Sur l'irréductibilité et la dimension du schéma des structures de module

Stéphane GINOUILLAC

Laboratoire d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique, URA D 0752
Bâtiment 425, Université Paris–Sud, 91 405 ORSAY CEDEX, France.

Stephane.GINOUILLAC@math.u-psud.fr

— Avril 1999 —

Résumé : *Nous étudions l'irréductibilité et la dimension du schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ qui paramètre les structures de $\Bbbk[X^0, \cdots, X^n]$–module gradué dont on peut munir la somme d'espaces vectoriels $E = \Bbbk^p \oplus \Bbbk^q \oplus \Bbbk^r$. Dans le cas $n = 3$, cette question constitue une étape importante dans l'étude du schéma de Hilbert, c'est-à-dire dans la classification des courbes gauches. Nos résultats nous permettent à ce sujet de démontrer presque entièrement une conjecture de M. Martin-Deschamps et D. Perrin.*

On the irreducibility and the dimension of the schemes of module structures

Abstract : *We study the irreducibility and the dimension of the scheme $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ that parametrizes the structures of $\Bbbk[X^0, \cdots, X^n]$–graded module that can be put on a given sum $E = \Bbbk^p \oplus \Bbbk^q \oplus \Bbbk^r$ of vector spaces. In the case $n = 3$, this study forms an important step towards the classification of space curves by the Hilbert scheme. In this direction, our results allow us to prove almost entirely a conjecture of M. Martin-Deschamps et D. Perrin.*

Mots clefs : Géométrie algébrique, module gradué, irréductibilité, stratification, paramétrisation, module de Rao, courbes gauches, schéma de Hilbert.

Key words : Algebraic geometry, graded module, irreducibility, stratification, parametrization, Rao module, space curves, Hilbert scheme.

Classification AMS : 14C05 (Paramétrisation, schéma de Hilbert), 14H50 (Courbes gauches), 14M05 (Variétés définies par des conditions d'anneaux), 13A02, 16W50 (Anneaux et modules gradués).

AMS classification : 14C05 (Parametrization, Hilbert scheme), 14H50 (Space curves), 14M05 (Varieties defined by ring conditions), 13A02, 16W50 (Graded rings and modules).

Sommaire

1 Introduction. **1**

1.1 Schémas des structures de module. 2

1.2 Application à la classification des courbes gauches. 3

1.3 Résultats. 5

2 Principe de la démonstration. **6**

2.1 La matrice V^n et les relations de commutation. 6

2.2 Stratification du schéma $\widehat{E}^n_{p,q}$. 7

3 Construction des stratifications. **10**

3.1 Stratification concernant les matrices. 10

3.2 Stratification concernant les applications linéaires. 11

3.3 Stratification concernant les structures de module. 11

4 Familles décomposées. **13**

4.1 Décomposition de familles de matrices. 13

4.2 Décomposition de familles d'applications linéaires. 15

4.3 Décompositions de structures de module. 15

5 Majoration de la dimension des strates. **18**

6 Minoration du rang de v_0. **20**

6.1 La minoration. 20

6.2 Un critère d'injectivité. 21

6.3 Démonstration du théorème 1.8. 22

7 Conclusion. **22**

7.1 Démonstration du théorème 1.7. 23

7.2 Démonstration du théorème 1.9. 24

Sur l'irréductibilité et la dimension du schéma des structures de module

Stéphane GINOUILLAC (†)

Laboratoire d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique, URA D 0752
Bâtiment 425, Université Paris–Sud, 91 405 ORSAY CEDEX, France.

Stephane.GINOUILLAC@math.u-psud.fr

Résumé : *Nous étudions l'irréductibilité et la dimension du schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ qui paramètre les structures de $\Bbbk[X^0, \cdots, X^n]$–module gradué dont on peut munir la somme d'espaces vectoriels $E = \Bbbk^p \oplus \Bbbk^q \oplus \Bbbk^r$. Dans le cas $n = 3$, cette question constitue une étape importante dans l'étude du schéma de Hilbert, c'est-à-dire dans la classification des courbes gauches. Nos résultats nous permettent à ce sujet de démontrer presque entièrement une conjecture de M. Martin-Deschamps et D. Perrin.*

On the irreducibility and the dimension of the schemes of module structures

Abstract : *We study the irreducibility and the dimension of the scheme $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ that parametrizes the structures of $\Bbbk[X^0, \cdots, X^n]$–graded module that can be put on a given sum $E = \Bbbk^p \oplus \Bbbk^q \oplus \Bbbk^r$ of vector spaces. In the case $n = 3$, this study forms an important step towards the classification of space curves by the Hilbert scheme. In this direction, our results allow us to prove almost entirely a conjecture of M. Martin-Deschamps et D. Perrin.*

1 Introduction.

Pour classifier les courbes gauches algébriques de degré d et genre g, sans point isolé ni immergé et définies sur un corps $\Bbbk$ algébriquement clos, on étudie le schéma de Hilbert $H_{d,g}$. M. Martin-Deschamps et D. Perrin ont montré qu'une étape importante de son étude, dite «*étape du bas*» (cf. [MDP–1]), consiste à décrire certains schémas affines que l'on appelle «schémas des structures de modules» et que l'on note $\widehat{E}_\rho$. Ces auteurs donnent en particulier une condition nécessaire pour que le schéma $\widehat{E}_\rho$ soit irréductible, dont ils conjecturent qu'elle est également suffisante (cf. [MDP–2]).

(†). L'auteur appartient également à l'équipe Modal'X, Bâtiment G, Université Paris-X Nanterre, 200 Av. de la république, 92 201 Nanterre cedex, France.

Nous démontrons ici cette conjecture presque entièrement, ne laissant qu'un nombre restreint de cas indéterminés. Pour cela, nous introduisons des schémas $\widehat{E}^n_\rho$ qui généralisent les schémas $\widehat{E}_\rho$, lesquels correspondent au cas $n = 3$, afin de raisonner par récurrence sur n. Nous établissons alors une condition suffisante d'irréductibilité pour chaque valeur de n. De plus, nous décrivons la composante de dimension maximale du schéma $\widehat{E}^n_\rho$ dans certains des cas où il n'est pas irréductible, ce qui fournit également des résultats nouveaux concernant le schéma de Hilbert dans le cas $n = 3$.

1.1 Schémas des structures de module.

Soit $\Bbbk$ un corps infini et soit ρ une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ à support fini. Pour $m \in \mathbb{Z}$, on note E_m le $\Bbbk$–espace vectoriel $\Bbbk^{\rho(m)}$ et on pose $E = \prod_{m\in\mathbb{Z}} E_m$. On se donne par ailleurs une infinité d'indéterminées $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$. On pose $R^{-1} = \Bbbk$, $R^n = \Bbbk[X^0, \cdots, X^n]$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $R^\infty = \Bbbk[X^i, i \in \mathbb{N}]$. Pour $d \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, \infty\}$, on note R^n_d le sous-espace vectoriel de R^n formé par les polynômes homogènes de degré d.

Remarque. Nous noterons de façon systématique les paramètres relatifs à ρ en indice et ceux relatifs à n en exposant. La notation inhabituelle des indéterminées X^i que cette convention entraîne ne pourra pas créer de confusion, car ne considérons à aucun moment des puissances de polynômes.

Munir E d'une **structure de R^n– module gradué** consiste à associer à chaque polynôme P homogène de degré d et à chaque entier $m \in \mathbb{Z}$ une application linéaire $P_m : E_m \to E_{m+d}$ de telle sorte qu'au produit des polynômes corresponde la composition des applications. Si l'on fixe une base $B = (X^0, \cdots, X^n)$ de l'algèbre R^n, il suffit de se donner les applications linéaires $X^i_m : E_m \to E_{m+1}$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $m \in \mathbb{Z}$; ces applications doivent seulement vérifier les relations qui traduisent la commutativité de l'algèbre R^n, c'est-à-dire pour tout $m \in \mathbb{Z}$ les $\frac{n(n+1)}{2}$ relations de la forme :

$$X^j_{m+1} \cdot X^i_m - X^i_{m+1} \cdot X^j_m = 0 \tag{1.1}$$

que l'on obtient pour les couples (i, j) vérifiant $0 \leqslant i < j \leqslant n$. La base B étant fixée, on peut identifier la famille $(X^i_m)^{i\in[\![0,n]\!]}_{m\in\mathbb{Z}}$ à un point de l'espace $H = \prod_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_\Bbbk\big[R^n_1, \mathrm{Hom}_\Bbbk(E_m, E_{m+1})\big]$. On pose alors la définition suivante :

Définition 1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\widehat{E}^n_\rho$ et on appelle* **schéma des structures de module** *le sous-schéma fermé de l'espace affine H défini par les équations* (1.1).

Les équations (1.1) entraînent que pour tout couple (P, Q) de polynômes de degré 1 et pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on a $P_{m+1} \cdot Q_m = Q_{m+1} \cdot P_m$, donc la définition 1.1 ne dépend pas de la base B choisie. L'espace H a pour dimension $(n + 1)\sigma$ avec $\sigma = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(m)\rho(m + 1)$ et $\widehat{E}^n_\rho$ est un sous-schéma de H défini par $\frac{n(n+1)}{2}\tau$ équations homogènes quadratiques avec $\tau = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(m)\rho(m+2)$, donc toutes les composantes irréductibles de $\widehat{E}^n_\rho$ sont de dimension supérieure ou égale à $\Delta = (n + 1)\sigma - \frac{n(n+1)}{2}\tau$. Enfin, d'après ses équations, $\widehat{E}^n_\rho$ est un cône dans H.

Quitte à décomposer $\widehat{E}^n_\rho$ en produit direct de schémas similaires, on peut se ramener au cas où le support de ρ est connexe, c'est-à-dire est un intervalle de $\mathbb{Z}$; on peut également supposer que c'est l'intervalle $[\![0, l-1]\!]$. On appelle l la **largeur** de ρ et on note aussi $\widehat{E}^n_\rho$ sous la forme $\widehat{E}^n_{\rho(0),\rho(1),\ldots,\rho(l-1)}$. Les exemples les plus simples sont les suivants, pour lesquels il n'y a pas de relation de commutation :

Exemple 1.2. *Pour $n=0$ avec l quelconque, le schéma $\widehat{E}^0_\rho$ est simplement l'espace affine $H = \prod_{m\in \mathrm{Supp}\,(\rho)} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\big(E_m, E_{m+1}\big)$ de dimension $\sigma = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho(m)\,\rho(m+1)$. Pour $l=1$ avec n quelconque, le schéma $\widehat{E}^n_\rho$ est réduit à un point. Enfin pour $l=2$, on pose $\rho(0)=p$ et $\rho(1)=q$; le schéma $\widehat{E}^n_\rho = \widehat{E}^n_{p,q}$ est isomorphe à l'espace affine $\big[\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E_0,E_1)\big]^{n+1}$ de dimension $(n+1)\,pq$.*

La connaissance des schémas $\widehat{E}^n_\rho$ pour ces petites valeurs de n ou l permet d'initialiser des récurrences portant sur l'une ou l'autre de ces variables. Lorsque l'on a simultanément $n \geqslant 1$ et $l \geqslant 3$, on a $\tau \neq 0$ et le schéma $\widehat{E}^n_\rho$ est un cône strict, donc singulier, de H.

Nous nous concentrons ici sur le cas de la largeur 3. On pose $\rho(0)=p, \rho(1)=q$ et $\rho(2)=r$; on a alors $\sigma = pq+qr$, $\tau = pr$ et $\Delta = \Delta^n_{p,q,r} = (n+1)\times\big(pq+qr-\frac{n}{2}\,pr\big)$. Là encore, le premier cas qui se présente, à savoir le cas $l=3$ avec $n=1$, est parfaitement connu :

Exemple 1.3. *Le schéma $\widehat{E}^1_{p,q,r}$ est l'ensemble des quadruplets de matrices $(X_0, Y_0\,;\,X_1, Y_1)$ de $M^2_{q,p}\times M^2_{r,q}$ qui vérifient $Y_1\cdot X_0 = X_1\cdot Y_0$. Si l'on pose $U_1 = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1\end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} Y_0 \\ -X_0\end{pmatrix}$, ce schéma se réalise comme un schéma de complexes, défini par la seule relation $U_1\cdot V_0 = 0$. On en déduit que ses composantes irréductibles sont en bijection avec les couples $(\mathrm{rg}\,U_1, \mathrm{rg}\,V_0)$ maximaux, qu'il est irréductible si et seulement si on a $2\,q \geqslant p+r$ et qu'enfin si cette condition est vérifiée il est génériquement lisse, intersection complète et de dimension $\Delta^1_{p,q,r} = 2\,p\,q + 2\,q\,r - p\,r$.*

Nous généralisons ici les résultats de l'exemple 1.3 au cas où n est quelconque en largeur 3. On peut encore définir des matrices U_1 et V_0 analogues aux précédentes (cf. paragraphe 2.1), mais la difficulté qui apparaît alors est que pour $n \geqslant 2$ l'équation $U_1\cdot V_0 = 0$ ne correspond plus à un schéma de complexes.

Notons pour finir que les groupes $GL_{\Bbbk}(R^n_1)$ et $GL_{\Bbbk}(E_m)$ pour $m\in\mathbb{Z}$ agissent naturellement sur le schéma $\widehat{E}^n_\rho$ par changement de base. De plus, la flèche qui à un module $M \in \widehat{E}^n_\rho$ associe son module dual $M^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M,\Bbbk)$ établit un isomorphisme entre les schémas $\widehat{E}^n_\rho$ et $\widehat{E}^n_{\rho^*}$, où ρ^* est la fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\rho^*(m) = \rho(-m)$. On en déduit en largeur 3 que les schémas $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ et $\widehat{E}^n_{r,q,p}$ sont isomorphes pour tout triplet $(p,q,r)\in\mathbb{N}^{*3}$.

1.2 Application à la classification des courbes gauches.

On suppose spécifiquement dans ce paragraphe que le corps $\Bbbk$ est algébriquement clos. On note $\mathbb{P}^3$ l'espace projectif de dimension 3 sur $\Bbbk$ et on appelle **courbe gauche** un sous-schéma de $\mathbb{P}^3$ localement de Cohen-Macaulay et de pure dimension 1, c'est-à-dire sans composante ponctuelle isolée ni immergée. Soit C une telle courbe, on note $\mathcal{J}_C$ son faisceau d'idéaux. Les conditions qui précèdent assurent que l'on a $H^1\mathcal{J}_C(n) = 0$ pour $n \gg 0$ aussi bien que pour $n \ll 0$. On note enfin $H_{d,g}$ le schéma de Hilbert des courbes de degré d et genre g.

Pour étudier $H_{d,g}$, Mireille Martin-Deschamps et Daniel Perrin proposent la démarche suivante (cf. [MDP–1]) : ils associent à chaque courbe C de degré d et genre g deux fonctions γ et ρ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ à support fini, appellées respectivement le caractère de postulation et la fonction de Rao de la courbe, qui déterminent toute sa cohomologie, c'est-à-dire toutes les dimensions des espaces $H^i\mathcal{J}_C(m)$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Ces auteurs définissent de plus des schémas $H_{\gamma,\rho}$ qui paramètrent les familles plates de courbes à cohomologie constante et qui permettent de stratifier les schémas $H_{d,g}$. Ils considèrent alors l'invariant non plus numérique mais algébrique qu'est le **module de Rao** de la courbe C, c'est-à-dire le module $M_C = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} H^1\mathcal{J}_C(m)$; c'est un $\Bbbk[X^0, X^1, X^2, X^3]$–module gradué de longueur finie, qui caractérise d'après A. P. Rao les classes de biliaison (resp. de liaison) à décalage près (resp. à décalage et dualité près) (cf. [R]). Ils définissent ensuite un morphisme de foncteurs Φ qui associe à chaque courbe C de $H_{\gamma,\rho}$ son module de Rao M_C et ils montrent que ce morphisme se relève en un morphisme de schémas $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \to \widehat{E}^3_\rho$, où $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ est un fibré localement trivial au-dessus de $H_{\gamma,\rho}$ et où $\widehat{E}^3_\rho$ est le schéma introduit au paragraphe précédent avec $n = 3$. Ils prouvent alors le résultat suivant :

Théorème 1.4. [MDP–1] *Le morphisme $\widehat{\Phi}$ est lisse, ses fibres sont irréductibles et leur dimension est connue (cf. [MDP–1], corollaire IX.3.9, pour une expression explicite).*

Il s'ensuit que l'étude des strates $H_{\gamma,\rho}$ se ramène entièrement à celle des schémas $\widehat{E}^3_\rho$: par exemple, la détermination des composantes, des dimensions ou des singularités des seconds fournit automatiquement un résultat analogue concernant les premiers. Les schémas $\widehat{E}^3_\rho$ étant des espaces affines lorsque ρ est de largeur 1 ou 2, leur étude ne commence véritablement qu'en largeur 3. Les résultats précédemment connus à ce sujet sont les suivants :

Théorème 1.5. [MDP–2] *Soit $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$.*

i) Si on a $4q < \max(6r + p, 6p + r)$ et $(p, q, r) \neq (1, 1, 1)$, le schéma $\widehat{E}^3_{p,q,r}$ possède plusieurs composantes.

ii) Lorsque p et r sont fixés, le schéma $\widehat{E}^3_{p,q,r}$ est irréductible pour q assez grand.

iii) Si le schéma $\widehat{E}^3_{p,q,r}$ est irréductible, il est génériquement lisse, intersection complète et de dimension $\Delta^3_{p,q,r} = 4pq + 4qr - 6pr$, à l'exception des cas particuliers $\widehat{E}^3_{1,1,1}$ et $\widehat{E}^3_{1,2,1}$ qui sont génériquement lisses de dimension 5 et 11 respectivement.

Ce théorème entraîne le corollaire suivant :

Corollaire 1.6. [MDP–2] *Si ρ est une fonction connexe de largeur supérieure ou égale à 4, le schéma $\widehat{E}^3_\rho$ possède plusieurs composantes.*

La question de l'irréductibilité des schémas $\widehat{E}^3_\rho$ ne se pose donc qu'en largeur 3. M. Martin-Deschamps et D. Perrin émettent à ce sujet la conjecture suivante :

Conjecture $(\mathcal{C})$ **:** *La condition nécessaire donnée par le théorème 1.5 (i) est également suffisante : autrement dit, le schéma $\widehat{E}^3_{p,q,r}$ est irréductible si et seulement si on a $4q \geqslant \max(6r + p,\, 6p + r)$ ou $(p, q, r) = (1, 1, 1)$.*

Ces auteurs ne donnent aucun renseignement concernant la lissité générique ou la dimension des composantes des schémas $\widehat{E}^3_\rho$ lorsque ceux-ci ne sont pas irréductibles. Ils décrivent cependant le schéma $\widehat{E}^3_{2,2,2}$, qui possède 6 composantes irréductibles dont 5 sont de dimension 16 et une de dimension 17 (cf. [MDP–2]) et sur lequel nous reviendrons. Signalons enfin que l'étude des schémas $\widehat{E}^3_\rho$ a été également abordée de façon indépendante par E. Ballico et G. Bolondi (cf. [BB]), dont les résultats sont contenus dans ceux qui précèdent.

1.3 Résultats.

Bien que nous ayons essentiellement en vue le cas $n = 3$ et son application aux courbes gauches, nous étudions les schémas $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ dans le cas général afin de raisonner par récurrence sur n. De plus, nous utilisons uniquement le fait que le corps $\Bbbk$ est infini. Nous étudions dans ce cadre la conjecture suivante, qui généralise la conjecture $(\mathcal{C})$:

Conjecture $(\mathcal{C}^n)$ **:** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est irréductible si et seulement si on a :*

$$(1.2)\qquad (n+1)\,q \geqslant \operatorname{Max}\left[\frac{n(n+1)}{2}\,r + p\,,\ \frac{n(n+1)}{2}\,p + r\right],$$

soit $q \geqslant Q_0 = \operatorname{Max}\left(\frac{nr}{2} + \frac{p}{n+1}\,,\ \frac{np}{2} + \frac{r}{n+1}\right)$; il est alors génériquement lisse, intersection complète et de dimension $\Delta^n_{p,q,r} = (n+1)\left(pq + qr - \frac{n}{2}\,pr\right)$.

Pour $n = 0$, le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est toujours un espace affine de dimension $pq + qr$ donc la conjecture $(\mathcal{C}^n)$ ne s'applique pas. Pour $n = 1$, cette conjecture est entièrement vérifiée d'après l'exemple 1.3. Pour $n \geqslant 2$, il est nécessaire d'exclure les cas qui correspondent aux plus petites valeurs de (p,q,r) : on sait déjà que les schémas $\widehat{E}^3_{1,1,1}$ et $\widehat{E}^3_{1,2,1}$ contreviennent à l'énoncé pour $n = 3$ et on vérifie facilement que le schéma $\widehat{E}^n_{1,1,1}$ est irréductible, lisse et de dimension $(n+2)$ pour $n \geqslant 1$ mais ne vérifie pas (1.2) pour $n \geqslant 2$. De même, le schéma $\widehat{E}^n_{1,2,1}$ est irréductible, génériquement lisse et de dimension $2n+5$ pour $n \geqslant 1$ mais ne vérifie pas (1.2) pour $n \geqslant 4$.

Nous établissons dans la suite trois théorèmes qui confortent la conjecture $(\mathcal{C}^n)$, la condition (1.2) apparaissant comme condition suffisante dans le premier et comme condition nécessaire dans les deux autres. Ces théorèmes fournissent également des renseignements sur la dimension des schémas $\widehat{E}^n_{p,q,r}$. Ce sont les suivants :

Théorème 1.7. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(p,r) \in \mathbb{N}^{*2}$. On pose $Q_0 = \operatorname{Max}\left(\frac{nr}{2} + \frac{p}{n+1}\,,\ \frac{np}{2} + \frac{r}{n+1}\right)$, $Q_1 = \operatorname{Min}\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) r + \frac{p}{2}\,,\ \left(n - \frac{1}{2}\right) p + \frac{r}{2}\right]$ et $I_n = \left]\frac{n+1}{2n+3}, \frac{2n+3}{n+1}\right[$. On a $Q_1 > Q_0$ si $r/p \in I_n$ et $Q_1 \leqslant Q_0$ sinon. Soit enfin $q \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{S}$ le lieu singulier de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$.*

(i) Si $r/p \notin I_n$, la condition (1.2) est effectivement suffisante : si on a $q \geqslant Q_0$ le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est irréductible, génériquement lisse, intersection complète et de dimension $\Delta^n_{p,q,r}$. On a de plus $\operatorname{Codim} \mathcal{S} \geqslant 1 + \min\left[(n+1)(q - Q_0)\,,\ 2\,(q - Q_1)\right]$. En particulier, si $q > Q_0$ on a $\operatorname{Codim} \mathcal{S} \geqslant 2$ et le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est normal.

(ii) Si $r/p \in I_n$ on a une condition suffisante plus restrictive : si on a $q \geqslant Q_1$ le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est irréductible, génériquement lisse, intersection complète et de dimension $\Delta^n_{p,q,r}$. On

a de plus Codim $\mathcal{S} \geqslant 1+2(q-Q_1)$. *En particulier, si* $q > Q_1$ *on a* Codim $\mathcal{S} \geqslant 2$ *et le schéma* $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ *est normal.*

En d'autres termes, ce théorème exprime que le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est irréductible et que les conclusions de la conjecture $(\mathcal{C}^n)$ sont vérifiées dès que l'on a $q \geqslant \mathrm{Max}\,(Q_0, Q_1)$. Pour $n = 1$, on a $Q_0 = Q_1$ et on retrouve le fait que la conjecture $(\mathcal{C}^1)$ est entièrement vérifiée. Dans le cas géométrique $n = 3$, la conjecture $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}^3)$ est démontrée lorsque l'on a $r/p \notin\,]4/9\,,\, 9/4[$; pour $r/p \in\,]4/9\,,\, 9/4[$ on obtient que le schéma $\widehat{E}^3_{p,q,r}$ est irréductible dès que l'on a $2q \geqslant \min(5r + p\,,\, 5p + r)$. En ce qui concerne les conditions nécessaires, on a le résultat suivant :

Théorème 1.8. *Soit* $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$. *Si on a* $q \geqslant np - E(p/2)$, *la condition* $(n + 1)\, q \geqslant \frac{n(n+1)}{2}\, p + r$ *contenue dans la relation* (1.2) *est nécessaire pour que* $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ *soit irréductible. De même, si on a* $q \geqslant nr - E(r/2)$, *la condition* $(n + 1)\, q \geqslant \frac{n(n+1)}{2}\, r + p$ *est nécessaire pour que* $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ *soit irréductible.*

Dans le cas $n = 3$, ce résultat est plus faible que le théorème 1.5 *(i)*, qui s'appliquait sans restriction. Il est cependant complété pour les petites valeurs de q par le suivant :

Théorème 1.9. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $(p, r) \in \mathbb{N}^{*2}$. *On pose* $\mathcal{Q}_0 = \min\left[n\,(r - p)\,,\, \frac{nr}{2} - \frac{p}{n+1}\right]$, $\mathcal{Q}_1 = \min\left[n\,(p - r)\,,\, \frac{np}{2} - \frac{r}{n+1}\right]$ *et* $\mathcal{Q} = \max(\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$, *soit* $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0$ *si* $p \leqslant r$ *et* $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1$ *si* $r \leqslant p$. *Soit* $q \in \mathbb{N}^*$. *Si on a* $q \leqslant \mathcal{Q}$, *le schéma* $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ *possède plusieurs composantes et la dimension de chacune d'elles est majorée par* $(n + 1) \times \max(qp, qr)$. *De plus le fermé* $\mathcal{F}_0$ *défini par* $X^i_0 = 0$ *pour* $i \in [\![0, n]\!]$ *si* $p \leqslant r$ *et le fermé* $\mathcal{F}_1$ *défini par* $X^i_1 = 0$ *pour* $i \in [\![0, n]\!]$ *si* $r \leqslant p$ *sont alors des composantes génériquement lisses qui atteignent cette dimension. Enfin, si on a* $q < \mathcal{Q}$, *ce qui entraîne* $r \neq p$, *la composante* $\mathcal{F}_0$ *ou* $\mathcal{F}_1$ *est la seule de dimension maximale.*

On a toujours $\mathcal{Q} \leqslant Q_0$, donc sous l'hypothèse $q \leqslant \mathcal{Q}$ la condition (1.2) n'est jamais vérifiée ; en ce sens, le théorème 1.8 conforte la conjecture $(\mathcal{C}^n)$. On note que lorsque l'on a $r = p$ les deux composantes $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ existent simultanément ; elles ont alors même dimension et leur intersection est réduite au module nul. Dans le cas $n = 3$, on obtient que la dimension des schémas $\widehat{E}^3_{p,q,r}$ est majorée par $4qr$ si on a $4q \leqslant \min\left[12(r-p), 6r-p\right]$ avec $p \leqslant r$ et par $4pq$ si on a $4q \leqslant \min\left[12(p-r), 6p-r\right]$ avec $p \geqslant r$. Enfin, le fait que le schéma $\widehat{E}^3_{2,2,2}$ possède une composante de dimension 17 montre que les conclusions du théorème 1.9 ne s'étendent pas à tous les schémas $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ qui possèdent plusieurs composantes.

2 Principe de la démonstration.

2.1 La matrice V^n et les relations de commutation.

Comme dans l'exemple 1.3, on commence par écrire sous la forme d'une équation matricielle unique $U_1 \cdot V_0 = 0$ les équations (1.1) qui définissent le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$. On rappelle que si

u est une structure de module de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$, pour $P \in R^n_1$ et $m \in \{0,1\}$ on note $P_m : E_m \to E_{m+1}$ l'application linéaire correspondant à la multiplication par P.

Définition 2.1. *Soit $m \in \{0,1\}$. On note u_m l'application de $R^n_1 \otimes_{\Bbbk} E_m$ dans E_{m+1} définie par $u_m(P \otimes e) = P_m(e)$. On note v_m l'application de $\Lambda^2 R^n_1 \otimes_{\Bbbk} E_m$ dans $R^n_1 \otimes_{\Bbbk} E_{m+1}$ définie par $v_m(P \wedge Q \otimes e) = P \otimes Q_m(e) - Q \otimes P_m(e)$.*

La relation $u_1 \cdot v_0 = 0$ exprime que l'on a $P_{m+1} \cdot Q_m = Q_{m+1} \cdot P_m$ pour tout couple $(P,Q) \in (R^n_1)^2$, donc elle équivaut aux équations (1.1). Si l'on fixe une base $B = (X^0, \cdots, X^n)$ de R^n_1, on peut décrire les applications u_1 et v_0 comme des applications linéaires par blocs en décomposant les espaces $R^n_1 \otimes_{\Bbbk} E_1$ et $\Lambda^2 R^n_1 \otimes_{\Bbbk} E_0$ par rapport à B. On pose les notations suivantes :

Définition 2.2. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D^n la matrice diagonale de taille (n,n) à coefficients dans R^∞_1 dont les coefficients diagonaux sont égaux à $-X^0$. On note S^n la matrice-ligne $(X^0\ X^1 \ldots\ X^n)$ de taille $(1, n+1)$ à coefficients dans R^∞_1.*

Par rapport aux décompositions choisies, l'application u_1 se réalise comme l'application linéaire par blocs $S^n(X^0_1, \cdots, X^n_1)$ que l'on obtient en substituant les applications X^i_1 aux indéterminées X^i dans la matrice S^n.

Définition 2.3. *On note V^0 la matrice à 1 ligne et 0 colonne à coefficients dans R^∞_1. Pour $n \geqslant 1$ on pose $V^n = \left(\begin{array}{c|c} S^{n-1}(X^1, \cdots, X^n) & 0 \\ \hline D^n & V^{n-1}(X^1, \cdots, X^n) \end{array}\right)$, où $S^{n-1}(X^1, \cdots, X^n)$ et $V^{n-1}(X^1, \cdots, X^n)$ désignent les matrices obtenues à partir de S^{n-1} et V^{n-1} en substituant les variables $(X^1, \cdots, X^n)$ à $(X^0, \cdots, X^{n-1})$.*

On voit par récurrence que la matrice V^n est de taille $\left(n+1\,,\, \frac{n(n+1)}{2}\right)$. Les premiers exemples sont les suivants, dans lesquels on note (X^0, X^1, X^2, X^3) sous la forme (X, Y, Z, T) pour faciliter la lecture :

$$V^1 = \begin{pmatrix} Y \\ -X \end{pmatrix}, \quad V^2 = \left(\begin{array}{cc|c} Y & Z & 0 \\ \hline -X & 0 & Z \\ 0 & -X & -Y \end{array}\right), \quad V^3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} Y & Z & T & 0 & 0 & 0 \\ \hline -X & 0 & 0 & Z & T & 0 \\ 0 & -X & 0 & -Y & 0 & T \\ 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z \end{array}\right).$$

Par rapport à la base B, on a $v_0 = V^n(X^0_0, \cdots, X^n_0)$. Si l'on écrit l'équation $u_1 \cdot v_0 = 0$ sous la forme $S^n(X^0_1, \cdots, X^n_1) \cdot V^n(X^0_0, \cdots, X^n_0) = 0$, on retrouve directement les $n(n+1)/2$ équations (1.1).

2.2 Stratification du schéma $\widehat{E}^n_{p,q}$.

Pour étudier le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ on considère la projection $\pi_0 : \widehat{E}^n_{p,q,r} \to \widehat{E}^n_{p,q}$ qui à une structure de module u donnée par (u_0, u_1) associe u_0. Ce morphisme est surjectif (prendre $u_1 = 0$) et la fibre de $u_0 \in \widehat{E}^n_{p,q}$ est décrite par l'équation $u_1 \cdot v_0 = 0$, donc est un espace vectoriel isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Coker}\, v_0, E_2)$; en particulier, elle est de dimension $r\big[(n+1)\,q - \mathrm{rg}\, v_0\big]$. Pour connaître $\widehat{E}^n_{p,q,r}$, il suffit alors d'étudier comment varie le rang de v_0 sur l'espace affine $\widehat{E}^n_{p,q}$. Pour ce faire, nous construisons une stratification du schéma $\widehat{E}^n_{p,q}$ en fonction de ce rang, ou plus exactement en fonction d'une quantité plus simple qui le minore. Nous montrons dans ce paragraphe de quelle façon une telle stratification permet d'établir les théorèmes 1.7, 1.8 et 1.9.

On note que cette méthode introduit une dissymétrie entre les entiers p et r : le second intervient dans la dimension des fibres, qui sont entièrement connues, tandis que le premier détermine la dimension de l'espace $\widehat{E}^n_{p,q}$ qu'il faut stratifier. Comme les schémas $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ et $\widehat{E}^n_{r,q,p}$ sont isomorphes pour tout triplet (p,q,r), on peut se ramener systématiquement au cas $p \leqslant r$ pour prouver les résultats annoncés.

Définition 2.4. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$. On note $W^n_{p,q}$ ou W s'il n'y a pas d'ambiguïté l'ouvert de $\widehat{E}^n_{p,q}$ sur lequel l'application v_0 est injective, c'est-à-dire de rang $\frac{n(n+1)}{2}p$. Pour $r \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{W}^n_{p,q,r}$ ou $\mathcal{W}$ l'ouvert ${\pi_0}^{-1}(W)$ de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ défini par la même condition.*

Proposition 2.5. *Soit $(p,q,r) \in \mathbb{N}^{*3}$. Si l'ouvert W de $\widehat{E}^n_{p,q}$ est non vide, l'ouvert $\mathcal{W}$ de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est non vide, irréductible, génériquement lisse et de dimension $\Delta^n_{p,q,r}$.*

Démonstration. Comme W est un ouvert de l'espace affine $\widehat{E}^n_{p,q}$, s'il est non vide il est irréductible, lisse et de dimension $(n+1)\,pq$. Sur W on a $\operatorname{rg} v_0 = \frac{n(n+1)}{2}\,p$ donc les fibres de π_0 sont de dimension constante $\chi = r\big[(n+1)q - \operatorname{rg} v_0\big] = (n+1)\left[qr - \frac{n}{2}\,pr\right]$. L'ouvert $\mathcal{W}$ de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est alors un fibré vectoriel de rang χ au-dessus de W, donc il est non vide, lisse, irréductible et de dimension $\chi + (n+1)\,pq = \Delta^n_{p,q,r}$. ■

Une condition nécessaire évidente pour que les ouverts W et $\mathcal{W}$ soient non vides est d'avoir $(n+1)\,q \geqslant \frac{n(n+1)}{2}\,p$, soit $2q \geqslant np$. Nous nous servirons de la proposition suivante pour établir le théorème 1.8 :

Proposition 2.6. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que l'ouvert W de $\widehat{E}^n_{p,q}$ est non vide et soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si on a $r > (n+1)\,q - \frac{n(n+1)}{2}\,p$, le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ possède plusieurs composantes. En d'autres termes, lorsque W est non vide la condition $(n+1)\,q \geqslant \frac{n(n+1)}{2}\,p + r$ de la conjecture $(\mathcal{C}^n)$ est effectivement nécessaire pour que le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ soit irréductible.*

Démonstration. La relation $u_1 \cdot v_0 = 0$ entraîne $\operatorname{rg} u_1 + \operatorname{rg} v_0 \leqslant (n+1)\,q$. Par conséquent sur l'ouvert $\mathcal{W}$, qui est non vide si W est non vide, on a $\operatorname{rg} u_1 \leqslant (n+1)\,q - \frac{n(n+1)}{2}\,p$. Par ailleurs, l'application générique $u_1 = (X_1^0 \; X_1^1 \; \cdots \; X_1^n)$ de $\widehat{E}^n_{p,q}$ est de rang maximum, donc l'ouvert de $\widehat{E}^n_{p,q}$ sur lequel on a $\operatorname{rg} u_1 = \min\big[(n+1)q, r\big]$ est également non vide. L'hypothèse $r > (n+1)\,q - \frac{n(n+1)}{2}\,p$ entraîne que ces deux ouverts sont disjoints, donc que $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ possède plusieurs composantes. ■

Compte-tenu de l'isomorphisme $\widehat{E}^n_{p,q,r} \cong \widehat{E}^n_{r,q,p}$ et de la proposition 2.6, il suffit donc pour prouver le théorème 1.8 de montrer que l'ouvert W est non vide dès que l'on a

$q \geqslant n\,p - E(p/2)$. Pour établir les théorèmes 1.7 et 1.9 en revanche, il faut étudier plus finement la variation du rang de v_0 sur le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$. Nous posons les notations suivantes :

Définition 2.7. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$. On se donne une stratification topologique de $\widehat{E}^n_{p,q}$ par des sous-schémas localement fermés $U(\alpha)$ et paramétrée par un ensemble fini noté $\mathbb{A}^n_{p,q}$ ou simplement $\mathbb{A}$, c'est-à-dire une décomposition de la forme $\widehat{E}^n_{p,q} = \amalg_{\alpha\in\mathbb{A}} U(\alpha)$. On suppose que l'on possède sur chaque strate une minoration du rang de v_0 de la forme $\operatorname{rg} v_0 \geqslant \chi(\alpha)$ et que l'on connaît une majoration de la dimension de chaque strate de la forme $\dim U(\alpha) \leqslant \delta(\alpha)$. On fixe enfin $r \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{U}(\alpha) = {\pi_0}^{-1}\big(U(\alpha)\big)$, de sorte que l'on a $\widehat{E}^n_{p,q,r} = \amalg_{\alpha\in\mathbb{A}} \mathcal{U}(\alpha)$.*

Définition 2.8. *Soit $\alpha \in \mathbb{A}$. On pose $\nu(\alpha) = r\,\chi(\alpha) - \delta(\alpha)$. On pose également $\mu(\alpha) = \nu(\alpha) + (n+1)\big(pq - \frac{n}{2}\,pr\big)$, soit $\mu(\alpha) = \big[(n+1)pq - \delta(\alpha))\big] - r\,\big[\frac{n(n+1)}{2}\,p - \chi(\alpha)\big]$.*

Pour $u_0 \in U(\alpha)$ on a $\operatorname{rg} v_0 \geqslant \chi(\alpha)$, donc $\dim {\pi_0}^{-1}(u_0) \leqslant r\big[(n+1)\,q - \chi(\alpha)\big]$. La relation $\dim U(\alpha) \leqslant \delta(\alpha)$ entraîne alors $\dim \mathcal{U}(\alpha) \leqslant (n+1)\,qr + \big[\delta(\alpha) - r\,\chi(\alpha)\big]$, soit encore :

Proposition 2.9. *Soit $\alpha \in \mathbb{A}$. On a $\dim \mathcal{U}(\alpha) \leqslant (n+1)\,qr - \nu(\alpha) = \Delta^n_{p,q,r} - \mu(\alpha)$.*

Le sous-schéma fermé $\mathcal{F}_0 = {\pi_0}^{-1}(0)$ défini par $u_0 = 0$ est un espace affine de dimension $(n+1)\,qr$ isomorphe à $\widehat{E}^n_{p,q}$; c'est dans tous les cas un sous-schéma strict de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$. La proposition 2.9 entraîne immédiatement le résultat suivant, dont nous déduirons le théorème 1.9 :

Proposition 2.10. *Soit $(p,q,r) \in \mathbb{N}^{*3}$.*

(i) Si on a $\nu(\alpha) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{A}$, on a $\dim \widehat{E}^n_{p,q,r} \leqslant (n+1)\,qr$. Le fermé $\mathcal{F}_0$ est alors une composante génériquement lisse de dimension $(n+1)\,qr$ de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ et ce schéma possède plusieurs composantes.

(ii) On suppose qu'il existe $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ tel que l'on ait $U(\alpha_0) = \{0\}$, soit $\mathcal{U}(\alpha_0) = \mathcal{F}_0$. Si on a $\nu(\alpha) > 0$ pour $\alpha \in \mathbb{A} \smallsetminus \{\alpha_0\}$, la composante $\mathcal{F}_0$ est la seule de dimension $(n+1)\,qr$.

La dimension de chaque composante étant au moins égale à $\Delta^n_{p,q,r}$, la proposition 2.10 ne peut s'appliquer que si l'on a $(n+1)\,q\,r \geqslant \Delta^n_{p,q,r}$, soit $2q \leqslant nr$. On note que sous cette hypothèse la condition $q \geqslant \operatorname{Max}\big(\frac{nr}{2} + \frac{p}{n+1}\,,\ \frac{np}{2} + \frac{r}{n+1}\big)$ de la conjecture $(\mathcal{C}^n)$ n'est jamais vérifiée. On a enfin le résultat suivant, dont nous déduirons le théorème 1.7 :

Proposition 2.11. *Soit $(p,q,r) \in \mathbb{N}^{*3}$ et soit $\mathbb{A}^0$ une partie (éventuellement vide) de $\mathbb{A}$ telle que pour $\alpha \in \mathbb{A}^0$ on a $\chi(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}\,p$. On pose $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \smallsetminus \mathbb{A}^0$ et $\overline{\mu} = \min_{\alpha\in\overline{\mathbb{A}}} \mu(\alpha)$.*

(i) Si on a $\overline{\mu} > 0$, l'ensemble $\mathbb{A}^0$ est non vide et le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est irréductible, génériquement lisse, intersection complète et de dimension $\Delta^n_{p,q,r}$.

(ii) La codimension du lieu singulier de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est minorée par $\overline{\mu}$; en particulier, si on a $\overline{\mu} \geqslant 2$ le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est normal.

Démonstration. Posons $\overline{\mathcal{U}} = \amalg_{\alpha\in\overline{\mathbb{A}}}\ U(\alpha)$ et $\mathcal{U}^0 = \amalg_{\alpha\in\mathbb{A}^0}\ \mathcal{U}(\alpha)$. Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{A}}$ on a $\dim \mathcal{U}(\alpha) \leqslant \Delta^n_{p,q,r} - \mu(\alpha) \leqslant \Delta^n_{p,q,r} - \overline{\mu}$. L'hypothèse $\overline{\mu} > 0$ entraîne donc $\dim \overline{\mathcal{U}} < \Delta^n_{p,q,r}$. Comme les composantes irréductibles de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ sont toutes de dimension supérieure ou égale à $\Delta^n_{p,q,r}$, elles sont alors les adhérences des composantes de $\mathcal{U}^0$ et $\mathbb{A}^0$ est nécessairement non vide. Soit $\alpha \in \mathbb{A}^0$, pour $u_0 \in U(\alpha)$ on a $\operatorname{rg} v_0 \geqslant \chi(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2} pq$, donc v_0 est injective. On a ainsi $U(\alpha) \subset W$ et $\mathcal{U}(\alpha) \subset \mathcal{W}$, donc W et $\mathcal{W}$ sont non vides. D'après la proposition 2.5, l'ouvert $\mathcal{W}$ de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est alors lisse, irréductible et de dimension $\Delta^n_{p,q,r}$. D'après ce qui précède, on a de plus $\mathcal{U}^0 \subset \mathcal{W}$. Le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ étant l'adhérence de $\mathcal{U}^0$, il est génériquement lisse, irréductible et de dimension $\Delta^n_{p,q,r}$, donc il est intersection complète puisqu'il est défini par $\frac{n(n+1)}{2} pr$ équations dans un espace affine de dimension $(n+1)(pq+qr)$. Enfin, pour $\alpha \in \mathbb{A}$ on a $\operatorname{Codim}_{\widehat{E}^n_{p,q,r}} \mathcal{U}(\alpha) \geqslant \mu(\alpha)$, donc on a $\operatorname{Codim}_{\widehat{E}^n_{p,q,r}} \overline{\mathcal{U}} \geqslant \overline{\mu}$. Comme l'ouvert $\mathcal{W}$ est lisse, le lieu singulier de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est contenu dans $\overline{\mathcal{U}}$ et sa codimension est minorée par $\overline{\mu}$. ∎

On note que d'après le point *(i)* de la proposition 2.11, une stratification de $\widehat{E}^n_{p,q}$ ne permet de montrer l'irréductibilité du schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ pour aucune valeur de r lorsque l'ensemble $\mathbb{A}^0$ est vide.

3 Construction des stratifications.

On fixe les entiers $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$; on pose $E_0 = \Bbbk^p$ et $E_1 = \Bbbk^q$.

Définition 3.1. *On note respectivement $\widehat{M}^n_{p,q}$ et $\widehat{H}^n_{p,q}$ les espaces affines isomorphes à $\widehat{E}^n_{p,q}$ définis par $\widehat{M}^n_{p,q} = \left[M_{q,p}(\Bbbk)\right]^{n+1}$ et $\widehat{H}^n_{p,q} = \left[\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E_0, E_1)\right]^{n+1}$.*

Nous utiliserons à plusieurs reprises le lemme immédiat suivant :

Lemme 3.2. *Si une matrice M s'écrit par blocs sous la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline M_3 & 0 \end{array}\right)$ on a $\operatorname{rg} M \geqslant \operatorname{rg} M_2 + \operatorname{rg} M_3$. Si de plus l'une des deux matrices M_2 ou M_3 est carrée inversible on a $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} M_2 + \operatorname{rg} M_3$.*

3.1 Stratification concernant les matrices.

On rappelle que l'on pose $S^n = (X^0\ X^1 \ldots\ X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$; on note par convention S^{-1} la matrice à 1 ligne et 0 colonne à coefficients dans R^∞_1.

Définition 3.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note T^n la matrice de taille $(2, 2n-1)$ à coefficients dans R^∞_1 définie par $T^n = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & S^{n-2} & X^{n-1} \\ \hline S^{n-2} & 0 & X^n \end{array}\right)$, c'est-à-dire par $T^1 = \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \end{pmatrix}$ et $T^n = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & \cdots & 0 & X^0 & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} \\ \hline X^0 & \cdots & X^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & X^n \end{array}\right)$ pour $n \geqslant 2$.*

Définition 3.4. *Soit $A = (A^0, \cdots, A^n) \in \widehat{M}^n_{p,q}$. On note $S^k(A)$ pour $k \in [\![-1, n]\!]$ et $T^k(A)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ les matrices par blocs obtenues à partir des matrices S^k et T^k en substituant les matrices A^i aux indéterminées X^i. On pose $s_k(A) = \operatorname{rg} S^k(A)$ pour $k \in [\![-1, n]\!]$ et $t_k(A) = \operatorname{rg} T^k(A)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$; on notera ces entiers s_k et t_k lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. On appelle* **multirang** *de A et on note $\sigma(A)$ l'élément $\sigma = (s_0; t_1, s_1; \ldots; t_n, s_n)$ de $\mathbb{N}^{2n+1}$.*

On a toujours $s_{-1}(A) = 0$. Les entiers s_k et t_k qui composent le multirang varient de façon semi-continue en fonction de A, donc celui-ci établit une stratification de $\widehat{M}^n_{p,q}$.

Lemme 3.5. *Soit $A \in \widehat{M}^n_{p,q}$ et soit $\sigma = (s_0; t_1, s_1; \dots; t_n, s_n)$ son multirang. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on a $s_k \geqslant s_{k-1}$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on a $t_k \geqslant s_{k-1} + s_{k-2}$.*

Démonstration. La matrice $S^{k-1}(A)$ est une sous-matrice de $S^k(A)$ donc on a $s_k(A) \geqslant s_{k-1}(A)$. On a $T^k(A) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & S^{k-1}(A) \\ \hline S^{k-2}(A) & M(A) \end{array}\right)$ avec $M(A) = (0 \dots 0 \ A^k)$ donc on a $t_k(A) \geqslant s_{k-2}(A) + s_{k-1}(A)$ d'après le lemme 3.2. ■

Définition 3.6. *On note $\mathcal{A}^n$ l'application de $\mathbb{Z}^{2n+1}$ dans lui-même qui à $\sigma = (s_0; t_1, s_1; \dots; t_n, s_n)$ associe $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$ obtenu en posant $a_k = s_k - s_{k-1}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $b_k = t_k - (s_{k-1} + s_{k-2})$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, avec la convention $s_{-1} = 0$.*

À cause de la relation $a_0 = s_0$, l'application $\mathcal{A}^n$ est une bijection de $\mathbb{Z}^{2n+1}$ dans lui-même, dont la bijection réciproque est donnée par les relations :

$$(3.1) \qquad \forall k \in [\![0, n]\!],\ s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \ ; \ \forall k \in [\![1, n]\!],\ t_k = 2 \sum_{i=0}^{k-2} a_i + (a_{k-1} + b_k)\,.$$

Définition 3.7. *On note $\mathcal{S}^n$ la bijection réciproque de $\mathcal{A}^n$, qui est définie par les relations (3.1).*

Définition 3.8. *Soit $A \in \widehat{M}^n_{p,q}$ de multirang σ. On appelle* **type numérique** *de A et on note $\alpha(A)$ l'élément $\mathcal{A}^n(\sigma)$ de $\mathbb{Z}^{2n+1}$.*

D'après le lemme 3.5, le type numérique appartient à $\mathbb{N}^{2n+1}$. Cet invariant ne varie pas de façon semi-continue, mais il définit la même stratification de $\widehat{M}^n_{p,q}$ que le multirang.

3.2 Stratification concernant les applications linéaires.

En remplaçant les matrices par des applications linéaires, on associe de même à $w = (w^0, \cdots, w^n) \in \widehat{H}^n_{p,q}$ des entiers $s_k(w)$ et $t_k(w)$ ainsi qu'un multirang $\sigma(w)$ et un type numérique $\alpha(w)$. Ces invariants définissent une stratification de $\widehat{H}^n_{p,q}$, qui coïncide avec celle de $\widehat{M}^n_{p,q}$ dès lors que l'on fixe des bases de E_0 et E_1.

3.3 Stratification concernant les structures de module.

On utilise ce qui précède pour munir $\widehat{E}^n_{p,q}$ d'une stratification qui elle se distingue des précédentes. Une structure de module $u \in \widehat{E}^n_{p,q}$ est une application linéaire qui à $P \in R^n_1$ associe $u(P) = P_0 \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E_0, E_1)$; on peut alors associer à chaque base de R^n_1 son image par u, qui est un élément de $\widehat{H}^n_{p,q}$.

Définition 3.9. *On note $\mathcal{B}$ la variété isomorphe à $GL_{n+1}(\Bbbk)$ qui paramètre les bases de R^n_1.*

Définition 3.10. *Soit $u \in \widehat{E}^n_{p,q}$ et soit $B = (X^0, \cdots, X^n) \in \mathcal{B}$. On note $u(B)$ l'élément $\big(u(X^0), \cdots, u(X^n)\big) = \big(X^0_0, \cdots, X^n_0\big)$ de $\widehat{H}^n_{p,q}$. On note $\sigma(u,B)$ et $\alpha(u,B)$ le multirang et le type numérique de $u(B)$; on note $s_k(u,B)$, $t_k(u,B)$, $a_k(u,B)$ et $b_k(u,B)$ les entiers s_k, t_k, a_k et b_k correspondants.*

Les fonctions qui associent au couple (u,B) les entiers $s_k(u,B)$ et $t_k(u,B)$ sont semi-continues sur le produit $(\widehat{E}^n_{p,q} \times \mathcal{B})$ car elles sont données par des rangs d'applications linéaires.

Définition 3.11. *Soit $u \in \widehat{E}^n_{p,q}$. On appelle* **multirang** *de u, que l'on note $\sigma(u)$, le multirang générique de $u(B)$ lorsque B parcourt $\mathcal{B}$. On appelle* **base maximisante** *pour u une base B de R^n_1 pour laquelle le multirang est atteint, c'est-à-dire qui vérifie $\sigma(u,B) = \sigma(u)$. On appelle* **type numérique** *de u, que l'on note $\alpha(u)$, le type numérique $\alpha = \mathcal{A}^n\big(\sigma(u)\big)$ associé à $\sigma(u)$, qui est aussi le type numérique de $u(B)$ lorsque B est une base maximisante.*

Si l'on fixe $\sigma \in \mathbb{N}^{2n+1}$ et $B \in \mathcal{B}$, l'ensemble des structures de module $w \in \widehat{E}^n_{p,q}$ qui vérifient $\sigma(w,B) \geqslant \sigma$ est un ouvert $O_{\sigma,B}$ de $\widehat{E}^n_{p,q}$; pour $w \in O_{\sigma,B}$ on a $\sigma(w) \geqslant \sigma(w,B) \geqslant \sigma$. Soit u une structure de module de multirang σ et soit B une base maximisante pour u, d'après ce qui précède l'ouvert $O_{\sigma,B}$ est un voisinage de u dans $\widehat{E}^n_{p,q}$ sur lequel on a $\sigma(w) \geqslant \sigma = \sigma(u)$. On en déduit que le multirang des structures de module varie de façon semi-continue sur $\widehat{E}^n_{p,q}$, donc qu'il en établit une stratification, de même que le type numérique qui lui est équivalent.

Définition 3.12. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$. On note $U^n_{p,q}(\alpha)$ le sous-schéma localement fermé de $\widehat{E}^n_{p,q}$ formé par les structures de module de type numérique α, c'est-à-dire aussi de multirang $\sigma = \mathcal{S}^n(\alpha)$, muni de sa structure réduite. On appelle* **strates** *de $\widehat{E}^n_{p,q}$ les sous-schémas $U^n_{p,q}(\alpha)$.*

Soit $u \in U^n_{p,q}(\alpha)$. Une base B de R^n_1 est maximisante pour u si et seulement si on a $\sigma(u,B) \geqslant \sigma(\alpha)$. On pose alors la définition suivante :

Définition 3.13. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$ et soit $B \in \mathcal{B}$. On note $U^n_{p,q}(\alpha,B)$ l'ouvert de $U^n_{p,q}(\alpha)$ formé des structures de module pour lesquelles la base B est maximisante.*

Lemme 3.14. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$. Les ouverts $U^n_{p,q}(\alpha,B)$ sont tous isomorphes entre eux et recouvrent la strate $U^n_{p,q}(\alpha)$ lorsque B parcourt $\mathcal{B}$. En particulier, si $U^n_{p,q}(\alpha)$ est non vide, ces ouverts ont tous la même dimension, qui est celle de $U^n_{p,q}(\alpha)$.*

Démonstration. Il est clair que les ouverts $U^n_{p,q}(\alpha,B)$ recouvrent $U^n_{p,q}(\alpha)$. De plus, l'opération naturelle de $GL(R^n_1)$ sur $\widehat{E}^n_{p,q}$, qui à $g \in GL(R^n_1)$ et à $u : R^n_1 \to \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E_0, E_1)$ associe $w = u \circ g$, stabilise la strate $U^n_{p,q}(\alpha)$ et transporte l'ouvert $U^n_{p,q}(\alpha,B)$ sur $U^n_{p,q}\big(\alpha, g^{-1}(B)\big)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. On en déduit que les ouverts $U^n_{p,q}(\alpha,B)$ sont tous isomorphes entre eux, donc qu'ils ont tous la même dimension et qu'ils sont non vides si $U^n_{p,q}(\alpha)$ est non vide. ∎

Exemple 3.15. *Dans le cas $n = 0$, qui nous servira à initialiser des récurrences, une structure de module de $\widehat{E}^0_{p,q}$ correspond à la donnée d'une application linéaire $X^0_0 : E_0 \to E_1$. Pour $a_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha = (a_0)$, la strate $U^0_{p,q}(\alpha)$ est alors le sous-schéma localement fermé de* $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E_0, E_1)$ *défini par* $\operatorname{rg} X^0_0 = a_0$ *; en particulier, elle a pour dimension $(p+q-a_0)\,a_0$.*

4 Familles décomposées.

4.1 Décomposition de familles de matrices.

Nous introduisons une classe de familles de matrices pour lesquelles le type numérique s'interprète de façon simple.

Définition 4.1. *Soit $A = (A^0, \cdots, A^n) \in \widehat{M}^n_{p,q}$ et soit $a \in \mathbb{N}$. On dit que la famille A est* **scindée de type** (a) *si chacune des matrices A^i pour $i \in [\![0, n]\!]$ s'écrit par blocs sous la forme $A^i = \left(\begin{array}{c|c} A^i_1 & A^i_2 \\ \hline A^i_3 & 0 \end{array}\right)$, où les matrices A^i_1 sont carrées de taille (a, a) et si de plus on a $A^0 = \left(\begin{array}{c|c} A^0_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec A^0_1 inversible.*

L'entier a étant le rang de A^0, il vérifie $a \leqslant \min(p, q)$ et est déterminé de façon unique par A. Par conséquent, lorsqu'une famille $A = (A^0, \cdots, A^n)$ est scindée de type (a), les notations A^i_1, A^i_2 et A^i_3 de la définition 4.1 sont dépourvues d'ambiguïté et on peut poser la définition suivante :

Définition 4.2. *Soit $A = (A^0, \cdots, A^n) \in \widehat{M}^n_{p,q}$. Si A est scindée de type $(a) = (\operatorname{rg} A^0)$, on pose $A_j = (A^0_j, \cdots, A^n_j)$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$. De plus, si on a $n \geqslant 1$ on pose $A'_j = (A^1_j, \cdots, A^n_j)$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$ et on appelle* **famille dérivée** *de A la famille $A' = A'_3$.*

En opérant sur les lignes et les colonnes, on obtient immédiatement le lemme suivant :

Lemme 4.3. *Soit $A \in \widehat{M}^n_{p,q}$ et soit Φ une matrice à coefficients dans R^n_1. Si A est scindée de type (a) on a $\operatorname{rg} \Phi(A) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} \Phi(A_1) & \Phi(A_2) \\ \hline \Phi(A_3) & 0 \end{array}\right)$ où $\Phi(A)$ (resp. $\Phi(A_j)$ pour $j \in [\![1, 3]\!]$) est la matrice par blocs obtenue en substituant les matrices A^i (resp. A^i_j) aux indéterminées X^i.*

Lorsqu'une famille $A = (A^0, \cdots, A^n)$ est scindée, les rangs des sous-matrices A^i_2 et A^i_3 sont déterminés par ceux des matrices A^i et A^0 de la façon suivante :

Lemme 4.4. *Soit $A = (A^0, \cdots, A^n) \in \widehat{M}^n_{p,q}$. On suppose que A est scindée de type $(\operatorname{rg} A^0)$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ on a $\operatorname{rg} A^i_2 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^i \end{pmatrix} - \operatorname{rg} A^0$ et $\operatorname{rg} A^i_3 = \operatorname{rg} (A^0 \; A^i) - \operatorname{rg} A^0$.*

Démonstration. On remplace A^0 et A^i par les blocs $\begin{pmatrix} A^0_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A^i_1 & A^i_2 \\ A^i_3 & 0 \end{pmatrix}$ dans les matrices $\begin{pmatrix} A^0 \\ A^i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A^0 & A^i \end{pmatrix}$, puis on applique le lemme 3.2 en utilisant le fait que A^0_1 est inversible et vérifie $\operatorname{rg} A^0_1 = \operatorname{rg} A^0$. ■

Définition 4.5. *Soit $A = (A^0, \cdots, A^n) \in \widehat{M}^n_{p,q}$ et soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. On suppose $n \geqslant 1$. On dit que la famille A est* **scindée de type** (a, b, c) *si elle est scindée de type (a) et si de plus on a $\operatorname{rg} A^i_2 \leqslant b$ et $\operatorname{rg} A^i_3 \leqslant c$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ avec $\operatorname{rg} A^1_2 = b$ et $\operatorname{rg} A^1_3 = c$.*

On note que les entiers (a,b,c) sont déterminés de façon unique par A et qu'ils vérifient les relations $a \leqslant \min(p,q)$, $b \leqslant \min(a, p-a)$ et $c \leqslant \min(a, q-a)$, soit :

$$c \leqslant a \leqslant p \ , \quad a+c \leqslant q \quad \text{et} \quad b \leqslant \min(p-a, a)\,. \tag{4.1}$$

Réciproquement, si un triplet (a,b,c) vérifie ces conditions, il existe dans $\widehat{M}^n_{p,q}$ des familles scindées de type (a,b,c).

Définition 4.6. *On suppose $n \geqslant 1$. Pour $\alpha = (a_0\,;\, b_1, a_1\,;\, \ldots\,;\, b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$, on note α' l'élément $(a_1\,;\, b_2, a_2\,;\, \cdots\,;\, b_n, a_n)$ de $\mathbb{N}^{2n-1}$, que l'on appelle* **suite dérivée** *de α.*

Définition 4.7. *Soit $A = (A^0, \cdots, A^n) \in \widehat{M}^n_{p,q}$ et soit $\alpha = (a_0\,;\, b_1, a_1\,;\, \ldots\,;\, b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$.*

– On dit que A est **décomposée de type α à l'ordre** *0 si elle est scindée de type (a_0).*

– Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on dit que A est **décomposée de type α à l'ordre** *k si elle est scindée de type (a_0, b_1, a_1) et si la famille dérivée $A' = (A^1_3, \cdots, A^n_3)$ est décomposée de type α' à l'ordre $(k-1)$.*

Comme précédemment, si A est décomposée de type α à l'ordre k, les entiers a_i et b_i pour $i \leqslant k$ sont entièrement déterminés par A et vérifient les relations ci-dessous, que l'on obtient par récurrence à partir des relations (4.1) et dans lesquelles on pose par convention $a_{-1} = p$:

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \leqslant a_k \leqslant a_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant a_{-1} = p \quad ; \quad \sum_{i=0}^k a_i \leqslant q\,; \\ \forall i \in [\![1,k]\!]\,,\ 0 \leqslant b_i \leqslant \min(a_{i-2} - a_{i-1}, a_{i-1})\,. \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Réciproquement, si α vérifie les relations (4.2), il existe dans $\widehat{M}^n_{p,q}$ des familles décomposées de type α à l'ordre k, comme on peut le voir facilement par récurrence. L'intérêt principal des familles décomposées réside dans la proposition suivante :

Proposition 4.8. *Soit $A \in \widehat{M}^n_{p,q}$ et soit $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \ldots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$. Si A est décomposée de type α à l'ordre n, son type numérique $\alpha(A)$ est égal à α.*

La réciproque est évidemment fausse puisqu'il existe des familles de matrices qui ne sont pas décomposées, même à l'ordre 0.

Démonstration. Soit $\sigma = (s_0; t_1, s_1; \ldots; t_n, s_n)$ le multirang de A. Il suffit de montrer que l'on a $\sigma = \mathcal{S}^n(\alpha)$, c'est-à-dire que l'on a $s_k = \sum_{i=0}^k a_i$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $t_k = 2\sum_{i=0}^{k-2} a_i + (a_{k-1} + b_k)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$. On procède par récurrence sur k. Pour l'initialisation, on a d'une part $s_0 = \operatorname{rg} A^0 = a_0$; d'autre part, comme la famille A est scindée de type (a_0), on a $t_1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A^0 + \operatorname{rg} A^1_2 = a_0 + b_1$ d'après la proposition 4.4. L'étape de récurrence découle quand à elle immédiatement du lemme suivant :

Lemme 4.9. *Soit $A \in \widehat{M}^n_{p,q}$ avec $n \geqslant 1$ et soit $a \in \mathbb{N}$. On suppose que A est scindée de type (a). En notant A' la famille dérivée de A, on a $s_k(A) = a + s_{k-1}(A')$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $t_k(A) = 2a + t_{k-1}(A')$ pour $k \in [\![2,n]\!]$.*

Démonstration. On pose $A_j = (A_j^0, \cdots, A_j^n)$ et $A'_j = (A_j^1, \cdots, A_j^n)$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$; on a $A' = A'_3$. En exploitant le lemme 4.3 puis la définition des matrices S^k, on a $s_k(A) = \operatorname{rg} S^k(A) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} S^k(A_1) & S^k(A_2) \\ \hline S^k(A_3) & 0 \end{array}\right) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1^0 & S^{k-1}(A'_1) & 0 & S^{k-1}(A'_2) \\ \hline 0 & S^{k-1}(A'_3) & 0 & 0 \end{array}\right)$, donc $s_k(A) = \operatorname{rg} A_1^0 + \operatorname{rg}\ S^{k-1}(A'_3) = a + s_{k-1}(A')$ d'après le lemme 3.2. De même, d'après le lemme 4.3 on a $t_k(A) = \operatorname{rg}\ T^k(A) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} T^k(A_1) & T^k(A_2) \\ \hline T^k(A_3) & 0 \end{array}\right)$. En écrivant les matrices $T^k(A_j)$ sous la forme $T^k(A_j) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & A_j^0 & S^{k-3}(A'_j) & A_j^{n-1} \\ \hline A_j^0 & S^{k-3}(A'_j) & 0 & 0 & A_j^k \end{array}\right)$ puis en appliquant le lemme 3.2, on obtient $t_k(A) = 2 \operatorname{rg} A_1^0 + \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & S^{k-3}(A'_3) & A_3^{k-1} \\ \hline S^{k-3}(A'_3) & 0 & A_3^k \end{array}\right) = 2\,a + \operatorname{rg} T^{k-1}(A'_3)$, soit $t_k(A) = 2\,a + t_{k-1}(A')$. ■

4.2 Décomposition de familles d'applications linéaires.

Définition 4.10. *Soit $w = (w^0, \cdots, w^n) \in \widehat{H}_{p,q}^n$, soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, soit $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$ et soit $k \in [\![1, n]\!]$. On dit que w est* **scindable de type** *a (resp.* **scindable de type** *(a, b, c), resp.* **décomposable de type** *α* **à l'ordre** *k) s'il existe des bases de E_0 et E_1 pour lesquelles la famille $W = (W^0, \cdots, W^n)$ des matrices qui représentent les applications w^i est scindée de type a (resp. scindée de type (a, b, c), resp. décomposée de type α à l'ordre k).*

La liberté laissée sur le choix des bases est évidemment essentielle. Lorsque w est décomposable à l'ordre n, il peut exister plusieurs couples de bases qui fournissent des décompositions, mais d'après la proposition 4.8 celles-ci sont alors toutes du même type, égal à $\sigma(w)$. Enfin, il existe évidemment des familles $w = (w^0, \cdots, w^n)$ qui ne sont décomposables par rapport à aucune base, même à l'ordre 0, puisque ceci entraîne déjà $w^i(\operatorname{Ker} w^0) \subset \operatorname{Im} w^0$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

4.3 Décompositions de structures de module.

Par opposition à ce qui précède, nous montrons que si u est une structure de module de $\widehat{E}_{p,q}^n$ et si $B = (X^0, \cdots, X^n)$ est une base maximisante pour u, la famille d'applications linéaires $u(B) = (X_0^0, \cdots, X_0^n)$ est nécessairement décomposable à l'ordre n. Nous commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 4.11. *Soit F_0 et F_1 deux $\Bbbk$-espaces vectoriels, soit L un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(F_0, F_1)$ et soit $v \in L$ de rang maximal dans L. Pour tout $w \in L$ on a $w\,(\operatorname{Ker} v) \subset \operatorname{Im} v$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si v et w sont deux éléments de L qui vérifient $w\,(\operatorname{Ker} v) \not\subset \operatorname{Im} v$, l'application v n'est pas de rang maximal dans L. On commence par se ramener à des matrices en fixant des bases de F_0 et F_1 de la façon suivante : on pose $r = \operatorname{rg} v$ et on se donne une base $(e_1, \cdots, e_r)$ d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} v$ dans F_0, de sorte que la famille $\big(v(e_1), \cdots, v(e_r)\big)$ forme une base de $\operatorname{Im} v$. On choisit ensuite $e_{r+1} \in \operatorname{Ker} v$ vérifiant $w(e_{r+1}) \notin$

$\operatorname{Im} v$ et on complète les familles $\mathcal{E}_0 = (e_1, \cdots, e_r, e_{r+1})$ et $\mathcal{E}_1 = \big(v(e_1), \cdots, v(e_r), w(e_{r+1})\big)$ en bases respectives de F_0 et F_1. Soit V et W les matrices qui représentent v et w dans ces bases. Les sous-matrices de V et W correspondant à $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ sont des matrices de taille $(r+1, r+1)$ de la forme $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} W' & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, donc pour $\lambda \in \Bbbk$ la matrice $V + \lambda W$ admet le $(r+1)$–mineur $\left|\begin{array}{c|c} I_r + \lambda W' & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right|$. Celui-ci est non-nul quand λ appartient à un certain ouvert de $\Bbbk$, qui est non vide car $\Bbbk$ est infini, et pour les valeurs de λ correspondantes on a $\operatorname{rg}(v + \lambda w) \geqslant r + 1$ donc v n'est pas de rang maximal dans L. ■

Lemme 4.12. *Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $u \in \widehat{E}^n_{p,q}$, soit L le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} u$ de $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E_0, E_1)$ et soit $B = (X^0, \cdots, X^n)$ une base de R^n_1 telle que $u(X^0)$ est de rang maximal dans L. On pose $x^i = u(X^i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $x = u(B) = (x^0, \cdots, x^n)$. On pose également $s_0 = \operatorname{rg} x^0$, $E''_0 = \operatorname{Ker} x^0$, $E'_1 = \operatorname{Im} x^0$ et on choisit des supplémentaires respectifs E'_0 et E''_1 de E''_0 et E'_1 dans E_0 et E_1. Alors :*

i) Chaque application x^i s'écrit par blocs sous la forme $x^i = \left(\begin{array}{c|c} x^i_1 & x^i_2 \\ \hline x^i_3 & 0 \end{array}\right)$ par rapport aux décompositions $E_0 = E'_0 \oplus E''_0$ et $E_1 = E'_1 \oplus E''_1$. En particulier, la famille x est scindable de type $(\operatorname{rg} x^0) = (s_0)$.

ii) Pour $i \in [\![0, n]\!]$ on a $\operatorname{rg}\, x^i_2 = t_1(x^0, x^i) - s_0$ et $\operatorname{rg}\, x^i_3 = s_1(x^0, x^i) - s_0$.

iii) Pour $i \in [\![0, n]\!]$ on a $\operatorname{rg}\, x^i_2 + \operatorname{rg}\, x^i_3 \leqslant s_0$.

iv) On suppose $n \geqslant 1$ et on pose $x' = (x^1_3, \cdots, x^n_3)$. On a $s_k(x) = s_0 + s_{k-1}(x')$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $t_k(x) = 2\, s_0 + t_{k-1}(x')$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.

Démonstration. Le point *(i)* est une traduction directe du lemme 4.11, les points *(ii)* et *(iv)* découlent immédiatement des lemmes 4.4 et 4.9, enfin *(iii)* résulte de l'inégalité $\operatorname{rg} x^i \leqslant \operatorname{rg} x^0$ et du lemme 3.2. ■

Définition 4.13. *On conserve les notations du lemme 4.12 et on suppose $n \geqslant 1$. On note u'_B la structure de module de $\widehat{E}^{n-1}_{a_0, q-a_0}$ définie en posant $u'(X^i) = x^{i+1}_3$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$. On pose de plus $B' = (X^1, \cdots, X^n)$ et on note $(R^n_1)'$ le sous-espace vectoriel de R^n_1 engendré par B'.*

Si l'on identifie l'espace vectoriel $R^{n-1}_1 = \langle X^0, \cdots, X^{n-1} \rangle$ à $(R^n_1)' = \langle X^1, \cdots, X^n \rangle$, ainsi que le schéma $\widehat{E}^{n-1}_{a_0, q-a_0}$ à $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}\big[(R^n_1)', \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E'_0, E''_1)\big]$, comme nous le ferons constamment dans la suite, on peut représenter directement u'_B comme l'application linéaire qui à X^i associe x^i_3 pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Lemme 4.14. *Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $u \in \widehat{E}^n_{p,q}$, soit $\sigma = (s_0\,;\, t_1, s_1\,;\, \cdots\,;\, t_n, s_n)$ le multirang de u, soit $\alpha = (a_0\,;\, b_1, a_1\,;\, \cdots\,;\, b_n, a_n)$ son type numérique et soit $B = (X^0, \cdots, X^n)$ une base maximisante pour u. Alors le lemme 4.12 s'applique et de plus :*

i) On a $\operatorname{rg} x^i_2 \leqslant b_1$ et $\operatorname{rg} x^i_3 \leqslant a_1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ avec $\operatorname{rg} x^1_2 = b_1$ et $\operatorname{rg} x^1_3 = a_1$.

ii) Si on a $n \geqslant 1$, la structure de module u'_B a pour type numérique le type dérivé $\alpha' = (a_1\,;\, b_2, a_2\,;\, \cdots\,;\, b_n, a_n)$ de α et la base B' de $(R^n_1)'$ est maximisante pour u'_B.

iii) On a $a_1 + b_1 \leqslant a_0$.

Démonstration. La base B étant maximisante pour u, l'application $x^0 = S^0(B)$ est de rang maximal dans L, égal à s_0, c'est-à-dire aussi à a_0, et le lemme 4.12 s'applique. Pour la même raison on a $t_1(x^0, x^i) \leqslant t_1(x^0, x^1) = t_1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc d'aprèsle lemme 4.12 *(ii)* on a $\operatorname{rg} x_2^i \leqslant t_1 - s_0 = b_1$ pour tout i avec $\operatorname{rg} x_2^1 = b_1$. De même, on a $s_1(x^0, x^i) \leqslant s_1(x^0, x^1) = s_1$ pour tout i donc on a $\operatorname{rg} x_3^i \leqslant s_1 - s_0 = a_1$ avec $\operatorname{rg} x_3^1 = a_1$, d'où *(i)*. On en déduit d'après 4.12 *(iii)* que l'on a $a_1 + b_1 = \operatorname{rg} x_2^1 + \operatorname{rg} x_3^1 \leqslant s_0 = a_0$, d'où *(iii)*.

Soit enfin $(Y^1, \cdots, Y^n)$ une base quelconque de $(R_1^n)'$. Posons $Y^0 = X^0$, la famille $(Y^0, Y^1, \cdots, Y^n)$ est une base de R_1^n. On pose $y^i = u(Y^i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $y = (y^0, \cdots, y^n)$. L'application linéaire $y^0 = x^0$ étant de rang maximal dans l'espace vectoriel L, d'après le lemme 4.12 *(iv)* on a $s_{k-1}(y') = s_k(y) - s_0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $t_{k-1}(y') = t_k(y) - 2\,s_0$ pour $k \in [\![2, n]\!]$ avec $y' = (y_3^1, \cdots, y_3^n)$. On a de plus $s_k(y) \leqslant s_k$ et $t_k(y) \leqslant t_k$ par définition du multirang, donc on a $s_{k-1}(y') \leqslant s_k - s_0$ et $t_{k-1}(y') \leqslant t_k - 2\,s_0$ pour tout k. Par ailleurs, comme la base B est maximisante pour u on a $s_k(x) = s_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $t_k(x) = t_k$ pour $k \in [\![2, n]\!]$, donc on a $s_{k-1}(x') = s_k - s_0$ et $t_{k-1}(x') = t_k - 2\,s_0$ pour tout k. On en déduit que B' est une base maximisante pour u' et que le multirang de u' est donné par :

$$\sigma' = \Big((s_1 - s_0)\ ;\ (t_2 - 2\,s_0)\ ,\ (s_2 - s_0)\ ;\ \cdots\ ;\ (t_n - 2\,s_0)\ ,\ (s_n - s_0)\Big)\,.$$

En se reportant à la définition 3.6, on vérifie immédiatement que le type numérique $\mathcal{A}^n(\sigma')$ associé à σ' est $(a_1\,;\, b_2, a_2\,;\,\cdots\,;\, b_n, a_n)$, soit α', d'où *(ii)*. ∎

Proposition 4.15. *Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $u \in \widehat{E}_{p,q}^n$, soit α le type numérique de u et soit B une base maximisante pour u. La famille d'applications linéaires $u(B)$ est décomposable de type α à l'ordre n.*

Démonstration. C'est immédiat par récurrence sur n : pour $n = 0$ il n'y a rien à montrer et l'étape de récurrence découle directement du lemme 4.14. ∎

Définition 4.16. *Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{A}_{p,q}^n$ l'ensemble des éléments $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \ldots; b_n, a_n)$ de $\mathbb{N}^{2n+1}$ qui vérifient les relations $0 \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant a_{-1} = p$, $\sum_{i=0}^n a_i \leqslant q$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ 0 \leqslant b_i \leqslant \min\,(a_{i-2} - a_{i-1}, a_{i-1} - a_i)$.*

Proposition 4.17. *Soit $u \in \widehat{E}_{p,q}^n$ et soit α son type numérique. On a $\alpha \in \mathbb{A}_{p,q}^n$.*

Démonstration. En appliquant la proposition 4.15 et en choisissant des bases adaptées de E_0 et E_1, on obtient une famille de matrices A qui est décomposée de type α à l'ordre n. On en déduit que α vérifie les relations (4.2) avec $k = n$. Il reste à montrer que pour $i \in [\![1, n]\!]$ on a $b_i \leqslant a_{i-1} - a_i$ soit $a_i + b_i \leqslant a_{i-1}$; ceci découle immédiatement par récurrence des points *(iii)* et *(ii)* du lemme 4.14. ∎

5 Majoration de la dimension des strates.

Dans le cas $n = 0$, on connaît exactement la dimension des strates (cf. exemple 3.15). Dans le cas général en revanche, nous nous contentons de la majorer. Nous aurons pour cela besoin du lemme suivant :

Lemme 5.1. *Soit F_0 et F_1 deux $\Bbbk$-espaces vectoriels munis de décompositions de la forme $F_i = F_i' \oplus F_i''$. On suppose que l'on a $\dim F_0' = \dim F_1' = a$ et on pose $H = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F_0', F_1')$. Soit $v_2 \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F_0'', F_1')$ et $v_3 \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F_0', F_1'')$. On pose $r_i = \mathrm{rg}\, v_i$ pour $i \in \{2,3\}$ et on suppose que l'on a $r_2 + r_3 \leqslant a$. Pour $v_1 \in H$ on pose $\Phi(v_1) = \left(\begin{array}{c|c} v_1 & v_2 \\ \hline v_3 & 0 \end{array}\right) \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E_0, E_1)$. On note enfin Z le sous-schéma fermé de H défini par $\mathrm{rg}\, \Phi(v_1) \leqslant a$. On a $\dim Z = a^2 - r_2 r_3$.*

Démonstration. On choisit des supplémentaires G_i (resp. L_i) des espaces $\mathrm{Ker}\, v_i$ (resp. $\mathrm{Im}\, v_i$) pour $i \in \{2,3\}$ et on écrit $F_0' = G_3 \oplus \mathrm{Ker}\, v_3$, $F_0'' = G_2 \oplus \mathrm{Ker}\, v_2$, $F_1' = \mathrm{Im}\, v_2 \oplus L_2$ et $F_1'' = \mathrm{Im}\, v_3 \oplus L_3$. Pour $v_1 \in H$, l'application $\Phi(v_1)$ se décompose alors sous la forme :

$$\Phi(v_1) = \left(\begin{array}{cc|cc} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{2,1} & 0 \\ v_{1,3} & v_{1,4} & 0 & 0 \\ \hline v_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $v_{3,1}$ et $v_{2,1}$ sont inversibles. En appliquant deux fois le lemme 3.2, on trouve $\mathrm{rg}\, \Phi(v_1) = \mathrm{rg}\, v_{3,1} + \mathrm{rg}\, v_{2,1} + \mathrm{rg}\, v_{1,4} = r_3 + r_2 + \mathrm{rg}\, v_{1,4}$. La condition qui définit Z porte donc uniquement sur $v_{1,4}$ et équivaut à $\mathrm{rg}\, v_{1,4} \leqslant a - r_3 - r_2$, donc Z est de codimension $r_2 r_3$ dans H. ■

Lemme 5.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\alpha = (a_0\,; b_1, a_1\,; \cdots; b_n, a_n) \in \mathbb{A}^n_{p,q}$ et soit α' le type dérivé de α. On a $\dim U^n_{p,q}(\alpha) \leqslant \dim U^{n-1}_{a_0, q-a_0}(\alpha') + (p+q-a_0)\, a_0 + n\, b_1\, (p - b_1) + n\, ({a_0}^2 - a_1\, b_1)$.*

Démonstration. Soit $B = (X^0, \cdots, X^n)$ une base fixée de R_1^n, on a $\dim U^n_{p,q}(\alpha) = \dim U^n_{p,q}(\alpha, B)$ d'après le lemme 3.14. On considère alors la projection :

$$\mathfrak{p} : \begin{bmatrix} U^n_{p,q}(\alpha, B) & \to & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E_0, E_1) \\ u & \mapsto & x^0 = u(X^0) \end{bmatrix}.$$

D'après la définition de $U^n_{p,q}(\alpha, B)$, pour $u \in U^n_{p,q}(\alpha, B)$ on a $\mathrm{rg}\, x^0 = a_0$. On a donc $\dim \mathrm{Im}\, \mathfrak{p} \leqslant (p + q - a_0)\, a_0$ et il reste à majorer la dimension des fibres de $\mathfrak{p}$.

Soit $x^0 \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E_0, E_1)$ de rang a_0 et soit $\mathfrak{X} = \mathfrak{p}^{-1}(x^0)$. On pose $E_0'' = \mathrm{Ker}\,(x^0)$, $E_1' = \mathrm{Im}\,(x^0)$ et on se donne des supplémentaires E_0' et E_1'' respectifs de E_0'' et E_1' dans E_0 et E_1. On a $\dim E_0' = \dim E_1' = a_0$, $\dim E_0'' = p - a_0$ et $\dim E_1'' = q - a_0$. On pose $B' = (X^1, \cdots, X^n)$. Un élément de la fibre $\mathfrak{p}^{-1}(x^0)$ correspond à une famille d'applications linéaires $x' = (x^1, \cdots, x^n)$ de $\left[\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E_0, E_1)\right]^n$ qui vérifie $(x^0, x^1, \cdots, x^n) \in U^n_{p,q}(\alpha, B)$. D'après le lemme 4.14, chaque application linéaire x^i se représente alors sous la forme $x^i = \left(\begin{array}{c|c} x_1^i & x_2^i \\ \hline x_3^i & 0 \end{array}\right)$ pour les décompositions $E_0 = E_0' \oplus E_0''$ et $E_1 = E_1' \oplus E_1''$; de plus, on a $\mathrm{rg}\,(x_2^i) \leqslant b_1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et la structure de module u'_B de $\widehat{E}^{n-1}_{a_0, q-a_0}$ définie par $(x_3^1, \cdots, x_3^n)$ a pour type numérique α', donc appartient à la strate $U^{n-1}_{a_0, q-a_0}(\alpha')$. Par conséquent, la projection :

$$\mathfrak{q} \;:\; \begin{bmatrix} \mathfrak{X} & \to & \left[\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E''_0, E'_1)\right]^n \times \left[\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E'_0, E''_1)\right]^n \\ (x^1, \cdots, x^n) & \mapsto & \left((x_2^1, \cdots, x_2^n), (x_3^1, \ldots, x_3^n)\right) \end{bmatrix}$$

vérifie $\dim \mathrm{Im}\,\mathfrak{q} \leqslant n \times b_1(p - b_1) + \dim U^{n-1}_{a_0, q-a_0}(\alpha')$. Il suffit alors pour conclure de majorer la dimension des fibres de $\mathfrak{q}$.

Soit $\mathcal{X} = (x_2^i, x_3^i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathrm{Im}\,\mathfrak{q}$. On a $\mathrm{rg}\, x_2^i \leqslant b_1$ et $\mathrm{rg}\, x_3^i \leqslant a_1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, avec des égalités pour $i = 1$. Le corps $\Bbbk$ étant infini, on peut choisir $\lambda \in \Bbbk$ de façon à avoir $\mathrm{rg}\,(x_2^i + \lambda x_2^1) = b_1$ et $\mathrm{rg}\,(x_3^i + \lambda x_3^1) = a_1$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. On pose alors $Y^i = X^i + \lambda X^1$ pour $i \in [\![2, n]\!]$ et $Y^1 = X^1$. Pour $j \in \{2, 3\}$, on pose de même $y_j^i = x_j^i + \lambda\, x_j^1$ pour $i \in [\![2, n]\!]$ et $y_j^1 = x_j^1$. Un élément de la fibre $\mathfrak{q}^{-1}(\mathcal{X})$ est donné par une famille $(x_1^i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \left[\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E'_0, E'_1)\right]^n$ et il est strictement équivalent de se donner la famille $(y_1^1, \cdots, y_1^n) = (x_1^1, x_1^2 + \lambda\, x_1^1, \cdots, x_1^n + \lambda\, x_1^1)$. Celle-ci doit vérifier $\mathrm{rg} \left(\begin{array}{c|c} y_1^i & y_2^i \\ \hline y_3^i & 0 \end{array}\right) \leqslant \mathrm{rg}\, x^0 = a_0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Comme on a $\mathrm{rg}\,(y_2^i) = b_1$ et $\mathrm{rg}\,(y_3^i) = a_1$ pour tout i, d'après le lemme 5.1 on a $\dim \mathfrak{q}^{-1}(\mathcal{X}) \leqslant n \times ({a_0}^2 - a_1\, b_1)$. En écrivant $\dim U^n_{p,q}(\alpha) \leqslant n\,({a_0}^2 - a_1\, b_1) + \dim \mathrm{Im}\,\mathfrak{q} + \dim \mathrm{Im}\,\mathfrak{p}$, on obtient le résultat. ∎

Définition 5.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\alpha = (a_0\,;\, b_1, a_1\,;\, \cdots\,;\, b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$. On pose :*

$$\delta^n_{p,q}(\alpha) = q \sum_{i=0}^{n} a_i + (p\, a_0 - {a_n}^2) + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \sum_{j=i+2}^{n} (a_i - a_j) + \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1)\, b_i\, (a_{i-2} - a_i - b_i)$$

avec la convention $a_{-1} = p$.

Proposition 5.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$. On a $\dim U^n_{p,q}(\alpha) \leqslant \delta^n_{p,q}(\alpha)$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est vérifié d'après l'exemple 3.15, puisque l'on a $\alpha = (a_0)$ et $\delta^0_{p,q}(\alpha) = q\, a_0 + p\, a_0 - {a_0}^2$. Soit $n \geqslant 1$, posons $\alpha = (a_0\,;\, b_1, a_1\,;\, \cdots\,;\, b_n, a_n)$ et soit $\alpha' = (a_1\,;\, b_2, a_2\,;\, \cdots\,;\, b_n, a_n)$ le type dérivé de α. D'après le lemme 5.2, en adoptant la convention $a_{-1} = p$ on a :

$$\dim U^n_{p,q}(\alpha) \;\leqslant \dim U^{n-1}_{a_0, q-a_0}(\alpha') \;+ q\, a_0 + p\, a_0 + (n-1)\, {a_0}^2 + n\, b_1\, (a_{-1} - a_1 - b_1)\,.$$

Par hypothèse de récurrence on a $\dim U^{n-1}_{a_0, q-a_0}(\alpha') \leqslant \delta^{n-1}_{a_0, q-a_0}(\alpha')$. Enfin, d'après la définition 5.3 on a :

$$\delta^{n-1}_{a_0, q-a_0}(\alpha') = (q - a_0) \sum_{i=1}^{n} a_i + a_0\, a_1 - {a_n}^2 + \sum_{i=1}^{n-2} a_i \sum_{j=i+2}^{n} (a_i - a_j) + \sum_{i=2}^{n} (n - i + 1)\, b_i\, (a_{i-2} - a_i - b_i)\,.$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. ∎

6 Minoration du rang de v_0.

6.1 La minoration.

Nous cherchons à minorer le rang de l'application $v_0 = V^n(X_0^0, \cdots, X_0^n)$ pour $u_0 \in U^n_{p,q}(\alpha)$.

Lemme 6.1. *On suppose $n \geqslant 1$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$, soit $A \in \widehat{M}^n_{p,q}$ une famille de matrices scindée de type (a,b,c) et soit A' la famille dérivée de A. On a* $\operatorname{rg} V^n(A) \geqslant (n\,a + b) + \operatorname{rg} V^{n-1}(A')$.

Démonstration. On rappelle que l'on pose $A_j = (A_j^0, \cdots, A_j^n)$ et $A'_j = (A_j^1, \cdots, A_j^n)$ pour $j \in \{1,2,3\}$; on a $A' = A'_3$. D'après le lemme 4.3 on a $\operatorname{rg} V^n(A) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} V^n(A_1) & V^n(A_2) \\ \hline V^n(A_3) & 0 \end{array}\right)$.

D'après la définition 2.3, pour $j \in \{1,2,3\}$ la matrice $V^n(A_j)$ s'écrit sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} S_j & 0 \\ \hline D_j & V_j \end{array}\right)$ avec $S_j = S^{n-1}(A'_j)$, $D_j = D^n(A_j^0)$ et $V_j = V^{n-1}(A'_j)$. Comme A est scindée de type (a,b,c) on a $A_2^0 = 0$ et $A_3^0 = 0$, donc on a $D_2 = 0$ et $D_3 = 0$. On obtient :

$$\operatorname{rg} V^n(A) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|cc} S_1 & 0 & S_2 & 0 \\ D_1 & V_1 & 0 & V_2 \\ \hline S_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_3 & 0 & 0 \end{array}\right) \geqslant \operatorname{rg} \begin{pmatrix} S_1 & 0 & S_2 \\ D_1 & V_1 & 0 \\ 0 & V_3 & 0 \end{pmatrix},$$

la minoration s'obtenant en supprimant la 3e ligne et la 4e colonne. En appliquant deux fois le lemme 3.2 on obtient $\operatorname{rg} V^n(A) \geqslant (\operatorname{rg} S_2) + (\operatorname{rg} D_1 + \operatorname{rg} V_3)$. On a $S_2 = \begin{pmatrix} A_2^1 & A_2^2 & \ldots & A_2^n \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg} S_2 \geqslant \operatorname{rg} A_2^1 = b$. La matrice D_1 étant diagonale par blocs avec n blocs égaux à A_1^0 sur la diagonale, on a $\operatorname{rg} D_1 = n \times \operatorname{rg} A_1^0 = n\,a$. Enfin, on a $V_3 = V^{n-1}(A')$. ∎

Définition 6.2. *On note χ^n l'application de $\mathbb{N}^{2n+1}$ dans $\mathbb{N}$ qui à $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \ldots; b_n, a_n)$ associe $\chi^n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\, a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.*

Le lemme 6.1 entraîne immédiatement par récurrence le résultat suivant :

Lemme 6.3. *Soit $A \in \widehat{M}^n_{p,q}$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$. Si A est décomposée de type α à l'ordre n on a $\operatorname{rg} V^n(A) \geqslant \chi^n(\alpha)$.*

Celui-ci entraîne à son tour le corollaire suivant :

Proposition 6.4. *Soit $u_0 \in \widehat{E}^n_{p,q}$ et soit α son type numérique. On a $\operatorname{rg} v_0 \geqslant \chi^n(\alpha)$.*

Démonstration. Pour toute base $B = (X^0, \cdots, X^n)$ de R_1^n on a $\operatorname{rg} v_0 = \operatorname{rg} V^n(X_0^0, \cdots, X_0^n)$. Si l'on choisit B maximisante pour u_0, la famille d'applications linéaires $u_0(B) = (X_0^0, \cdots, X_0^n)$ est décomposable de type α à l'ordre n d'après la proposition 4.15. En fixant des bases de E_0 et E_1, on se ramène alors à une famille de matrices A décomposée de type α à l'ordre n, qui vérifie $\operatorname{rg} V^n(A) \geqslant \chi^n(\alpha)$ d'après le lemme 6.3 ainsi que $\operatorname{rg} v_0 = \operatorname{rg} V^n(A)$. ∎

En particulier, on en déduit que l'application v_0 est injective dès que l'on a $\chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}p$.

Définition 6.5. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\left(\mathbb{A}^n_{p,q}\right)^0 = \left\{\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q} \mid \chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}p\right\}$ et $\overline{\mathbb{A}^n_{p,q}} = \left\{\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q} \mid \chi^n(\alpha) < \frac{n(n+1)}{2}p\right\} = \mathbb{A}^n_{p,q} \setminus \left(\mathbb{A}^n_{p,q}\right)^0$.*

6.2 Un critère d'injectivité.

D'après ce qui précède, le critère suivant fournit une condition suffisante pour que l'application v_0 soit injective :

Proposition 6.6. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\alpha = (a_0\,;\, b_1, a_1\,;\, \dots\,;\, b_n, a_n) \in \mathbb{A}^n_{p,q}$. On a $\alpha \in \left(\mathbb{A}^n_{p,q}\right)^0$ si et seulement si $a_{n-1} + b_n = p$. De plus, lorsque ces conditions sont vérifiées on a $a_i = p$ pour $i \in [\![0, n-2]\!]$ et $b_i = 0$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.*

Démonstration. D'après la définition 4.16, la suite α vérifie les relations :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i-1} + b_i \leqslant a_{i-2} \quad ; \quad a_{n-2} \leqslant a_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant a_0 \leqslant a_{-1} = p\,. \tag{6.1}$$

De plus, on a $\chi^n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1}\left[(n-i)\,a_{i-1} + (a_{i-1} + b_i)\right] + (a_{n-1} + b_n)$, donc on a $\chi^n(\alpha) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1)\,p + (a_{n-1} + b_n) = \frac{n(n+1)}{2}p - p + (a_{n-1} + b_n)$. La relation $\chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}p$ entraîne alors $p \leqslant a_{n-1} + b_n \leqslant a_{n-2} \leqslant p$, donc $a_{n-1} + b_n = p$. Réciproquement, si on a $a_{n-1} + b_n = p$, les relations (6.1) entraînent $a_{n-2} = p$, donc $a_i = p$ pour $i \in [\![-1, n-2]\!]$ et $b_i = 0$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$. On a alors $\chi^n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\,a_i + (a_{n-1} + b_n) = \frac{n(n+1)}{2}p$. ■

Proposition 6.7. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\left(\mathbb{A}^n_{p,q}\right)^0 \neq \emptyset$ si et seulement si on a $q \geqslant n\,p - E(p/2)$.*

Démonstration. Soit $\alpha = (a_0\,;\, b_1, a_1\,;\, \dots\,;\, b_n, a_n) \in \left(\mathbb{A}^n_{p,q}\right)^0$. D'après la proposition 6.6, on a $a_i = p$ pour $i \in [\![-1, n-2]\!]$ et $a_{n-1} + b_n = p$. On a de plus $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$, donc d'après la définition 4.16 on a $b_n \leqslant a_{n-1} - a_{n-2}$, donc $b_n \leqslant a_{n-1}$. Ceci entraîne $b_n \leqslant E(p/2)$ et $a_{n-1} \geqslant p - E(p/2)$. D'après la même définition, on a également $q \geqslant \sum_{i=0}^{n} a_i \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, donc on a $q \geqslant n\,p - E(p/2)$. Réciproquement, posons $\alpha = (p\,;\, 0, p\,;\, \dots\,;\, 0, p\,;\, 0, a_{n-1}\,;\, b_n, 0)$ avec $a_{n-1} = p - E(p/2)$ et $b_n = E(p/2)$. On a $b_n \leqslant a_{n-1}$, $b_n \leqslant p - a_{n-1}$ et $\sum_{i=0}^{n} a_i = n\,p - E(p/2)$, donc d'après la définition 4.16 on a $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$ si $q \geqslant n\,p - E(p/2)$. On a de plus $a_{n-1} + b_n = p$, donc d'après la proposition 6.6 on a $\alpha \in \left(\mathbb{A}^n_{p,q}\right)^0$. On en déduit que $\left(\mathbb{A}^n_{p,q}\right)^0$ est non-vide. ■

Remarque. D'après la dernière remarque du paragraphe 2.2, une stratification de $\widehat{E}^n_{p,q}$ ne peut prouver l'irréductibilité des schémas $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ que lorsque l'ensemble $\mathbb{A}^0$ est non-vide. La proposition 6.7 montre donc qu'il est nécessaire de construire une stratification plus fine que celle par le multirang pour étudier la conjecture $(\mathcal{C}^n)$ dans les cas où l'on a $q < \min\left(n\,p - E(p/2), n\,r - E(r/2)\right)$.

6.3 Démonstration du théorème 1.8.

D'après la proposition 2.6 et compte-tenu de l'isomorphisme $\widehat{E}^n_{p,q,r} \cong \widehat{E}^n_{r,q,p}$, il suffit pour établir le théorème 1.8 de prouver le résultat suivant :

Proposition 6.8. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si on a $q \geqslant np - E(p/2)$, l'ouvert W de $\widehat{E}^n_{p,q}$ sur lequel l'application v_0 est injective est non vide.*

Démonstration. D'après la proposition 6.7, si on a $q \geqslant np - E(p/2)$ l'ensemble $\left(\mathbb{A}^n_{p,q}\right)^0$ est non vide. Soit alors $\alpha \in \left(\mathbb{A}^n_{p,q}\right)^0$, on a $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$ et $\chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}p$. D'après la remarque qui précède la proposition 4.8, il existe dans $\widehat{M}^n_{p,q}$ des familles de matrices décomposées de type α à l'ordre n. Soit $A = (A^0, \cdots, A^n)$ une telle famille, on a $\operatorname{rg} V^n(A) \geqslant \chi^n(\alpha)$ d'après le lemme 6.3, donc $\operatorname{rg} V^n(A) = \frac{n(n+1)}{2}p$. Si l'on fixe une base $B = (X^0, \cdots, X^n)$ de R^n_1 ainsi que des bases de E_0 et E_1, la structure de module u_0 de $\widehat{E}^n_{p,q}$ définie par $u_0(X^i) = A^i$ pour $i \in [\![0,n]\!]$ vérifie alors $\operatorname{rg} v_0 = \frac{n(n+1)}{2}p$, donc l'ouvert W est non vide. ■

7 Conclusion.

Il reste à démontrer les théorèmes 1.7 et 1.9. On fixe les entiers $(p,q,r) \in \mathbb{N}^{*3}$ et on suppose $p \leqslant r$. Pour $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$, on pose $\mu(\alpha) = \left[(n+1)\,pq - \delta^n_{p,q}(\alpha)\right] - r\left[\frac{n(n+1)}{2}\,p - \chi^n(\alpha)\right]$ et $\nu(\alpha) = \mu(\alpha) + (n+1)\left(\frac{n}{2}\,r - q\right)p$. D'après les propositions 2.11 et 2.10, il suffit d'étudier respectivement $\mu(\alpha)$ pour $\alpha \in \overline{\mathbb{A}^n_{p,q}}$ et $\nu(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$ pour prouver ces deux théorèmes. Pour exploiter efficacement les relations qui définissent les ensembles $\mathbb{A}^n_{p,q}$ et $\overline{\mathbb{A}^n_{p,q}}$, on commence par effectuer le changement de variable suivant :

Définition 7.1. *Soit $\alpha = (a_0\,;\, b_1, a_1\,;\, \cdots\,;\, b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$. Pour $i \in [\![0, n+1]\!]$ on pose $c_i = a_{i-1} - a_i$ avec les conventions $a_{-1} = p$ et $a_{n+1} = 0$, soit $c_0 = p - a_0$ et $c_{n+1} = a_n$.*

Les $(2n+2)$ entiers c_i vérifient la relation $\sum_{i=0}^{n+1} c_i = p$. Ils permettent de retrouver les entiers a_i par les formules $a_i = \sum_{k=i+1}^{n+1} c_k = p - \sum_{k=0}^{i} c_k$ et on a :

Proposition 7.2. *Une suite $\alpha = (a_0\,;\, b_1, a_1\,;\, \cdots\,;\, b_n, a_n)$ de $\mathbb{N}^{2n+1}$ appartient à $\mathbb{A}^n_{p,q}$ si et seulement si on a $c_i \geqslant 0$ pour $i \in [\![0, n+1]\!]$, $0 \leqslant b_i \leqslant \min(c_{i-1}, c_i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $q \geqslant \sum_{i=0}^{n+1} i\, c_i = (n+1)\,p - \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\, c_i$.*

Démonstration. C'est une traduction immédiate de la définition 4.16. ■

Proposition 7.3. *Soit $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \ldots; b_n, a_n) \in \mathbb{A}^n_{p,q}$.*

(i) Si on a $\alpha \in \overline{\mathbb{A}^n_{p,q}}$, il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ qui vérifie $c_i \geqslant 1$.

(ii) Si $\alpha \neq (0, \cdots, 0)$, il existe $i \in [\![1, n+1]\!]$ qui vérifie $c_i \geqslant 1$.

Démonstration. Les c_i étant des entiers, il suffit d'avoir $c_i > 0$. Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{A}^n_{p,q}}$, on a $a_{n-1} + b_n < p$, donc $\sum_{i=0}^{n-1} c_i = p - a_{n-1} > b_n \geqslant 0$, d'où *(i)*. Si on a $c_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, les relations $a_i = \sum_{k=i+1}^{n+1} c_k$ pour $i \in [\![0, n+1]\!]$ et $b_i \leqslant \min(c_{i-1}, c_i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ entraînent $\alpha = (0, \cdots, 0)$, d'où *(ii)*. ■

7.1 Démonstration du théorème 1.7.

D'après la proposition 2.11, il suffit de minorer l'entier $\overline{\mu} = \min_{\alpha \in \overline{\mathbb{A}^n_{p,q}}} \mu(\alpha)$. Pour exploiter les propositions 7.2 et 7.3, on commence par exprimer $\mu(\alpha)$ en fonction des entiers b_i et c_i. Il s'agit là d'un travail relativement long et purement combinatoire, pour lequel nous nous contentons d'indiquer le principe des calculs à effectuer ; ceux-ci sont intégralement détaillés dans [G]. Pour $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \ldots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$, on montre tout d'abord :

Proposition 7.4. *On a* $\mu(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \left[q - ip - \binom{n-i}{2} r \right] (n+1-i)\, c_i - \sum_{i=0}^{n} p\, c_i + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} c_j\, c_i$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1)\, c_{j-1} \right] (n+1-i)\, c_i + r \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\, (c_{i-1} - b_i)\, (c_i - b_i)\,.$$

Démonstration. Le principe essentiel du calcul consiste à regrouper les termes a_i pour faire apparaître des différences de la forme $a_s - a_t = \sum_{k=s+1}^{t} c_k$. ■

On en déduit ensuite la minoration qui suit :

Définition 7.5. *Pour* $i \in [\![0, n-1]\!]$ *on pose* $\mu_i = q - \left(i + \frac{1}{n+1-i}\right) p - \binom{n-i}{2} r$ *et* $m_i = (n+1-i)\, \mu_i$.

Corollaire 7.6. *Soit* $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$.
(i) Pour $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$ *on a* $\mu(\alpha) \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} {c_i}^2 + \sum_{i=0}^{n-1} m_i\, c_i$.
(ii) Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{A}^n_{p,q}}$ *on a* $\mu(\alpha) \geqslant 1 + \sum_{i=0}^{n-1} m_i\, c_i$.

Démonstration. On déduit *(i)* de la proposition 7.4 en exploitant la proposition 7.2. Le point *(ii)* est alors immédiat compte-tenu de la proposition 7.3 *(i)*. ■

Définition 7.7. *Soit* $(p, r) \in \mathbb{N}^{*2}$ *avec* $p \leqslant r$. *On pose* $Q_0 = \frac{p}{n+1} + \frac{nr}{2}$, $Q_1 = \left(n - \frac{1}{2}\right) p + \frac{r}{2}$ *et* $Q = \max(Q_0, Q_1)$, *soit* $Q = Q_0$ *si* $r \geqslant \left(\frac{2n+3}{n+1}\right) p$ *et* $Q = Q_1$ *si* $p \leqslant r \leqslant \left(\frac{2n+3}{n+1}\right) p$.

Ces notations sont celles du théorème 1.7 exprimées sous l'hypothèse $p \leqslant r$.

Lemme 7.8. *Pour* $i \in [\![0, n-1]\!]$ *on a* $\mu_i \geqslant q - Q$.

Démonstration. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\mu_i = \mu_0 - i\, h_i$ avec $h_i = \frac{p}{(n+1)(n+1-i)} + p - \frac{r}{2}$. Ceci entraîne que l'on a $\mu_i \geqslant \min(\mu_0, \mu_{n-1})$ quel que soit le signe de h_i : pour $h_i \leqslant 0$ on a $\mu_i \geqslant \mu_0$ et pour $h_i > 0$ on a $0 \leqslant h_i \leqslant h_{n-1}$, donc $\mu_i \geqslant \mu_{n-1}$. On a de plus $\mu_0 = q - Q_0$ et $\mu_{n-1} = q - Q_1$, donc on a $\min(\mu_0, \mu_{n-1}) = q - Q$. ■

Proposition 7.9. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *soit* $(p, r) \in \mathbb{N}^{*2}$ *avec* $p \leqslant r$ *et soit* $q \in \mathbb{N}^*$. *Si on a* $q \geqslant Q$ *on a* $\overline{\mu} \geqslant 1$. *Si on a* $q > Q$, *on a* $\overline{\mu} \geqslant 2$. *Enfin, pour* $r \in \left[p, \frac{2n+3}{n+1} p\right]$ *on a* $\overline{\mu} \geqslant 1 + 2(q - Q_1)$ *et pour* $r \geqslant \left(\frac{2n+3}{n+1}\right) p$ *on a* $\overline{\mu} \geqslant 1 + \min\left[(n+1)(q - Q_0),\, 2(q - Q_1)\right]$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{A}^n_{p,q}}$ et soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. On a $c_i \geqslant 0$ d'après la proposition 7.2 et l'hypothèse $q \geqslant Q$ entraîne $\mu_i \geqslant 0$ d'après le lemme 7.8, donc on a $m_i \geqslant 0$. On en déduit $\mu(\alpha) \geqslant 1$ par le corollaire 7.6 *(ii)*, donc on a $\overline{\mu} = \min_{\alpha \in \overline{\mathbb{A}^n_{p,q}}} \mu(\alpha) \geqslant 1$.

De plus, d'après la proposition 7.3 *(i)* il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ qui vérifie $c_i \geqslant 1$. On a donc $\mu(\alpha) \geqslant 1 + \min_{i \in [\![0,n-1]\!]} m_i$ d'après le corollaire 7.6 *(ii)*, donc aussi $\overline{\mu} \geqslant 1 + \min_{i \in [\![0,n-1]\!]} m_i$. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$, l'hypothèse $q > Q$ entraîne $\mu_i > 0$ d'après le lemme 7.8, donc $m_i > 0$, soit encore $m_i \geqslant 1$ car on a $m_i \in \mathbb{Z}$. On en déduit $\overline{\mu} \geqslant 2$.

Supposons $r \in \left[p, \frac{2n+3}{n+1}\, p\right]$. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ on a $n+1-i \geqslant 2$ et $\mu_i \geqslant q - Q = q - Q_1$, donc on a $m_i \geqslant 2\,(q - Q_1)$, donc $\overline{\mu} \geqslant 1 + 2\,(q - Q_1)$. Supposons enfin $r \geqslant \frac{2n+3}{n+1}\, p$, on a $r > 2p$. En développant l'expression de m_i, on obtient un polynôme du second degré en i dont le terme principal $i^2(p - r/2)$ est négatif, donc on a $m_i \geqslant \min(m_0, m_{n-1})$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$. On en déduit $\overline{\mu} \geqslant 1 + \min(m_0, m_{n-1})$, soit $\overline{\mu} \geqslant 1 + \min\left[(n+1)\,(q - Q_0)\,,\, 2\,(q - Q_1)\right]$. ■

Compte-tenu de la proposition 2.11, on en déduit immédiatement :

Théorème 7.10. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(p, r) \in \mathbb{N}^{*2}$ avec $p \leqslant r$, soit $q \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{S}$ le lieu singulier de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$.*

(i) Si on a $q \geqslant Q$, le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est irréductible, génériquement lisse, intersection complète et de dimension $\Delta^n_{p,q,r} = (n+1)\left(pq + qr - \frac{n}{2}\, pr\right)$.

(ii) Si on a de plus $q > Q$, on a $\operatorname{Codim} \mathcal{S} \geqslant 2$ et le schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ est normal.

(iii) Enfin, pour $r \in \left[p\,,\, \frac{2n+3}{n+1}\, p\right]$ on a $\operatorname{Codim} \mathcal{S} \geqslant 1 + 2\,(q - Q_1)$ et pour $r \geqslant \left(\frac{2n+3}{n+1}\right) p$ on a $\operatorname{Codim} \mathcal{S} \geqslant 1 + \min\left[(n+1)\,(q - Q_0)\,,\, 2\,(q - Q_1)\right]$.

Compte-tenu de l'isomorphisme $\widehat{E}^n_{p,q,r} \cong \widehat{E}^n_{r,q,p}$, ce théorème est exactement équivalent au théorème 1.7, dont on retrouve la formulation en séparant les cas $p \leqslant r < \frac{2n+3}{n+1}\, p$ et $p \geqslant \frac{2n+3}{n+1}\, p$.

7.2 Démonstration du théorème 1.9.

D'après la proposition 2.10, il faut minorer la quantité $\nu(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$. De la même façon qu'au paragraphe précédent, on commence par exprimer $\nu(\alpha)$ en fonction des entiers c_i et b_i. On établit successivement une expression exacte et une minoration de $\nu(\alpha)$, pour lesquelles nous renvoyons de nouveau à [G]. On obtient :

Proposition 7.11. *Soit $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \ldots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$. On pose $e_{n+1} = 1/(n+1)$ et $e_i = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. On a*
$$\nu(\alpha) = \sum_{i=1}^{n+1} \left[\frac{2n+1-i}{2}\, r - (n+1-i+e_i)\, p - q\right] i\, c_i + (c_{n+1})^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \Big[(n+1-i)\,(i-j+1) - 1\Big]\, c_{j-1}\, c_i + \sum_{i=1}^{n} b_i (r - c_{i-1} - c_i + b_i) + \sum_{i=1}^{n} (n-i)\,(c_{i-1} - b_i)\,(c_i - b_i)\,.$$

Définition 7.12. *Soit $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$. Avec les notations de la proposition 7.11, on pose $h_i = \left(\frac{nr}{2} - q\right) + (n+1-i)\left(\frac{r}{2} - p\right)$ et $\nu_i = h_i - e_i\, p$ pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, soit $\nu_i = h_i$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $\nu_{n+1} = h_{n+1} - p/(n+1)$.*

Corollaire 7.13. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$. Si $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$ on a $\nu(\alpha) \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} i\, \nu_i\, c_i$.*

Démonstration. On déduit cette minoration de la proposition 7.11 en exploitant la proposition 7.2. ■

On en déduit alors :

Proposition 7.14. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(p,r) \in \mathbb{N}^{*2}$ avec $p \leqslant r$ et soit $q \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{Q} = \min\left[n(r-p)\,,\ \frac{nr}{2} - \frac{p}{n+1}\right]$ et on pose $\alpha_0 = (0, \cdots, 0)$.*

(i) Si on a $q \leqslant \mathcal{Q}$, on a $\nu(\alpha) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$.

(ii) Si on a $q < \mathcal{Q}$, on a $\nu(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q} \smallsetminus \{\alpha_0\}$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{A}^n_{p,q}$. On a $\nu_1 = n(r-p) - q$ et $\nu_{n+1} = \left(\frac{nr}{2} - \frac{p}{n+1}\right) - q$ donc $\mathcal{Q} - q = \min(\nu_1, \nu_{n+1})$. De plus, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ on a $h_i \geqslant \min(h_1, h_{n+1})$, quel que soit le signe de $(r/2 - p)$. On en déduit que pour $i \in [\![1, n]\!]$ on a $\nu_i = h_i \geqslant \min(h_1, h_{n+1}) \geqslant \min(\nu_1, \nu_{n+1})$, donc que pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ on a $\nu_i \geqslant \min(\nu_1, \nu_{n+1}) = \mathcal{Q} - q$. Par conséquent, si on a $q \leqslant \mathcal{Q}$, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ on a $\nu_i \geqslant 0$ et $c_i \geqslant 0$, donc on a $\nu(\alpha) \geqslant 0$ d'après le corollaire 7.13. De plus, si on a $\alpha \neq \alpha_0$, il existe $i \in [\![1, n+1]\!]$ qui vérifie $c_i \geqslant 1$ d'après la proposition 7.3 *(ii)*, donc on a $\nu(\alpha) \geqslant \min_{i \in [\![1, n+1]\!]} i\,\nu_i$ d'après le corollaire 7.13. L'hypothèse $\mathcal{Q} - q > 0$ entraînant $\nu_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on obtient $\nu(\alpha) > 0$ pour $\alpha \neq \alpha_0$. ■

La strate $U(\alpha_0)$ étant le fermé $\mathcal{F}_0$ de $\widehat{E}^n_{p,q,r}$ défini par $u_0 = 0$, d'après la proposition 2.10 on obtient immédiatement le résultat suivant :

Théorème 7.15. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(p,r) \in \mathbb{N}^{*2}$ avec $p \leqslant r$ et soit $q \in \mathbb{N}^*$.*

i) Si on a $q \leqslant \mathcal{Q}$, le fermé $\mathcal{F}_0$ est une composante génériquement lisse de dimension $(n+1)\,qr$ du schéma $\widehat{E}^n_{p,q,r}$. Celui-ci possède d'autres composantes, dont les dimensions sont toutes majorées par $(n+1)\,qr$.

ii) Si on a $q < \mathcal{Q}$, la composante $\mathcal{F}_0$ est la seule de dimension $(n+1)\,qr$.

Compte-tenu de l'isomorphisme $\widehat{E}^n_{p,q,r} \cong \widehat{E}^n_{r,q,p}$, qui échange les fermés $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$, ce théorème est exactement équivalent au théorème 1.9.

Références

[BB] E. Ballico et G. Bolondi, *The variety of module structures*, Arch. der Math. 54, pp. 397–408, 1990.

[G] S. Ginouillac, *Étude de l'irréductibilité du schéma des modules de Rao et de la question de Sernesi-Walter*, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud ORSAY, Janvier 1998.

[MDP–1] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, *Sur la classification des courbes gauches*, Astérisque 184-185, Soc. Math. de France, 1990.

[MDP–2] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, *Courbes gauches et modules de Rao*, J. Reine Angew. Math. 439, pp. 103–145, 1993.

[R] A. P. Rao, *Liaison among curves in* $\mathbb{P}^3$, Invent. Math. 50, pp. 205–217, 1979.