquentielle[1] ; la voici :

[1] La notion d'équi-connexité locale a déjà été utilisée, par exemple dans [14] pour énoncer des théorèmes de sélection.

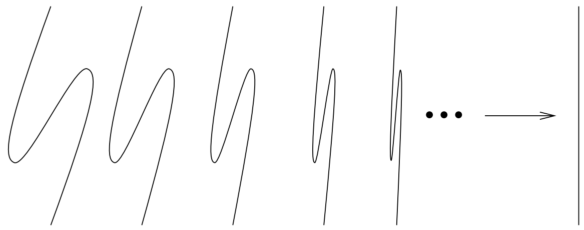

FIG. 3: Cette suite d'arcs n'est pas équi-localement connexe.

Définition 6. *Soit* $(K_n)_{n\geq 0}$ *et* K_∞ *des éléments de* $\mathcal{K}$ *; on dira que cette suite* converge vers K_∞ de manière équi-LC *si il y a convergence au sens de la topologie de Hausdorff, et si pour tout* $x_0 \in K_\infty$ *et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tous* $n \geq 0$ *et* $x, y \in K_n \cap B_\delta(x_0)$*, il existe un arc de* x *à* y *dans* $K_n \cap B_\varepsilon(x_0)$*.*

On dira maintenant qu'une application à valeurs dans $\mathcal{K}$ est continue si l'image de toute suite convergeante est une suite convergeant de manière équi-LC. On peut alors montrer :

Lemme 5. *L'application* Φ_1 *:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ \alpha & \longmapsto & F_\alpha \end{array}$$

est continue.

Extensions de plongements. On rappelle ici un résultat peu connu de Homma, qui généralise le théorème de Schoenflies. Suivant [7], on appelle *ensemble en forme de « Y »* un ensemble qui est la réunion de trois arcs ayant en commun un seul point, extrémité de chacun d'eux. L'orientation de la sphère induit un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arcs qui constituent n'importe quel ensemble de ce type.

Soit maintenant F un compact connexe localement connexe de la sphère.

Définition 7. *On appellera* plongement épais de F *une application continue et injective* g *de* F *dans la sphère qui préserve l'ordre cyclique de tous les ensembles en forme de « Y » contenus dans* F *; on dira aussi que* g *est un* homéomorphisme épais entre F et son image.

Le théorème de Homma justifie l'emploi du terme « épais » :

Théorème 6 ([7]). *Une application continue et injective de* F *dans la sphère s'étend en un homéomorphisme de la sphère préservant l'orientation si et seulement si c'est un plongement épais.*

Ce théorème ne nous sera vraiment utile que dans la fin de la preuve du théorème (partie 5) ; jusque là, on peut considérer que le mot « épais » signifie simplement « qui s'étend en un homéomorphisme de la sphère ».

Paramétrage canonique de l'ouvert O_F. Pour $F \in \mathcal{K}^*$, on appelle O_F l'ouvert complémentaire de $F \cup \{x \geq 1\}$. On note aussi F_0 le demi-plan $\{x \leq -1\}$, et $O_0 = O_{F_0}$ la bande ouverte entre les droites $\Delta_{-1} : \{x = -1\}$ et $\Delta_1 : \{x = 1\}$. Tous les ensembles d'applications continues seront munis de la topologie de la convergence uniforme *pour la métrique de la sphère* (qui équivaut à la convergence uniforme sur les compacts pour la métrique du plan). Les preuves des deux lemmes suivants sont laissées au lecteur ; elles consistent essentiellement à étendre les techniques de variable complexe utilisées dans l'appendice de [11], en remarquant que le concept d'équi-connexité locale permet de faire converger uniformément les applications de Riemann-Carathéodory (dans la preuve du théorème A.2.1, on utilise seulement l'équi-connexité locale des compacts $\gamma_n(\mathbf{K})$; et on peut généraliser la preuve de la proposition A.2.8).

Lemme 7. *On peut associer à chaque compact F de $\mathcal{K}^*$ une application continue ϕ_F de la bande fermée $\mathrm{Adh}(O_0)$ sur $\mathrm{Adh}(O_F)$, vérifiant :*

1. ***paramétrage** : ϕ_F est l'identité sur Δ_1, est un homéomorphisme entre O_0 et son image O_F, et envoie Δ_{-1} sur ∂F (frontière de F) ;*
2. ***continuité** : si (F_n) est une suite de compacts convergeant vers F_∞ de manière équi-localement connexe, alors la suite ϕ_{F_n} converge vers ϕ_{F_∞} ;*
3. ***relèvement des homéomorphismes du bord** : si g est un homéomorphisme épais entre F et F', alors il existe un unique homéomorphisme $\tilde{g}$ de Δ_{-1} qui est un relevé de g, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \Delta_{-1} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\phi_F"] & \Delta_{-1} \arrow[d, "\phi_{F'}"] \\ F \arrow[r, "g"] & F' \end{tikzcd}$$

Enoncer le deuxième lemme nécessite des définitions. Soit $\mathcal{P}_{\text{épais}}$ l'ensemble des couples (F, g) où $F \in \mathcal{K}^*$ et g est un plongement épais de F dans la sphère. On dira qu'*une suite $(F_n, g_n) \in \mathcal{P}_{\text{épais}}$ converge vers $(F, g) \in \mathcal{P}_{\text{épais}}$* si :

1. la suite F_n converge vers F de manière équi-LC ;

2. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et un entier N tels que si $n \geq N$ alors pour tous points x_n de F_n et x de F à distance inférieure à δ, les points $g_n(x_n)$ et $g(x)$ sont à distance inférieure à ϵ.

On a alors :

Lemme 8 (continuité du relevé). *Si (F_n, g_n) est une suite convergeant vers (F, g) dans $\mathcal{P}_{\text{épais}}$, alors la suite des homéomorphismes $\tilde{g}_n$ donnés par le lemme précédent converge vers $\tilde{g}$ (et la suite $g_n(F_n)$ converge vers $g(F)$ de manière équi-LC).*

4.3 Construction des homéomorphismes

A l'aide des résultats de la partie précédente, nous construisons la famille $(h_F)_{F \in \mathcal{K}^*}$.

Relevé de la dynamique au bord par l'application ϕ_F. Soit $F \in \mathcal{K}^*$; l'objet de ce paragraphe est de modifier ϕ_F à l'aide du lemme 8 pour obtenir la semi-conjugaison $\phi_F \circ \tau_{|\Delta_{-1}} = \tau_{|\partial F} \circ \phi_{F|\Delta_{-1}}$ (c'est-à-dire pour que le relevé de $\tau_{|\partial F}$ par ϕ_F soit $\tau_{|\Delta_{-1}}$), tout en conservant les 3 propriétés déjà annoncées dans le lemme 7. Pour cela, remarquons que l'application $\tau_{|\partial F}$ est bien sûr un homéomorphisme épais de ∂F. On considère alors l'homéomorphisme de Δ_{-1}, $\tilde{\tau}_F$, fourni en appliquant le troisième point du lemme 7 avec $F' = F$ et $g = \tau_{|\partial F}$: il est sans point fixe et déplace tous les points vers le bas. Or tous les homéomorphismes sans point fixe d'une droite sont conjugués : on peut trouver un homéomorphisme de Δ_{-1}, que l'on note f_F, tel que $f_F \circ \tilde{\tau}_F \circ f_F^{-1} = \tau$. L'astuce d'Alexander permet ensuite de prolonger canoniquement f_F en un homéomorphisme de la bande $\mathrm{Adh}(O_0)$, toujours noté f_F, qui est l'identité sur Δ_1. On obtient alors la propriété supplémentaire voulue en composant ϕ_F par cet homéomorphisme.

Il reste un problème à résoudre : en chemin, on a *a priori* perdu la propriété de continuité du lemme 7. Soit F_n une suite de compacts convergeant vers F_∞ de manière équi-LC ; il est clair que la suite $(F_n, \tau_{|F_n})$ converge vers $(F_\infty, \tau_{|F_\infty})$ dans $\mathcal{P}_{\text{épais}}$. D'après le lemme 8, $\tilde{\tau}_{F_n}$ converge alors vers $\tilde{\tau}_{F_\infty}$. Par ailleurs, il est facile de montrer qu'on peut choisir l'homéomorphisme f_F pour qu'il dépende continûment de $\tilde{\tau}_F$ (voir par exemple [11], p 18). Dans ce cas, par continuité de l'astuce d'Alexander, la suite f_{F_n} converge vers f_{F_∞}, et la propriété 3 du lemme est préservée lors de la modification des applications ϕ_F.

Construction de h_F. Grâce à la propriété de semi-conjugaison obtenue au paragraphe précédent, il n'y a plus qu'à recoller les trois morceaux en posant :

$$h_F = \begin{cases} \tau & \text{sur } F\,; \\ \phi_F \circ R \circ \phi_F^{-1} & \text{sur } O_F\,; \\ \tau^{-1} & \text{sur } \{x \geq 1\}. \end{cases}$$

Continuité. La condition 3 de la proposition 4 est obtenue automatiquement à l'aide de la continuité de ϕ_F (propriété 2 du lemme 7).

4.4 Compatibilité

Nous allons maintenant montrer que la condition 2 de la proposition 4 est respectée.

Preuve de la compatibilité I : description de l'ensemble singulier de h_F. On montre dans cette partie que si h_F et $h_{F'}$ sont conjugués alors $\tau_{|F}$ et $\tau_{|F'}$ sont conjugués par un homéomorphisme épais.

On peut définir *l'ensemble positivement singulier* d'un homéomorphisme h (du plan) de la façon suivante : c'est l'ensemble noté $\mathrm{Sing}^+(h)$ des points x tels qu'il existe un point y qui n'est pas dans l'orbite positive de x (pour tout $n \geq 0, h^n(x) \neq y$) mais qui est néanmoins dans l'adhérence de tout ouvert U positivement invariant (*i.e.* $h(U) \subset U$) contenant x (de manière plus visuelle, c'est aussi l'ensemble des points de discontinuité de l'application qui à un point du plan associe sa demi-orbite positive, pour la topologie de Hausdorff définie à l'aide de la métrique sphérique). On définit de même *l'ensemble négativement singulier* $\mathrm{Sing}^-(h)$ de h comme étant l'ensemble positivement singulier de h^{-1}. Ce sont des notions dynamiques, c'est-à-dire que pour tout homéomorphisme g, on a par exemple $\mathrm{Sing}^+(g \circ h \circ g^{-1}) = g(\mathrm{Sing}^+(h))$.

Il est facile de voir que pour tout compact F, on a $\mathrm{Sing}^+(h_F) = \partial F$ et $\mathrm{Sing}^-(h_F) = \Delta_1$. Soit maintenant F et F' deux compacts tels que h_F et h'_F soient conjugués par un homéomorphisme g. D'après ce qui précède, on a alors $g(\partial F) = \partial F'$ et $g(\Delta_1) = \Delta_1$; donc aussi $g(F) = F'$, et g réalise la conjugaison épaisse entre $\tau_{|F}$ et $\tau_{|F'}$.

Preuve de la compatibilité II : une propriété du centralisateur de l'homéomorphisme de Reeb. Soit F et F' deux compacts et supposons que les restrictions de la translation τ à F et F' sont conjuguées par un homéomorphisme épais g. On veut montrer que g s'étend en un homéomorphisme du plan conjugant h_F et $h_{F'}$.

On peut appliquer le troisième point du lemme 7 pour relever g en un homéomorphisme $\tilde{g}$ de Δ_{-1}. Le cube suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& \Delta_{-1} \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dd, "\phi_{F'}"] & & \Delta_{-1} \arrow[dd, "\phi_{F'}"] \\
\Delta_{-1} \arrow[ur, "\tilde{g}"] \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dd, "\phi_F"] & & \Delta_{-1} \arrow[ur, "\tilde{g}"] \arrow[dd, "\phi_F"] & \\
& F' \arrow[rr, "\tau"] & & F' \\
F \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\tau"] & & F \arrow[ur, "g"] &
\end{tikzcd}$$

En effet, la commutativité des faces avant et arrière vient de la propriété de semi-conjugaison obtenue à la partie 4.3 ; celle des faces latérales dit que $\tilde{g}$ relève g, et celle du dessous est l'hypothèse de conjugaison. On en déduit que la face supérieure commute également : $\tilde{g}$ commute avec τ. On note $\mathrm{Com}(R)$, (respectivement $\mathrm{Com}(R_{|\Delta_{-1}})$ et $\mathrm{Com}(R_{|\Delta_1})$) l'ensemble des homéomorphismes du plan (resp. de Δ_{-1}, de Δ_1) qui préservent l'orientation et commutent à (la restriction de) R. Nous allons maintenant utiliser le fait que le centralisateur de l'homéomorphisme de Reeb est assez riche, puisqu'on a le lemme suivant (la preuve est donnée plus bas) :

Lemme 9. *L'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Com}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Com}(R_{|\Delta_{-1}}) \times \mathrm{Com}(R_{|\Delta_1}) \\ g & \longmapsto & (g_{|\Delta_{-1}}, g_{|\Delta_1}) \end{array}$$

est surjective.

On peut ainsi étendre $\tilde{g}$ en un homéomorphisme $\tilde{G}$ de $\mathrm{Adh}(O_0)$ qui est l'identité sur Δ_1 et commute à R. Posons maintenant :

$$G = \begin{cases} g & \text{sur } F\,; \\ \phi_{F'} \circ \tilde{G} \circ \phi_F^{-1} & \text{sur } O_F\,; \\ \text{l'identité} & \text{sur } \{x \geq 1\}. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier (on peut par exemple tracer un nouveau cube commutatif) que G est un homéomorphisme du plan qui conjugue h_F et $h_{F'}$, ce qui termine la preuve de la compatibilité.

Preuve du lemme 9 — La démonstration est très simple si on utilise une définition adaptée de l'homéomorphisme de Reeb : celui-ci est en effet conjugué à la restriction de l'homéomorphisme linéaire hyperbolique $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ au trois-quart de plan $\{x > 0$ ou $y > 0\}$ (voir [11], p 128). Dans ces nouvelles coordonnées, la droite Δ_{-1} devient la demi-droite $\{0\}\times]0, +\infty[$ et $\Delta_1 =]0, +\infty[\times\{0\}$.

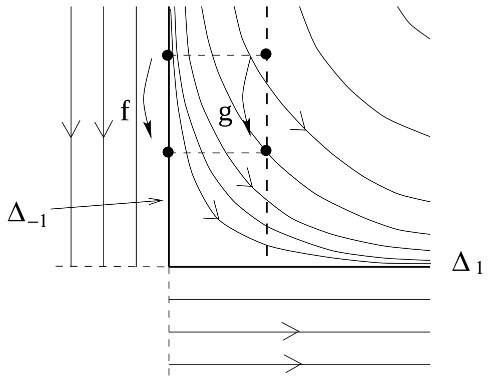

FIG. 4: Construction d'un homéomorphisme commutant à Reeb.

Soit f un homéomorphisme de la droite Δ_{-1} qui commute à la restriction de R. On étend f au demi-plan $\{y > 0\}$ comme indiqué sur la figure 4, et au quart de plan restant par l'identité. L'homéomorphisme g ainsi défini commute avec R et vaut l'identité sur Δ_1. Si f' est un homéomorphisme de Δ_1 commutant aussi avec R, on construit de la même manière une extension g' de f' qui commute avec R et qui est l'identité sur Δ_{-1}. L'homéomorphisme $g \circ g'$ étend à la fois f et f' et commute à R, ce qui achève la preuve. $\square$

Pour terminer cette partie, remarquons que dans la construction on pourrait remplacer le modèle R par n'importe quel homéomorphisme de Brouwer R' qui coïncide avec τ sur Δ_{-1} et avec τ^{-1} sur Δ_1. Dans ce cas, on obtient encore une famille continue $(h_F)_{F\in\mathcal{K}^*}$ d'homéomorphismes de Brouwer ; par contre la compatibilité n'est pas nécessairement vérifiée. Par exemple, si on utilise l'homéomorphisme R' décrit dans [12], la deuxième partie de la preuve de la compatibilité échoue, parce que R' n'a pas un centralisateur « assez gros ».

5 Preuve du théorème

Dans la partie 3 on a construit une famille de fermés $(F_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}} \subset \mathcal{K}^*$, et dans la partie 4 une famille d'homéomorphismes $(h_F)_{F\in\mathcal{K}^*}$. On pose maintenant $h_\alpha = h_{F_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$. Il est facile de voir que $h_\alpha \in \mathcal{B}_2$.

La continuité de la construction vient de la propriété 3 de la proposition 4, et du lemme 5.

De la proposition 3 on déduit l'injectivité de l'application $\alpha \mapsto F_\alpha$; et l'application $F \mapsto h_F$ est également injective puisque $\partial F = \mathrm{Sing}^+(h_F)$ (partie 4.4). Donc $\alpha \mapsto h_\alpha$ l'est aussi.

Soient α et β deux éléments de $\mathcal{C}$ et supposons que $\alpha \sim \beta$. D'après la proposition 3, il existe alors un homéomorphisme entre les ensembles K_α et K_β, que l'on peut relever en un homéomorphisme g entre F_α et F_β. On voit facilement que g est épais[2], et il conjugue les restrictions de τ à F_α et F_β puisqu'il a été obtenu par relèvement : la proposition 4 entraîne que h_α et h_β sont conjugués. La réciproque s'obtient par un cheminement symétrique.

6 Complément

Le but de cette partie est d'expliquer brièvement comment on peut mettre le Cantor construit précédemment dans un arc d'homéomorphismes de Brouwer.

Soient tout d'abord $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$; pour passer du compact F_α à F_β, il faut changer un certain nombre de disques en segments et vice-versa. Ceci peut être fait de manière continue, en utilisant des ellipses dont l'excentricité passe de 0 à 1 ; on obtient ainsi un arc $\gamma_{\alpha,\beta}$ de F_α à F_β dans $\mathcal{K}^*$.

Soit maintenant j n'importe quel homéomorphisme entre $\mathcal{C}$ et le Cantor triadique $\mathcal{C}'$ (*i.e.* le sous-ensemble de l'intervalle $[0,1]$ formé des nombres qui possèdent un développement en base 3 dans lequel il n'apparaît aucun 1). Pour $t \in \mathcal{C}'$, on récupère la construction précédente en posant $F_t = F_{j^{-1}(t)}$. Si $]t_0, t_1[$ est un intervalle ouvert composante connexe du complémentaire de $\mathcal{C}'$, on prolonge la construction pour $t \in]t_0, t_1[$ à l'aide de l'arc $\gamma_{j^{-1}(t_0), j^{-1}(t_1)}$. L'application $t \mapsto F_t$ ainsi définie est injective et continue pour la topologie équi-LC. En posant $h_t = h_{F_t}$, on obtient un arc d'homéomorphismes de Brouwer qui traverse une infinité non dénombrable de classes de conjugaison.

7 Question

Nous avons montré que les homéomorphismes de Brouwer obtenus en recollant deux translations sont encore trop compliqués pour être classifiés ; la question suivante est :

[2] C'est ici que le résultat de Homma (théorème 6) nous simplifie la vie, en nous évitant d'avoir à expliciter un prolongement de g à un voisinage de F_α.

Question. *Peut-on classifier les homéomorphismes de Brouwer dont l'ensemble singulier est la réunion de deux droites ?*

Au vu des exemples décrits dans [15] et [12], on peut conjecturer que la réponse est ici encore négative... Notons que cette question semble délicate : par exemple, bien qu'on ait une classification, *à conjugaison de flots près*, des flots sans point fixe dont l'ensemble singulier est la réunion de deux droites ([13]), il paraît déjà très difficile de savoir à quelle condition les temps 1 de tels flots sont conjugués *en tant qu'homéomorphismes.*

8 Remerciements

Le résultat décrit ici n'aurait pas vu le jour sans la question initiale d'Etienne Ghys, qui a eu la gentillesse de m'expliquer le point de vue décrit dans les deux premières parties et m'a permis, *via* Pierre de la Harpe et E. G. Effros, de trouver les références de théorie descriptive des ensembles. Lucien Guillou m'a indiqué la référence [7] et m'a incité à mettre le Cantor dans un arc (partie 6). Adrien Douady m'a signalé qu'il existe une famille de polynômes complexes cubiques, appelés *polynômes de Fibonacci*, qui est homéomorphe au solénoïde diadique, et dans laquelle les classes de conjugaison topologique sont exactement les composantes connexes par arcs du solénoïde (voir l'article de B. Branner, [2]). Un raisonnement analogue à la preuve du corollaire 2 montre, là aussi, la non-existence d'une classification borélienne.

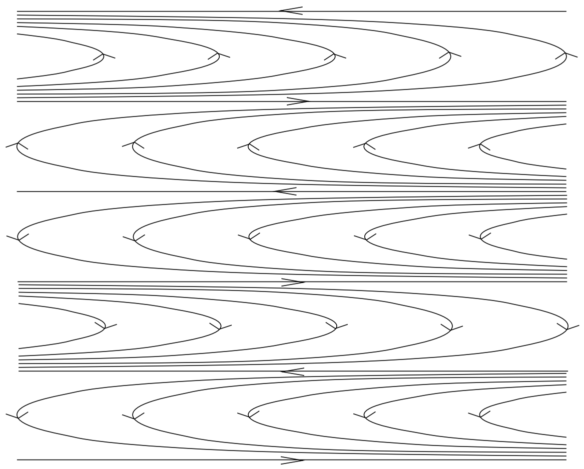

FIG. 5: Un des homéomorphismes construits par G. Levitt

Je remercie également Gilbert Levitt de m'avoir montré une construction élémentaire d'une copie dans $\mathcal{B}$ de la partition du Cantor en orbites du décalage, utilisant la complexité des feuilletages du plan. En voici l'idée : pour tout $p \in \mathbb{Z}$, appelons Δ_p la droite horizontale d'ordonnée p ; on considère l'ensemble K des homéomorphismes de Brouwer h définis de la manière suivante : sur chaque droite Δ_{2p}, h est la translation $(x, y) \mapsto (x+1, y)$; sur les droites Δ_{2p+1}, $h(x, y) = (x-1, y)$. Sur chacune des bandes restantes, on peut compléter la construction par un homéomorphisme de Reeb orienté soit vers la droite, soit vers la gauche (voir l'exemple figure 5). L'ensemble K est alors un ensemble de Cantor dans $\mathcal{B}$, et l'homéomorphisme naturel entre K et $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ est à très peu de chose près compatible avec les relations d'équivalence respectives.

Références

[1] BONINO M. *Sur l'espace des homéomorphismes de Brouwer.* Thèse, Institut Fourier, Grenoble (1997).

[2] BRANNER B. Cubic polynomials : turning around the connected locus. In Goldberg L. R., editor, *Topological methods in modern mathematics, proceedings of a symposium in honor of John Milnor's sixtieth birthday, Stony Brooks, USA*, 391–427. Publish or Perish (1993).

[3] BROUWER L. E. J. Beweis des ebenen translationssatzes. *Math. Ann.*, **72** (1912), 37–54.

[4] EFFROS E. G. Transformation groups and C^*-algebras. *Ann. of Math.*, **81** (1965), 38–55.

[5] GODBILLON C. et Reeb G. Fibrés sur le branchement simple. *Ens. Math. II*, ser. **12** (1966), 277–287.

[6] GUILLOU L. Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff. *Topology*, **33** (1994), 331–351.

[7] HOMMA T. An extension of the Jordan Curve Theorem. *Yokohama Math. J.*, **1** (1953), 125–129.

[8] KATOK A. et HASSELBLATT B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Cambridge University Press (1995).

[9] KECHRIS A. S. Topology and descriptive set theory. *Topology and its Appl.*, **58** (1994), 195–222.

[10] KECHRIS A. S. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag (1995).

[11] Le Roux F. *Etude topologique de l'espace des homéomorphismes de Brouwer.* Thèse, Institut Fourier, Grenoble (1997).

[12] Le Roux F. A non flowable Brouwer homeomorphism which preserves each leaf of the Reeb foliation. *Manuscrit* (1997).

[13] Le Roux F. Classes de conjugaison des flots topologiquement équivalents au flot de Reeb. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **328**, Série 1 (1999), 45–50.

[14] Michael E. Continuous selections I. *Ann. of Math.*, **63** (1956), 361–382.

[15] Nakayama H. A non flowable plane homeomorphism whose non Hausdorff set consists of two disjoint lines. *Houston J. of Math.*, **21** (1995), 569–572.