Sur une classe de fonctions arithmétiques liées aux diviseurs d'un entier

Régis de la Bretèche

Laboratoire d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique d'Orsay,
Université Paris XI, 91405 ORSAY cedex, France

Résumé : Soit $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ la suite croissante des diviseurs d'un entier générique n. Nous étudions l'élément maximal E d'une classe de fonction arithmétique qui contient, entre autres, la fonction d'Erdős f définie par $f(n) := \mathrm{card}\{i \in [1, \tau(n)[: \quad (d_i, d_{i+1}) = 1\}$ et les fonctions κ_s définies par $\kappa_s(n) := \mathrm{card}\{d \mid n : \quad (d, s) = 1, \quad d(d+s) \mid n\}$. Dans le prolongement de la méthode de Tenenbaum [T91], nous montrons, en particulier, l'inégalité

$$E(n) \leq \tau(n)^c$$

avec

$$c := \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{2}{3} = 0,9182958\ldots.$$

Grâce à un résultat combinatoire de Baranyai, nous établissons l'optimalité de cet exposant.

Abstract : Let $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ be the increasing sequence of divisors of an integer n. We study the maximal element E of an class of arithmetic functions. The class has, among others, the Erdős's function f defined by $f(n) := \mathrm{card}\{i \in [1, \tau(n)[: \quad (d_i, d_{i+1}) = 1\}$ and the functions κ_s defined by $\kappa_s(n) := \mathrm{card}\{d \mid n : \quad (d, s) = 1, \quad d(d+s) \mid n\}$. Developping the Tenenbaum's method [T91], we show, in particular, the inequality

$$E(n) \leq \tau(n)^c$$

with

$$c := \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{2}{3} = 0,9182958\ldots.$$

By a combinatorial result of Baranyai, we state the optimality of this exponent.

Keywords : distribution of divisors, the propinquity of divisors.

Classification AMS : 11N25, 11N37.

Adresse électronique : breteche @ math.u-psud.fr