Energy Flow in Extended Gradient Partial Differential Equations

Th. Gallay
Université de Paris-Sud
Mathématique, UMR 8628
Bâtiment 425
F-91405 Orsay, France
Thierry.Gallay@math.u-psud.fr

S. Slijepčević
Department of Mathematics
University of Zagreb
Bijenička 30
10000 Zagreb, Croatia
slijepce@math.hr

Résumé. On considère l'équation hyperbolique amortie $u_{tt} + u_t = \Delta u + F(x,u)$ dans $\mathbf{R}^N$, où $N \leq 2$ et F est une non-linéarité localement lipschitzienne. Cette équation définit un système dynamique formellement gradient dans l'espace d'énergie uniformément local $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R}^N) \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R}^N)$. A l'aide d'estimations d'énergie locales, on montre que ce système ne possède pas d'orbites périodiques, en dehors des points d'équilibre, et on borne inférieurement le temps nécessaire à une trajectoire bornée pour revenir dans un petit voisinage de son point de départ. On montre également que tout point non stationnaire possède un voisinage qui n'est, en moyenne, jamais visité par les trajectoires du système, et on en déduit que seuls les points d'équilibre sont uniformément récurrents. Des contre-exemples indiquent que ces résultats ne peuvent pas se généraliser aux dimensions supérieures.

Abstract. As an example of an extended, formally gradient dynamical system, we consider the damped hyperbolic equation $u_{tt} + u_t = \Delta u + F(x,u)$ in $\mathbf{R}^N$, where F is a locally Lipschitz nonlinearity. Using local energy estimates, we study the semiflow defined by this equation in the uniformly local energy space $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R}^N) \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{ul}}(\mathbf{R}^N)$. If $N \leq 2$, we show in particular that there exist no periodic orbits, except for equilibria, and we give a lower bound on the time needed for a bounded trajectory to return in a small neighborhood of the initial point. We also prove that any nonequilibrium point has a neighborhood which is never visited on average by the trajectories of the system, and we deduce that the only uniformly recurrent points are equilibria. Counter-examples are given which show that these results cannot be extended to higher space dimensions.

Keywords : Extended gradient dynamical systems, periodic solutions, recurrence, hyperbolic equations with damping, energy flow.

AMS classification codes (1991) : 35L70, 35B10, 35B40, 58F39, 58F11