PRÉPUBLICATIONS

Opérateurs d'extension linéaires explicites dans des intersections de classes ultradifférentiables.

par

Pascal Beaugendre

2003 – 67

Université de PARIS-SUD
MATHÉMATIQUES
Bâtiment 425
91405 ORSAY
France

Pascal BEAUGENDRE[1]

Opérateurs d'extension linéaires explicites dans des intersections de classes ultradifférentiables.

Résumé. B. S. Mityagin a montré que les polynômes de Tchebyshev forment une base de Schauder de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur l'intervalle [-1,1]. Il en déduit un opérateur linéaire continu d'extension explicite. Ces résultats ont été étendus, par A. Goncharov, à des compacts ne satisfaisant pas la propriété de Markov. A contrario, M. Tidten a donné des exemples de compacts pour lesquels il n'y a pas d'opérateur linéaire continu d'extension. Dans cet article, on généralise ces travaux à des classes de fonctions ultradifférentiables construites sur le modèle de l'intersection des classes de Gevrey non quasi-analytiques. On obtient notamment un théorème d'extension linéaire dans des classes de Beurling assez grandes.

Mots clés : jets, fonctions ultradifférentiables, classes de Beurling, théorème d'extension de Whitney, polynômes de Tchebyshev, bases de Schauder, opérateurs d'extension linéaires, propriété de Markov.

Extension of Whitney jets by explicit linear operators in intersections of ultradifferentiable classes.

Abstract. B. S. Mityagin proved that the Tchebyshev polynomials form a Schauder basis of the space of C^∞ functions on the interval [-1,1]. Whereof he deduced an explicit continuous linear extension operator. These results were extended, by A. Goncharov, to compact sets without Markov's property. On the reverse, M. Tidten gave examples of compact sets for which there is no continuous linear extension operator. In this paper, we generalize these works to the intersections of ultradifferentiable classes of functions built on the model of the non quasi-analytic intersection of Gevrey classes. We get, among other things, a Whitney linear extension theorem for ultradifferentiable jets of Beurling type.

Key words : jets, ultradifferentiable functions, Beurling classes, Whitney's extension theorem, Schauder basis, Tchebyshev polynomials, linear extension operators, Markov's property.

2000 *Mathematics Subject Classification* : 26E10, 41A10, 46E10, 46E15.

[1]Université de Paris-Sud Mathématiques; Bâtiment 425. 91405 ORSAY, France.
Pbeaugendre@ifrance.com

1 Introduction.

B. S. Mityagin a démontré, dans $[Mi]$, que les polynômes Tchebyshev forment une base de Schauder absolue de l'espace $C^{\infty}([-1,1])$. Il en déduit un opérateur d'extension linéaire explicite, de $C^{\infty}([-1,1])$ dans $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

On dit que le compact E de $\mathbb{R}^n$ vérifie *la propriété de Markov* lorsqu'il existe deux constantes $\mathcal{M} > 0$ et $r \geq 2$ telles que, pour tout polynôme Q et pour tout multi-indice $(j_1, ..., j_n)$ de longueur j, on ait

$$\sup_{x \in E} \left| \frac{\partial^j Q(x)}{\partial^{j_1} x_1 ... \partial^{j_n} x_n} \right| \leq \mathcal{M} (\deg Q)^{rj} \sup_{x \in E} |Q(x)|.$$

Pour des compacts ayant une telle "régularité", en utilisant une méthode d'interpolation à l'aide de polynômes de Lagrange, W. Pawłucki et W. Pleśniak ont donné une généralisation du théorème d'extension linéaire de Mityagin.

Des résultats similaires ont été obtenus récemment par A. Goncharov, pour des compacts irréguliers de $\mathbb{R}$ ne vérifiant pas nécessairement la propriété de Markov. A contrario, M. Tidten a donné un exemple de compact pour lequel il n'y a pas d'opérateur linéaire continu d'extension.

Il est naturel d'étudier ensuite s'il y a des énoncés analogues dans des classes ultradifférentiables, c'est-à-dire pour des ensembles de fonctions définis par des conditions de croissance des dérivées. Pour des classes de fonctions ultradifférentiables construites sur le modèle de l'intersection des classes de Gevrey non quasi-analytiques, on a établi, dans $[Be]$, un théorème d'extension de type Whitney. Pour les compacts vérifiant une propriété de Markov et dans de grandes classes, on a démontré un théorème d'extension linéaire. Dans ce nouveau travail et toujours dans le cadre de ces classes, on démontre des versions ultradifférentiables des résultats de B. S. Mityagin, de A. Goncharov et de M. Tidten.

Plus précisément, soit ϕ une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et vérifiant la condition suivante

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty. \tag{1}$$

On considère l'ensemble $I_\phi([-1,1])$ formé des fonctions f, infiniment dérivables sur $[-1,1]$, vérifiant la condition suivante :

pour tout $a > 0$, il existe une constante N_a telle que, pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on ait

$$\left| f^{(p)}(x) \right| \leq N_a p! \exp(\phi(ap)).$$

En notant $\|f\|_a$ la plus petite constante N_a réalisant l'inégalité précédente, on définit une famille de normes sur $I_\phi([-1,1])$ qui lui confère une structure d'espace de Fréchet. On définit également l'ensemble $I_\phi(\mathbb{R})$, en considérant des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

On démontre d'abord le théorème suivant.

Théorème A. 1) *Sous l'hypothèse (1), les polynômes Tchebyshev forment une base de Schauder absolue de l'espace de Fréchet* $I_\phi([-1,1])$.
2) *Si* $\lim_{u\to+\infty}\frac{\phi(u)}{u\ln u}=+\infty$, *alors, il existe une application linéaire continue* U, *de* $I_\phi([-1,1])$ *dans* $I_\phi(\mathbb{R})$ *telle que, pour toute fonction* $f\in I_\phi([-1,1])$, *et tout* $x\in[-1,1]$, *on ait*

$$U(f)(x)=f(x).$$

Ensuite on considère deux suites $(a_k)_{k\geq1}$ et $(b_k)_{k\geq1}$ vérifiant les conditions suivantes.

- Les suites $(a_k)_{k\geq1}$ et $(b_k-a_k)_{k\geq1}$ décroissent vers 0.
- $b_1\leq1$ et pour tout entier $k\geq1$, on a $a_k-b_{k+1}>0$.
- Il existe deux constantes $C_0\geq3$ et $M>0$ telles que, pour tout $k\geq1$, on ait $2b_k\leq C_0(b_k-a_k)$, $b_k-a_k\leq2C_0(a_k-b_{k+1})$ et $b_{k+1}-a_{k+1}\geq2^{1-M}(b_k-a_k)^M$.

On définit le compact de Goncharov

$$K=\{0\}\cup\left(\bigcup_{k\geq1}[a_k,b_k]\right).$$

Pour ce compact, on remplace la notion de fonction infiniment dérivable sur le compact par celle de jet de Whitney et on définit l'espace de jets $I_\phi(K)$. On établit alors le résultat suivant.

Théorème B. *Si* $\lim_{u\to+\infty}\frac{\phi(u)}{u^2}=+\infty$, *alors, l'espace de Fréchet* $I_\phi(K)$ *a une base de Schauder absolue et il existe une application linéaire continue* U, *de* $I_\phi(K)$ *dans* $I_\phi(\mathbb{R})$ *telle que, pour tout jet* $f\in I_\phi(K)$, *tout* $x\in K$ *et tout* $j\in\mathbb{N}$, *on ait*

$$(U(f))^{(j)}(x)=f^{(j)}(x).$$

Notons que dans le cas particulier où $\phi(u)=u^a$, avec $a>2$, $I_\phi(K)$ est un espace de Beurling (voir $[BMT]$).

Ce travail est complété par le résultat suivant qui donne un exemple de compact "ventru" de $\mathbb{R}^2$ pour lequel il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension.

Théorème C. *On suppose que* $\lim_{u\to+\infty}\frac{\phi(u)}{u\ln(\ln u)}=+\infty$, *alors, il existe une fonction* $g\in I_\phi(\mathbb{R})$ *telle que* $g>0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $g=0$ *sur* $\mathbb{R}_-$. *On pose*

$$K_g=\left\{(x,y)\in[0,1]^2,0\leq y\leq g(x)\right\}.$$

Alors il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension de $I_\phi(K_g)$ *dans* $I_\phi(\mathbb{R}^2)$.

2 Préliminaires : les polynômes de Tchebyshev.

2.1 Rappels.

Soit n un entier, on pose, pour tout $x \in [-1,1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$; c'est *le polynôme de Tchebyshev* de degré n pour l'intervalle $[-1,1]$. On continuera à le noter $T_n(x)$ lorsqu'il est défini sur $\mathbb{R}$.

Le coefficient du terme de degré n de T_n est égal à 2^{n-1} si $n > 0$; il vaut 1 sinon. Le polynôme $T_n(x)$ possède n racines distinctes appartenant à l'intervalle $[-1,1]$.

En appliquant le théorème de Dirichlet à la fonction $t \mapsto f(\cos t)$, on établit le théorème suivant qui donne le développement de Tchebyshev d'une fonction continûment dérivable.

2.2 Théorème.

Soit f une fonction continûment dérivable sur $[-1,1]$. On pose

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \cos)(t)\, dt$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \cos)(t) \cos(nt)\, dt.$$

Alors, pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\, T_n(x).$$

De plus, si f est de classes C^∞, alors cette égalité a lieu pour toutes les dérivées de f.

En particulier, si P est un polynôme de degré d, on a $P(x) = \sum_{n=0}^{d} a_n(P)\, T_n(x)$.

2.3 Quelques inégalités vérifiées par les polynômes de Tchebyshev.

Dans ce paragraphe, si f est une fonction continue sur $[-1,1]$, on pose $\|f\|_{[-1,1]} = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

2.3.1 Proposition (inégalité de W.A. Markov $[DL]$ p. 131 ou $[Riv]$ p. 123).

Si P est un polynôme de degré au plus n, alors, pour tout entier p, on a

$$\left\|P^{(p)}\right\|_{[-1,1]} \leq T_n^{(p)}(1)\, \|P\|_{[-1,1]}.$$

2.3.2 Corollaire.

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, *on a*

$$\left\|T_n^{(p)}\right\|_{[-1,1]} = T_n^{(p)}(1) \leq \frac{n^{2p}}{p!}. \tag{2}$$

2.3.3 Proposition. ([DL] p. 131 ou [Riv] p. 108).

Si P est un polynôme de degré au plus n, alors, pour tout réel x, $|x| \geq 1$ et pour tout entier p, on a

$$\left|P^{(p)}(x)\right| \leq \left|T_n^{(p)}(x)\right| \|P\|_{[-1,1]}$$

Enfin, on en déduit facilement la proposition suivante.

2.3.4 Proposition.

Si $x \in \left[-1-\frac{1}{1+n^2}, 1+\frac{1}{1+n^2}\right]$, *alors, pour tout* $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, *on a*

$$\left|T_n^{(p)}(x)\right| \leq e^2 \frac{n^{2p}}{p!}. \tag{3}$$

3 Une base de l'espace $I_\phi([-1,1])$.

Dans tout ce qui suit, on suppose que ϕ est une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et vérifiant la condition suivante

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty. \tag{4}$$

3.1 Notations.

Soit I un intervalle de longueur non nulle. On considère l'espace de Banach $\{\phi(t), I\}$ formé des fonctions f, de classe C^∞ sur I, vérifiant la condition suivante

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} \sup_{x\in I} \frac{\left|f^{(p)}(x)\right|}{p! \exp(\phi(p))} = \|f\|_{\{\phi(t),I\}} < +\infty.$$

On note $h_{\phi(t)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant, pour tout $\rho > 0$,

$$h_{\phi(t)}(\rho) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left(\rho^k \exp(\phi(k))\right).$$

Plus généralement, si $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}_+$, pour tout $\rho > 0$, on pose

$$h_{\phi(\alpha_1 t+\alpha_2)+\alpha_3 t\ln t}(\rho) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left(\rho^k k^{\alpha_3 k} \exp(\phi(\alpha_1 k+\alpha_2))\right).$$

3.2 Définition.

Soit $\mathcal{F}$ un espace de Fréchet muni d'une famille de semi-normes $(\|.\|_a)_{a>0}$. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ et $(x'_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments du dual de $\mathcal{F}$. On dit que le système $\left\{(x_n)_{n\geq 0}, (x'_n)_{n\geq 0}\right\}$ est une *base de Schauder* de l'espace $\mathcal{F}$ lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées
(i) $\left\{(x_n)_{n\geq 0}, (x'_n)_{n\geq 0}\right\}$ est un système biorthogonal,
(ii) pour tout $x \in \mathcal{F}$, on a $x = \sum_{n\geq 0} x'_n(x)\, x_n$.
De plus, on dit que cette base est *absolue* lorsque, pour tout $a > 0$, il existe deux réels $b > 0$ et $\sigma > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathcal{F}$, on ait $\sum_{n=0}^{+\infty} |x'_n(x)|\, \|x_n\|_a \leq \sigma \|x\|_b$.

3.3 Lemme.

Soit f une fonction appartenant à $\{\phi(t), [-1,1]\}$. Avec les notations du théorème 2.2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|a_n(f)| \leq \frac{16}{n^2} h_{\phi(t+2)+t\ln t}\left(\frac{4}{n}\right) \|f\|_{\{\phi(t),[-1,1]\}}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $r \in \mathbb{N}^*$. Après r intégrations par parties, on a

$$a_n(f) = \frac{(-1)^p}{\pi n^r} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \cos)^{(r)}(t) \cos(nt)\, dt \text{ si } r = 2p$$

ou

$$a_n(f) = \frac{(-1)^{p+1}}{\pi n^r} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \cos)^{(r)}(t) \sin(nt)\, dt \text{ si } r = 2p+1.$$

Or, en utilisant la formule de Faà di Bruno [*Ro*], on a

$$\frac{\left|(f \circ \cos)^{(r)}(t)\right|}{r!} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{f^{(i)}(\cos(t))}{i!} \sum_{J \in J_{i,r}} C_{J,i,r} \prod_{s=1}^{r} \left(\frac{(\cos)^{(s)}(t)}{s!} \right)^{j_s} \right)$$

en posant $J_{i,r} = \{(j_1, ..., j_r) \in \mathbb{N}^r, \sum_{s=1}^{r} s j_s = r \text{ et } \sum_{s=1}^{r} j_s = i.\}$. De plus les constantes $C_{J,i,r}$ vérifient

$$\sum_{J \in J_{i,r}} C_{J,i,r} = \binom{r-1}{i-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\left|(f \circ \cos)^{(r)}(t)\right|}{r!} \leq 2^{r-1} \sup_{0\leq i\leq r} \frac{\left\|f^{(i)}\right\|_{[-1,1]}}{i!} \leq \|f\|_{\{\phi(t),[-1,1]\}} 2^{r-1} \exp(\phi(r)). \quad (5)$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{n^r} \|f\|_{\{\phi(t),[-1,1]\}} 2^r r! \exp(\phi(r)). \tag{6}$$

En prenant $r+2$ à la place de r, on a

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{n^{r+2}} \|f\|_{\{\phi(t),[-1,1]\}} 2^{r+2} (r+2)! \exp(\phi(r+2))$$

et, comme $(r+2)! \leq r! 2^{r+2} \leq r^r 2^{r+2}$, on obtient

$$|a_n(f)| \leq \frac{16}{n^2} \left(\frac{4}{n}\right)^r \|f\|_{\{\phi(t),[-1,1]\}} r^r \exp(\phi(r+2)).$$

Il suffit de minimiser par rapport à r pour conclure.

3.4 Lemme.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$h_{\phi(a(t+2))+t\ln t}\left(\frac{4}{n}\right) \leq \frac{\exp(\phi(2a))}{h_{\phi(at)}\left(\frac{1}{8e}\right)} h_{\phi(8at)+2t\ln t}\left(\frac{1}{e^2n^2}\right).$$

Démonstration. Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier p, on a $p+2 \leq \max(2,3p)$ et donc $\phi(a(p+2)) \leq \phi(2a)+\phi(3ap)$. Comme $\phi(3ap)+\phi(ap) \leq \phi(4ap)$, on a

$$p^p \left(\frac{4}{n}\right)^p \exp(\phi(a(p+2))) \leq \left(\frac{p}{2}\right)^p \left(\frac{1}{e^2n^2}\right)^{\frac{p}{2}} \exp(\phi(4ap)) \frac{(8e)^p}{\exp(\phi(ap))} \exp(\phi(2a))$$

et donc

$$p^p \left(\frac{4}{n}\right)^p \exp(\phi(a(p+2))) \leq \left(\frac{p}{2}\right)^p \left(\frac{1}{e^2n^2}\right)^{\frac{p}{2}} \exp(\phi(4ap)) \frac{\exp(\phi(2a))}{h_{\phi(at)}\left(\frac{1}{8e}\right)}.$$

On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned} \inf_{p\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e^2n^2}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2}\right)^p \exp(\phi(4ap)) &= \inf_{p'\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e^2n^2}\right)^{p'} p'^{2p'} \exp(\phi(8ap')) \\ &\leq \inf_{p\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e^2n^2}\right)^{p} p^{2p} \exp(\phi(8ap)). \end{aligned}$$

3.5 Définition.

On considère l'intersection $I_\phi([-1,1]) = \bigcap_{a>0} \{\phi(at), [-1,1]\}$ et, pour alléger les notations, on pose $\|.\|_{\{\phi(at),[-1,1]\}} = \|.\|_a$. Alors $I_\phi([-1,1])$ est l'espace de Fréchet formé des fonctions f de classe C^∞ sur $[-1,1]$ vérifiant la condition suivante :

pour tout $a > 0$,

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} \sup_{x\in[-1,1]} \frac{\left|f^{(p)}(x)\right|}{p! \exp(\phi(ap))} = \|f\|_a < +\infty.$$

3.6 Théorème.

Le système $\left\{(T_n)_{n\geq 0}, (a_n)_{n\geq 0}\right\}$ *est une base de Schauder absolue de l'espace de Fréchet* $I_\phi([-1,1])$.

Démonstration. Il est clair que le système $\left\{(T_n)_{n\geq 0}, (a_n)_{n\geq 0}\right\}$ est biorthogonal et on sait déjà que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) T_n$, au sens de la convergence simple (c'est une conséquence du théorème 2.2).

Si $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la majoration (2), on a

$$\|T_n\|_{8a} \leq \sup_{0\leq p\leq n} \frac{1}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^p (p!)^2 \exp(\phi(8ap))} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{e^2 n^2}\right)^p p^{2p} \exp(\phi(8ap))}$$

et donc

$$\|T_n\|_{8a} \leq \frac{1}{h_{\phi(8at)+2t\ln t}\left(\frac{1}{e^2 n^2}\right)}.$$

Ensuite, avec les lemmes 3.3 et 3.4, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(f)| \|T_n\|_{8a} &\leq 16 \frac{\exp(\phi(2a))}{h_{\phi(at)}\left(\frac{1}{8e}\right)} \|f\|_a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + |a_0(f)| \\ &\leq \left(\frac{8\pi^2}{3} \frac{\exp(\phi(2a))}{h_{\phi(at)}\left(\frac{1}{8e}\right)} + 1\right) \|f\|_a .\end{aligned}$$

Remarque. Dans ce théorème, (4) est la seule hypothèse sur la vitesse de croissance de ϕ.

4 Extension linéaire de $I_\phi([-1,1])$ dans $I_\phi(\mathbb{R})$.

4.1 Définitions et notations.

On considère l'intersection $I_\phi(\mathbb{R}) = \bigcap_{a>0} \{\phi(at), \mathbb{R}\}$ et, s'il n'y a pas ambiguïté, on pose $\|.\|_{\{\phi(at),\mathbb{R}\}} = \|.\|_a$.

On désigne par $R_{[-1,1]}$ *l'application de restriction*, de $I_\phi(\mathbb{R})$ dans $I_\phi([-1,1])$. On dit que l'espace de $I_\phi([-1,1])$ a *la propriété d'extension linéaire* lorsqu'il existe une application linéaire continue U, de $I_\phi([-1,1])$ dans $I_\phi(\mathbb{R})$, telle que $R_{[-1,1]} \circ U = id$. Ici id désigne l'application identité sur $I_\phi([-1,1])$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème 3.6.

4.2 Proposition.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

1) *L'espace* $I_\phi([-1,1])$ *a la propriété d'extension linéaire.*

2) *Il existe une suite de fonctions* $\left(\widetilde{T}_n\right)_{n\geq 0}$, *appartenant à* $I_\phi(\mathbb{R})$, *vérifiant*

• *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\widetilde{T}_{n|[-1,1]} = T_n$,

• *pour tout* $\alpha > 0$, *il existe deux réels* $\beta > 0$ *et* $D_\alpha > 0$ *tels que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on ait*

$$\left\|\widetilde{T}_n\right\|_\alpha \leq D_\alpha \left\|T_n\right\|_\beta .$$

4.3 Théorème.

On suppose que ϕ *vérifie la condition*

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{\phi(u)}{u \ln u} = +\infty. \tag{7}$$

Alors l'espace $I_\phi([-1,1])$ *a la propriété d'extension linéaire.*

Démonstration. D'après la proposition 4.2 de $[Be]$, il existe une fonction ψ convexe sur $\mathbb{R}_+$, croissante, nulle en 0 et vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\left(\exp\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)\right)} < +\infty, \tag{8}$$

pour tout $a > 0$, il existe $C_a > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait

$$\exp(\psi(p)) \leq C_a \exp(\phi(ap)). \tag{9}$$

On pose $C_\psi = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\left(\exp\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)\right)}$. Comme dans le lemme 3.1.1 de $[Be]$, pour tout entier n, il existe une fonction u_n de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, à support dans $\left[-1 - \frac{1}{1+n^2}, 1 + \frac{1}{1+n^2}\right]$, égale à 1 sur $[-1,1]$ vérifiant la condition suivante :

pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \left(2C_\psi\left(1+n^2\right)\right)^p p! \exp(\psi(p)).$$

Alors, en utilisant la formule de Leibniz et l'inégalité (3), pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|(T_n u_n)^{(p)}(x)\right| &= \left|\sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} T_n^{(l)}(x)\, u_n^{(p-l)}(x)\right| \\
&\leq \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} e^2 \frac{n^{2l}}{l!} \left(2C_\psi\left(1+n^2\right)\right)^{p-l} (p-l)! \exp(\psi(p-l)) \\
&\leq p! \exp(\psi(p))\, e^2 \sum_{l=0}^{p} \frac{n^{2l}}{l!^2} \left(2C_\psi\left(1+n^2\right)\right)^{p-l} \\
&\leq p! \exp(\psi(p))\, e^2 \left(2C_\psi\right)^p \left(1+2n^2\right)^p .
\end{aligned}$$

Soit $\alpha > 0$, pour tout $n > 0$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|(T_n u_n)^{(p)}(x)\right| \leq p! \exp(\psi(p))\, e^2 \left(6C_\psi n^2\right)^p .$$

Si $p > 0$, on écrit l'inégalité (6) avec $f = T_n$, $r = 2p$ et la norme $\|T_n\|_{\frac{\alpha}{4}}$. Comme $a_n(T_n) = 1$, on obtient

$$n^{2p} \leq \|T_n\|_{\frac{\alpha}{4}} 2^{2p} (2p)! \exp\left(\phi\left(\frac{\alpha}{2}p\right)\right)$$

et on constate que cette dernière inégalité est vraie si $p = 0$. Il s'ensuit que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{(T_n u_n)^{(p)}(x)}{p! \exp(\phi(\alpha p))} \right| \leq \frac{e^2 (24C_\psi)^p (2p)! \exp\left(\psi(p) + \phi\left(\frac{\alpha}{2}p\right)\right)}{\exp(\phi(\alpha p))} \|T_n\|_{\frac{\alpha}{4}}.$$

Or, avec les notations de (9), on a $\exp(\psi(p)) \leq C_{\frac{\alpha}{4}} \exp\left(\phi\left(\frac{\alpha}{4}p\right)\right)$ et donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{(T_n u_n)^{(p)}(x)}{p! \exp(\phi(\alpha p))} \right| \leq C_{\frac{\alpha}{4}} \frac{e^2 (24C_\psi)^p (2p)! \exp\left(\phi\left(\frac{\alpha}{4}p\right) + \phi\left(\frac{\alpha}{2}p\right)\right)}{\exp(\phi(\alpha p))} \|T_n\|_{\frac{\alpha}{4}}.$$

Notons que la majoration précédente est vraie pour $n = 0$.
Ensuite, comme l'hypothèse (7) implique que la suite $\left(\frac{(24C_\psi)^p (2p)! \exp\left(\phi\left(\frac{\alpha}{4}p\right)+\phi\left(\frac{\alpha}{2}p\right)\right)}{\exp(\phi(\alpha p))}\right)_{p\geq 0}$ est bornée, on en déduit que la famille $\left(\widetilde{T}_n\right)_{n\geq 0} = (T_n u_n)_{n\geq 0}$ satisfait à la condition 2) du théorème 4.2.

4.4 Remarques.

On dit qu'un ensemble compact K de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de Markov lorsqu'il existe deux réels $r \geq 2$ et $\mathcal{M} > 0$ tels que, pour tout polynôme Q et pour tout entier j, on ait $\sup_{x\in K} \left|Q^{(j)}(x)\right| \leq \mathcal{M} (\deg Q)^{rj} \sup_{x\in K} |Q(x)|$. Comme l'intervalle $[-1, 1]$ vérifie cette propriété, le théorème précédent est un cas particulier du théorème 8.8 de $[Be]$.

On a également établi dans $[Be]$ que l'application de restriction $R_{[-1,1]}$ de $I_\phi(\mathbb{R})$ dans $I_\phi([-1, 1])$ est surjective, si et seulement si, la fonction ϕ vérifie la condition suivante :

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\phi(u)}{u \ln(\ln u)} = +\infty.$$

La condition (7) impose une croissance plus forte à la fonction ϕ.

Pour l'intersection des classes de Gevrey non quasi-analytiques, c'est-à-dire lorsque la fonction ϕ est définie par $\phi(t) = t \ln(1 + t)$, l'espace $I_\phi([-1, 1])$ n'a pas la propriété d'extension linéaire. On ne sait pas si la condition (7) est nécessaire pour qu'il possède cette propriété.

5 Jets sur le compact de Goncharov.

L'objet de ce paragraphe est l'obtention de résultats similaires à ceux des paragraphes 3 et 4 pour un compact de $\mathbb{R}$ qui ne vérifie pas nécessairement la propriété de Markov. Il s'agit de versions ultradifférentiables de théorèmes établis, pour la régularité C^∞, par A. Goncharov dans [$Go2$] et [$Go3$].

Comme les compacts qui interviennent dans ce paragraphe ne sont pas réguliers au sens de Whitney, pour définir l'espace $I_\phi(K)$, on a recours à la notion de jets.

5.1 Définitions.

Ici ϕ désigne une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et vérifiant la condition (4).

Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Un *jet* f sur K est la donnée d'une suite $\left(f^{(j)}\right)_{j\geq 0}$ de fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient $p \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ tels que $j \leq p$ et $(\zeta, x) \in K^2$. On définit le *reste de Taylor* $R_\zeta^{j,p} f(x)$ par

$$R_\zeta^{j,p} f(x) = f^{(j)}(x) - \sum_{k=0}^{p-j} \frac{1}{k!} (x-\zeta)^k f^{(j+k)}(\zeta).$$

L'espace $\{\phi(t), K\}$ est formé des jets f sur K vérifiant la condition suivante :

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} \max \left\{ \sup_{x\in K} \frac{\left|f^{(p)}(x)\right|}{p! \exp(\phi(p))}, \sup_{j;j\leq p} \sup_{\substack{(\zeta,x)\in K^2 \\ \zeta\neq x}} \frac{\left|R_\zeta^{j,p} f(x)\right|}{j! \exp(\phi(p+1)) |\zeta - x|^{p+1-j}} \right\} = \|f\|_{\{\phi(t),K\}} < +\infty.$$

On note $I_\phi(K)$ l'espace de Fréchet formé des jets appartenant à $\{\phi(at), K\}$, pour tout $a > 0$ et on pose $\|.\|_{\{\phi(at),K\}} = \|.\|_a$.

5.2 Notations.

On considère deux suites $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ vérifiant les conditions suivantes :

- Les suites $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k - a_k)_{k\geq 1}$ décroissent vers 0.
- $b_1 \leq 1$ et pour tout entier $k \geq 1$, on a $a_k - b_{k+1} > 0$.
- Il existe deux constantes $C_0 \geq 3$ et $M > 0$ telles que, pour tout $k \geq 1$, on ait $2b_k \leq C_0(b_k - a_k)$, $b_k - a_k \leq 2C_0(a_k - b_{k+1})$ et $b_{k+1} - a_{k+1} \geq 2^{1-M}(b_k - a_k)^M$.

Puis on définit le compact de Goncharov

$$K = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k\geq 1} I_k \right)$$

avec, pour tout $k \geq 1$, $I_k = [a_k, b_k]$.

Dans tout ce qui suit, on pose $\delta_k = \frac{b_k - a_k}{2}$, $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et $h_k = a_k - b_{k+1}$ puis on choisit b_0 et δ_0 tels que l'on ait $\delta_0 \leq 1 \leq b_0 \leq C_0\delta_0$, $\delta_0 \leq C_0 h_0$ et $\delta_0^M \leq \delta_1$. Alors, pour tout entier k, on a

$$b_k \leq C_0\delta_k, \delta_k \leq C_0 h_k \text{ et } \delta_{k+1} \geq \delta_k^M.$$

5.3 Une base de Schauder de l'espace $I_\phi(K)$.

Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $T_{n,k}$ le polynôme de Tchebyshev de degré n associé à l'intervalle $[x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$. C'est-à-dire que l'on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_{n,k}(x) = T_n\left(\frac{x - x_k}{\delta_k}\right)$.

L'application qui à un jet f appartenant à $I_\phi(K)$ associe $f^{(0)}$ est injective. De plus les fonctions $f^{(p)}$ sont les dérivées successives de $f^{(0)}$ sur $K \setminus \{0\}$. On identifie alors le jet f à sa première fonction $f^{(0)}$.

Dans tout ce qui suit l désigne une application croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$.

5.3.1 Définition d'une série de Tchebyshev adaptée au compact K.

Cette série est construite en utilisant le principe suivant : on fait des développements de Tchebyshev successifs $v_1(f), ..., v_h(f)$, tels que, sur $I_1 \cup ... \cup I_h$, on ait $f = \sum_{k=1}^h v_k(f)$.

On considère la famille $\left(\overline{T}_{n,k}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ formée des fonctions définies sur K de la façon suivante.

- Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, n < l(k)$,

$$\overline{T}_{n,k} = \chi_{[0,b_k]\cap K} T_{n,k|K}$$

- Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, n \geq l(k)$,

$$\overline{T}_{n,k} = \chi_{I_k} T_{n,k|K}$$

Ici, $T_{n,k|K}$ désigne la restriction de $T_{n,k}$ au compact K et, pour tout sous-ensemble E de K, χ_E désigne la fonction caractéristique de E.

Soit f un jet appartenant à $I_\phi(K)$. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_{n,k}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_k + \delta_k \cos t)\cos(nt)\,dt$$

et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_{0,k}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_k + \delta_k \cos t)\,dt.$$

On prend la convention qu'une somme $\sum_{i=n}^m$ est nulle si $n > m$.

• Pour définir le terme $\upsilon_1(f)$, on pose

$$\upsilon_1(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,1}(f)\,\overline{T}_{n,1}.$$

D'après les résultats vus dans le cas d'un intervalle, sur I_1, on a $f = \upsilon_1(f)$.

• Pour définir le terme $\upsilon_2(f)$, on s'arrange pour obtenir $\upsilon_1(f) + \upsilon_2(f) = f$ sur $I_1 \cup I_2$. Pour cela, on "développe sur I_2" la fonction $f - \upsilon_1(f)$ en remarquant que sur $[0, b_2] \cap K$, on a

$$\upsilon_1(f) = \sum_{n=0}^{l(1)-1} a_{n,1}(f)\,\overline{T}_{n,1};$$

c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $l(1) - 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\eta_{n,2}(f) = a_{n,2}(f - \upsilon_1(f)))$ et on considère

$$\upsilon_2(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{n,2}(f)\,\overline{T}_{n,2}.$$

Sur $I_1 \cup I_2$, on a

$$\upsilon_1(f) + \upsilon_2(f) = f.$$

Comme $l(1)$ est strictement supérieur au degré de la restriction à $[0, b_2] \cap K$ de $\upsilon_1(f)$, $n \geq l(1)$ implique $a_{n,2}(\upsilon_1(f)) = 0$ et donc $\eta_{n,2}(f) = a_{n,2}(f)$.
En outre, si $n < l(1)$, on a

$$\eta_{n,2}(f) = a_{n,2}(f) - \sum_{i=n}^{l(1)-1} a_{n,2}\left(\overline{T}_{i,1}\right) a_{i,1}(f).$$

En effet, si $i \in \{0, ..., n-1\}$, alors, $\deg\left(\overline{T}_{i,1}\right) = i < n$ et donc $a_{n,2}\left(\overline{T}_{i,1}\right) = 0$.
Enfin, sur $[0, b_3] \cap K$, on a

$$\upsilon_2(f) = \sum_{n=0}^{l(2)-1} a_{n,2}(f)\,\overline{T}_{n,2} - \sum_{n=0}^{l(2)-1} a_{n,2}(\upsilon_1(f))\,\overline{T}_{n,2} = \sum_{n=0}^{l(2)-1} a_{n,2}(f)\,\overline{T}_{n,2} - \upsilon_1(f) \quad (10)$$

car le développement de Tchebyshev à l'ordre $l(2) - 1$ d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $l(2) - 1$ est égal à ce polynôme.

• Pour définir le terme $\upsilon_3(f)$, on s'arrange pour obtenir $\upsilon_1(f) + \upsilon_2(f) + \upsilon_3(f) = f$ sur $I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Pour cela, on "développe sur I_3" la fonction $f - \upsilon_2(f) - \upsilon_1(f)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\eta_{n,3}(f) = a_{n,3}(f - \upsilon_2(f) - \upsilon_1(f))$ et on considère

$$\upsilon_3(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{n,3}(f)\,\overline{T}_{n,3}.$$

Comme $l(2)$ est strictement supérieur au degré de la restriction à $[0,b_3]\cap K$ de $\upsilon_2(f)+\upsilon_1(f)$, $n\geq l(2)$ implique $a_{n,3}(\upsilon_2(f)+\upsilon_1(f))=0$ et donc $\eta_{n,3}(f)=a_{n,3}(f)$. En outre, si $n<l(2)$, on a

$$\eta_{n,3}(f)=a_{n,3}(f)-\sum_{i=n}^{l(2)-1}a_{i,2}(f)\,a_{n,3}\left(\overline{T}_{i,2}\right).$$

En effet, d'après (10), sur $[0,b_3]\cap K$, on a $\upsilon_2(f)+\upsilon_1(f)=\sum_{n=0}^{l(2)-1}a_{n,2}(f)\,\overline{T}_{n,2}$ et, si $i\in\{0,...,n-1\}$, alors, $\deg\left(\overline{T}_{i,2}\right)=i<n$ et donc $a_{n,3}\left(\overline{T}_{i,2}\right)=0$.

Par cette méthode, pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on définit le coefficient $\eta_{n,k}(f)$ de la façon suivante :

- si $k=1$, $\eta_{n,k}(f)=a_{n,k}(f)$,
- si $k>1$ et $n\geq l(k-1)$, $\eta_{n,k}(f)=a_{n,k}(f)$,
- si $k>1$ et $n<l(k-1)$, $\eta_{n,k}(f)=a_{n,k}(f)-\sum_{i=n}^{l(k-1)-1}a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right)a_{i,k-1}(f)$.

Alors, pour tout $x\in\,]0,b_1]\cap K$, on a

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\eta_{n,k}(f)\,\overline{T}_{n,k}(x). \tag{11}$$

De plus cette dernière égalité est vraie au sens des jets.

Dans tout ce qui suit l'application l de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ est définie en posant $l(k)=\left[\frac{-\ln(\delta_k)}{\ln(4C_0)}\right]$. Ici $[.]$ désigne la fonction partie entière. Si on suppose que ϕ vérifie la condition

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\phi(u)}{u^2}=+\infty \tag{12}$$

alors la fonction l vérifie les deux propriétés suivantes.

- Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, il existe un plus petit entier k_a tel que, pour tout entier $k\geq k_a$, on ait

$$\phi(al(k-1))+l(k-1)\ln\delta_k>0. \tag{13}$$

- Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$(4C_0)^{l(k)}\leq\delta_k^{-1}\text{ et }l(k)\leq\delta_k^{-1}. \tag{14}$$

5.3.2 Théorème.

On suppose que ϕ vérifie la condition (12). Alors le système $\left\{\left(\overline{T}_{n,k}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*},\left(\eta_{n,k}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\right\}$ est une base de Schauder absolue de l'espace de Fréchet $I_\phi(K)$.

La biorthogonalité du système se démontre exactement comme dans [$Go2$].

Ensuite, il s'agit essentiellement de montrer que, pour tout $a > 0$, il existe deux réels $b > 0$ et $\sigma > 0$ tels que, pour tout $f \in I_\phi(K)$, on ait

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\eta_{n,k}(f)\right|\left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_b \leq \sigma\left\|f\right\|_a. \tag{15}$$

Car l'égalité au sens des jets résulte alors de (11).

Cette démonstration repose sur plusieurs lemmes techniques.

Dans les lemmes 1 et 2, $h_{\phi(\alpha t)}$ désigne la fonction définie au paragraphe 3.1.

Lemme 1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et soient k et n deux entiers tels que $k \geq 1$ et $n \geq l(k)$. Si $n = 0$, on a*

$$\left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_\alpha = \left\|\overline{T}_{0,k}\right\|_\alpha \leq \frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{C_0}\right)}.$$

Si $n > 0$, on a

$$\left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_\alpha \leq \frac{e}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{n^2 C_0}\right)}.$$

Démonstration.

1°) Traitons tout d'abord le cas $n = 0$ et $l(k) = 0$. On a $\overline{T}_{0,k} = \chi_{I_k}$ et donc $\sup_{p\in\mathbb{N}}\sup_{x\in K}\frac{\left|\overline{T}_{0,k}^{(p)}(x)\right|}{p!\exp(\phi(\alpha p))} = 1$.

Soient $\zeta, x \in K$, les seuls restes de Taylor non nuls sont les $R_\zeta^{0,p}\left(\overline{T}_{0,k}\right)(x) = 1$ pour $p \in \mathbb{N}$ avec $x \in I_k$ et $\zeta \notin I_k$ ou $x \notin I_k$ et $\zeta \in I_k$.

Lorsque $x \in I_k$ et $\zeta \geq a_{k-1}$, on a $|\zeta - x| \geq h_{k-1} \geq \frac{\delta_{k-1}}{C_0} \geq \frac{\delta_k}{C_0}$ donc

$$\frac{\left|R_\zeta^{0,p}\left(\overline{T}_{0,k}\right)(x)\right|}{\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta - x|^{p+1}} = \frac{1}{\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta - x|^{p+1}} \leq \frac{1}{\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)\left(\frac{\delta_k}{C_0}\right)^{p+1}}.$$

Les autres cas se traitent de façon similaire.

Ensuite, en minimisant sur p, on obtient $\left\|\overline{T}_{0,k}\right\|_\alpha \leq \frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{C_0}\right)}$.

2°) On suppose que l'entier n est strictement positif.

• Si $x \in I_k$, d'après l'inégalité (2) de 2.3.2, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|T_{n,k}^{(p)}(x)\right| = \left|\overline{T}_{n,k}^{(p)}(x)\right| \leq \frac{n^{2p}\delta_k^{-p}}{p!} \tag{16}$$

donc

$$\sup_{p\in\mathbb{N}}\sup_{x\in K}\frac{\left|\overline{T}_{n,k}^{(p)}(x)\right|}{p!\exp\left(\phi\left(\alpha p\right)\right)} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}}\frac{n^{2p}\delta_k^{-p}}{\left(p!\right)^2\exp\left(\phi\left(\alpha p\right)\right)} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}}\frac{n^{2p}\delta_k^{-p}}{\exp\left(\phi\left(\alpha p\right)\right)} \leq \frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{n^2}\right)}.$$

• Déterminons une majoration de

$$\sup_{p\in\mathbb{N}}\sup_{j;j\leq p}\sup_{\substack{(\zeta,x)\in K^2\\ \zeta\neq x}}\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)\left|\zeta-x\right|^{p+1-j}}.$$

Soit $(j,p)\in\mathbb{N}^2$ avec $j\leq p$.

i) On suppose que $(\zeta,x)\in I_k^2$, alors $R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)=R_\zeta^{j,p}\left(T_{n,k}\right)(x)$ et, d'après la formule de Taylor

$$\left|\frac{R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)}{j!}\right|\leq\frac{\left|\zeta-x\right|^{p+1-j}}{j!\left(p+1-j\right)!}\sup_{t\in I_k}\left|T_{n,k}^{(p+1)}(t)\right|\leq\left|\zeta-x\right|^{p+1-j}\frac{2^{p+1}}{(p+1)!}\sup_{t\in I_k}\left|T_{n,k}^{(p+1)}(t)\right|$$

et la majoration (16), implique

$$\left|\frac{R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)}{j!\left|\zeta-x\right|^{p+1-j}}\right|\leq\frac{2^{p+1}n^{2p+2}\delta_k^{-p-1}}{\left((p+1)!\right)^2}.$$

Donc

$$\sup_{p\in\mathbb{N}}\sup_{j;j\leq p}\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)\left|\zeta-x\right|^{p+1-j}}\leq\frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{2n^2}\right)}.$$

ii) On suppose que $x\in I_k,\zeta\in K\backslash I_k$, alors $R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)=\overline{T}_{n,k}^{(j)}(x)=T_{n,k}^{(j)}(x)$ donc, en utilisant la majoration (16), on a

$$\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|\leq\frac{n^{2j}\delta_k^{-j}}{j!}.$$

Si $\zeta\geq a_{k-1}$, alors $|x-\zeta|\geq h_{k-1}\geq\frac{\delta_{k-1}}{C_0}\geq\frac{\delta_k}{C_0}$ et si $\zeta\leq a_{k+1}$ alors $|x-\zeta|\geq h_k\geq\frac{\delta_k}{C_0}$. Dans les deux cas, on a

$$\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{\left|\zeta-x\right|^{p+1-j}}\leq C_0^{p+1-j}\frac{n^{2j}\delta_k^{-j}}{j!}\delta_k^{j-p-1}$$

puis

$$\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)\left|\zeta-x\right|^{p+1-j}}\leq C_0^{p+1}\frac{n^{2p}\delta_k^{-p-1}}{\left(j!\right)^2\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)}$$

et donc

$$\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)\left|\zeta-x\right|^{p+1-j}}\leq\frac{1}{n^2}\frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{n^2C_0}\right)}.$$

iii) On suppose que $\zeta\in I_k,x\in K\backslash I_k$, alors, on a

$$R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)=-\sum_{m=0}^{p-j}\frac{1}{m!}\left(x-\zeta\right)^m\overline{T}_{n,k}^{(j+m)}(\zeta)$$

donc

$$\left|R_{\zeta}^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right| \leq \sum_{m=0}^{p-j} \frac{1}{m!}|x-\zeta|^{m}\left|\overline{T}_{n,k}^{(j+m)}(\zeta)\right|.$$

D'après la majoration (16),

$$\left|\overline{T}_{n,k}^{(j+m)}(\zeta)\right| \leq \delta_{k}^{-(j+m)} \frac{n^{2(j+m)}}{(j+m)!}$$

puis, comme on a encore $|x-\zeta| \geq \frac{\delta_k}{C_0}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\left|R_{\zeta}^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{|\zeta-x|^{p+1-j}} &\leq \sum_{m=0}^{p-j} \frac{1}{m!} C_{0}^{p+1-j-m} \delta_{k}^{j-p-1+m} \frac{n^{2(j+m)}}{(j+m)!} \delta_{k}^{-(j+m)} \\
&\leq \delta_{k}^{-(p+1)} C_{0}^{p+1} \sum_{m=0}^{p-j} \frac{n^{2(j+m)}}{m!\,(j+m)!} \\
&\leq e \delta_{k}^{-(p+1)} C_{0}^{p+1} n^{2p}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\frac{\left|R_{\zeta}^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta-x|^{p+1-j}} \leq \frac{e}{n^{2}} \frac{n^{2(p+1)} \delta_{k}^{-p-1} C_{0}^{p+1}}{\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)}$$

et donc

$$\frac{\left|R_{\zeta}^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta-x|^{p+1-j}} \leq \frac{e}{n^{2}} \frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{n^{2} C_0}\right)}.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 1.

Lemme 2. *Soient k et n deux entiers tels que $k \geq 1$ et $n < l(k)$. Pour tout réel $\alpha > 0$, on a*

$$\left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_{\alpha} \leq \frac{(4C_0)^{n}}{2} \frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{4C_0}\right)}$$

Démonstration. Le cas $n=0$ se traite comme le 1°) de la démonstration de lemme 1. Dans ce qui suit, on suppose que $n>0$.

• Déterminons tout d'abord une majoration de $\sup_{p\in\mathbb{N}} \sup_{x\in K} \frac{\left|\overline{T}_{n,k}^{(p)}(x)\right|}{p!\exp(\phi(\alpha p))}$.
Les n racines du polynôme $T_{n,k}(x)$ appartiennent à l'intervalle I_k, on peut donc écrire

$$T_{n,k}(x) = 2^{n-1} \delta_{k}^{-n} \prod_{j=1}^{n}(x-t_{j}),$$

avec, pour tout j, $t_j \in I_k$. Il s'ensuit que $T_{n,k}^{(p)}(x)$ est une somme de $\frac{n!}{(n-p)!}$ termes de la forme

$$2^{n-1}\delta_k^{-n}\left(x-t_{j_1}\right)...\left(x-t_{j_{n-p}}\right).$$

Si $x \in [0,b_k] \cap K$ alors $|x-t_j| \leq C_0\delta_k$ et, pour tout $p \in \{0,...,n\}$, on a

$$\frac{\left|\overline{T}_{n,k}^{(p)}(x)\right|}{p!} = \frac{\left|T_{n,k}^{(p)}(x)\right|}{p!} \leq 2^{n-1}\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\delta_k^{-n}\left(C_0\delta_k\right)^{n-p} \leq \frac{(4C_0)^n}{2}\delta_k^{-p}. \tag{17}$$

et donc

$$\sup_{p\in\mathbb{N}}\sup_{x\in K}\frac{\left|\overline{T}_{n,k}^{(p)}(x)\right|}{p!\exp\left(\phi\left(\alpha p\right)\right)} \leq \frac{(4C_0)^n}{2}\frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\delta_k\right)}.$$

• Déterminons une majoration de

$$\sup_{p\in\mathbb{N}}\sup_{j;j\leq p}\sup_{\substack{(\zeta,x)\in K^2\\ \zeta\neq x}}\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta-x|^{p+1-j}}.$$

Soit $(j,p) \in \mathbb{N}^2$, avec $j \leq p$.

i) On suppose que $\zeta, x \in [0,b_k] \cap K$, alors, $R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x) = R_\zeta^{j,p}\left(T_{n,k}\right)(x)$ s'estime en utilisant la formule de Taylor et (17), on obtient

$$\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta-x|^{p+1-j}} \leq 2^{p+1}\frac{(4C_0)^n}{2}\delta_k^{-(p+1)}\frac{1}{\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)}$$

donc

$$\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta-x|^{p+1-j}} \leq \frac{(4C_0)^n}{2}\frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{2}\right)}.$$

ii) On suppose que $\zeta \geq a_{k-1}$ et que $x \geq a_{k-1}$, alors $R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x) = 0$.

iii) On suppose que $\zeta \geq a_{k-1}$ et que $x \leq b_k$, alors, d'après la majoration (17), on a

$$\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right| = \left|\overline{T}_{n,k}^{(j)}(x)\right| \leq j!\frac{(4C_0)^n}{2}\delta_k^{-j}.$$

Ensuite, en utilisant encore l'inégalité $|\zeta-x| \geq \frac{\delta_k}{C_0}$, on obtient

$$\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\,|\zeta-x|^{p+1-j}} \leq \frac{(4C_0)^n}{2}\delta_k^{-j}C_0^{p+1-j}\delta_k^{j-p-1} \leq \frac{(4C_0)^n}{2}C_0^{p+1}\delta_k^{-(p+1)}$$

puis

$$\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta-x|^{p+1-j}} \leq \frac{(4C_0)^n}{2}\frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{C_0}\right)}.$$

iv) On suppose que $\zeta \leq b_k$ et que $x \geq a_{k-1}$, alors

$$R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x) = -\sum_{m=0}^{p-j} \frac{1}{m!}(x-\zeta)^m \overline{T}_{n,k}^{j+m}(\zeta).$$

En utilisant encore (17), on a

$$\begin{aligned}
\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{|\zeta - x|^{p+1-j}} &\leq \sum_{m=0}^{p-j} \frac{1}{m!}|x-\zeta|^{m-(p+1-j)} \frac{(4C_0)^n}{2}(j+m)!\delta_k^{-(j+m)} \\
&\leq \frac{(4C_0)^n}{2} \sum_{m=0}^{p-j} \frac{(j+m)!}{m!} C_0^{(p+1-j-m)} \delta_k^{j+m-p-1} \delta_k^{-(j+m)} \\
&\leq \frac{(4C_0)^n}{2} \delta_k^{-(p+1)} C_0^{p+1} \sum_{m=0}^{p-j} \frac{(j+m)!}{m!}.
\end{aligned}$$

Or $\frac{(j+m)!}{m!} \leq 2^{j+m} j!$ et donc

$$\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta - x|^{p+1-j}} \leq \frac{(4C_0)^n}{2} \delta_k^{-(p+1)} C_0^{p+1} 2^{2p-j} \frac{1}{\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)}$$

ce qui implique

$$\frac{\left|R_\zeta^{j,p}\left(\overline{T}_{n,k}\right)(x)\right|}{j!\exp\left(\phi\left(\alpha\left(p+1\right)\right)\right)|\zeta - x|^{p+1-j}} \leq \frac{(4C_0)^n}{2} \frac{1}{h_{\phi(\alpha t)}\left(\frac{\delta_k}{4C_0}\right)}$$

et termine la démonstration du lemme 2.

Lemme 3. *Soit f une fonction appartennant à $I_\phi(K)$ et soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soient k et n deux entiers strictement positifs. On note $r_{a,k}$ le plus petit entier t tel que*

$$\phi(at) + t\ln\delta_k > 0. \tag{18}$$

Pour tout entier $r \geq 1$, on a

$$|a_{n,k}(f)| \leq \frac{1}{n^r}\|f\|_a 2^r r!\exp\left(\phi(ar)\right). \tag{19}$$

De plus, si $r \geq r_{a,k}$ ou si $r \leq n$, on a

$$|a_{n,k}(f)| \leq \frac{1}{n^r}\|f\|_a r!\delta_k^r 2^r \exp\left(\phi(ar)\right). \tag{20}$$

Démonstration. Soit r un entier strictement positif. Comme dans la démonstration du lemme 3.3, on a

$$|a_{n,k}(f)| = \frac{1}{\pi n^r}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(x_k+\delta_k\cos\right)\right)^{(r)}(t)\,\tau(nt)\,dt\right|$$

où τ désigne la fonction cos ou la fonction sin suivant la parité de r. Avec la formule de Faà di Bruno et les notations de 3.3, on a

$$\frac{\left(f\left(x_k+\delta_k\cos\right)\right)^{(r)}(t)}{r!} = \sum_{i=1}^{r}\frac{f^{(i)}\left(x_k+\delta_k\cos(t)\right)}{i!}\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{\left(\delta_k\cos\right)^{(s)}(t)}{s!}\right)^{j_s} \tag{21}$$

et donc

$$|a_{n,k}(f)| \leq \frac{2^r r!}{n^r}\|f\|_a \sup_{0\leq i\leq r}\delta_k^i\exp\left(\phi(ai)\right).$$

De là, on déduit que pour tout entier $r\geq 1$, on a la majoration (19).
D'autre part, la suite $\left(\delta_k^i\exp\left(\phi(ai)\right)\right)_{i\geq 0}$ est décroissante puis croissante. Donc, pour tout $r\geq r_{a,k}$, on a $\sup_{0\leq i\leq r}\delta_k^i\exp\left(\phi(ai)\right)\leq\delta_k^r\exp\left(\phi(ar)\right)$, ce qui démontre l'inégalité (20), lorsque $r\geq r_{a,k}$.

On suppose que $1\leq r\leq n$. Pour tout $i\in\{1,...,r\}$, on note $T_{x_k}^{r-1-i}\left(f^{(i)}\right)$ le polynôme de Taylor de $f^{(i)}$ d'ordre $r-1-i$ basé en x_k avec la convention que $T_{x_k}^{-1}\left(f^{(r)}\right)=0$ et $R_{x_k}^{r,r-1}f=f^{(r)}$. On a

$$f^{(i)}\left(x_k+\delta_k\cos(t)\right) = T_{x_k}^{r-1-i}\left(f^{(i)}\right)\left(x_k+\delta_k\cos(t)\right)+R_{x_k}^{i,r-1}f\left(x_k+\delta_k\cos t\right)$$

et, comme

$$T_{x_k}^{r-1-i}\left(f^{(i)}\right)\left(x_k+\delta_k\cos(t)\right)\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{\left(\delta_k\cos\right)^{(s)}(t)}{s!}\right)^{j_s}$$

est un polynôme en $\cos(t)$ et $\sin(t)$ dont le degré ne dépasse pas $r-1$; lorsqu'on le multiplie $\tau(nt)$, il est d'intégrale nulle sur $[-\pi,\pi]$. En utilisant (21), on a donc

$$|a_{n,k}(f)| \leq r!\frac{1}{\pi n^r}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=1}^{r}\left|\frac{R_{x_k}^{i,r-1}f\left(x_k+\delta_k\cos t\right)}{i!}\sum_{J\in J_{i,r}}C_{J,i,r}\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{\left(\delta_k\cos\right)^{(s)}(t)}{s!}\right)^{j_s}\right|dt$$

et par suite

$$|a_{n,k}(f)| \leq \|f\|_a\, r!\frac{2}{n^r}\sum_{i=1}^{r}\exp\left(\phi(ar)\right)\delta_k^r\binom{r-1}{i-1} = \|f\|_a\, r!\frac{1}{n^r}\delta_k^r 2^r\exp\left(\phi(ar)\right),$$

ce qui démontre (20), lorsque $r\leq n$.

Dans les lemmes 4 et 5, on utilise des notations généralisant celles du paragraphe 3.1 : si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et si $a\in\mathbb{R}_+^*$, on note $h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant, pour tout $\rho>0$,

$$h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}(\rho)=\inf_{k\in\mathbb{N}}\left(\rho^k(\lambda p+\mu)^{\lambda p+\mu}\exp(\phi(a(\lambda p+\mu)))\right). \tag{22}$$

Lemme 4. *Soit f une fonction appartennant à $I_\phi(K)$ et soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Si k et n sont deux entiers tels que $k\geq 1, n\geq 1$ et $n\geq l(k-1)$, alors, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, on a*

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right|=\left|a_{n,k}(f)\right|\leq C_a'\left(\frac{2\delta_k}{n}\right)^{\mu}h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(\tfrac{2\delta_k}{n}\right)^{\lambda}\right)\|f\|_a. \tag{23}$$

où C_a' est une constante qui ne dépend que de a.
De plus, si $k=1$, alors la majoration (23) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Démonstration. D'après (13) et (18), $k\geq k_a$ implique $l(k-1)\geq r_{a,k}$. Donc, si $k\geq k_a$ alors, d'après (20), pour tout $r\geq 1$, on a

$$\left|a_{n,k}(f)\right|\leq\frac{1}{n^r}\|f\|_a r!\delta_k^r 2^r\exp(\phi(ar)).$$

Si $k<k_a$ et si $1\leq r<r_{a,k}$, d'après (19), on a

$$\left|a_{n,k}(f)\right|\leq\delta_{k_a}^{-r_{a,k_a}}\|f\|_a\frac{1}{n^r}r!\delta_k^r 2^r\exp(\phi(ar)).$$

Ainsi, en posant $C_a'=\delta_{k_a}^{-r_{a,k_a}}$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $r\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right|=\left|a_{n,k}(f)\right|\leq C_a'\|f\|_a\frac{1}{n^r}r!\delta_k^r 2^r\exp(\phi(ar)). \tag{24}$$

En prenant $r=\lambda p+\mu$ et en minimisant sur p, on obtient (23), ce qui termine la démonstration du lemme 4.

Lemme 5. *Soit f une fonction appartennant à $I_\phi(K)$ et soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Si k et n sont deux entiers tels que $k\geq 2$ et $n<l(k-1)$, alors, pour tout couple d'entiers $(\lambda,\mu)\in\mathbb{N}^{*2}$, on a*

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right|\leq 2C_a'(2C_0)^{\mu}\delta_k^{\frac{\mu-1}{M}}h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(2C_0\delta_k^{\frac{1}{M}}\right)^{\lambda}\right)\|f\|_a. \tag{25}$$

où C_a' est la même constante que celle de lemme 4.
De plus, compte tenu du lemme 4, la majoration (25) reste valide si $l(k-1)\leq n<l(k)$.

Démonstration. Pour prouver ce lemme, on établit tout d'abord trois majorations.

Première majoration. *Si les entiers n, k et r vérifient $k \geq 2$ et $1 \leq r \leq n < l(k-1)$, on a*

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right| \leq 2\|f\|_a \exp(\phi(ar)) \left[\delta_k^r + \delta_{k-1}^{r-1}\left(\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}\right)^n\right].$$

Preuve. On suppose que $n > 0$ (sinon, on remplace le facteur $\frac{1}{\pi}$ par $\frac{1}{2\pi}$). On a

$$\eta_{n,k}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x_k + \delta_k \cos t)\cos(nt) - f(x_{k-1} + \delta_{k-1}\cos t)\sum_{i=n}^{l(k-1)-1} a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right)\cos(it)\right]dt.$$

Notons Λ le terme entre les crochets. On fait deux développements de Taylor à l'ordre $r-1$. Pour $f(x_k + \delta_k \cos t)$, le développement est basé en x_k et, pour $f(x_{k-1} + \delta_{k-1}\cos t)$, le développement est basé en x_{k-1}. On obtient

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}f^{(j)}(x_k)(\delta_k \cos t)^j \cos(nt) \\
&\quad -\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}f^{(j)}(x_{k-1})(\delta_{k-1}\cos t)^j \sum_{i=n}^{l(k-1)-1} a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right)\cos(it) \\
&\quad + R_{x_k}^{0,r-1} f(x_k + \delta_k \cos t)\cos(nt) \\
&\quad - R_{x_{k-1}}^{0,r-1} f(x_{k-1} + \delta_{k-1}\cos t)\sum_{i=n}^{l(k-1)-1} a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right)\cos(it).
\end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité, on obtient

$$\begin{aligned}
\eta_{n,k}(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[R_{x_k}^{0,r-1} f(x_k + \delta_k \cos t)\cos(nt)\right]dt \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\sum_{i=n}^{l(k-1)-1} a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right)\int_{-\pi}^{\pi} R_{x_{k-1}}^{0,r-1} f(x_{k-1} + \delta_{k-1}\cos t)\cos(it)\,dt.
\end{aligned}$$

Enfin, les restes de Taylor se majorent en utilisant la norme $\|f\|_a$, on obtient

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right| \leq 2\|f\|_a \delta_k^r \exp(\phi(ar)) + 2\|f\|_a \delta_{k-1}^r \exp(\phi(ar))\sum_{i=n}^{l(k-1)-1}\left|a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right)\right|.$$

Par ailleurs, d'après [G2001] p. 182 ou [G2000] p. 53, si $k \geq 2$ et si $n < l(k-1)$, on a

$$\sum_{i=n}^{l(k-1)-1}\left|a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right)\right| \leq \left(\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}\right)^n \delta_{k-1}^{-1}. \tag{26}$$

ce qui prouve la première majoration.

Seconde majoration. *Si les entiers n, k et r vérifient $2 \leq k$ et $0 \leq n < r < l(k-1)$, on a*

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right| \leq 2\|f\|_a \exp(\phi(ar)) \left[\delta_k^r + C_0^r \delta_{k-1}^{r-1} \left(\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}\right)^n\right].$$

Preuve. Remarquons que si P est un polynôme de degré strictement plus petit que $l(k-1)$, on a

$$P = \sum_{i=0}^{l(k-1)-1} a_{i,k-1}(P) T_{i,k-1}$$

et donc

$$a_{n,k}(P) = \sum_{i=0}^{l(k-1)-1} a_{i,k-1}(P) a_{n,k}\left(T_{i,k-1}\right) = \sum_{i=n}^{l(k-1)-1} a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right) a_{i,k-1}(P).$$

Ainsi, lorsque $n < l(k-1)$, on a

$$\eta_{n,k}(P) = a_{n,k}(P) - \sum_{i=n}^{l(k-1)-1} a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right) a_{i,k-1}(P) = 0.$$

On suppose que $n > 0$ (sinon, on remplace le facteur $\frac{1}{\pi}$ par $\frac{1}{2\pi}$). On utilise un développement de Taylor de f à l'ordre $r-1$ basé en x_k. Si $T_{x_k}^{r-1} f$ désigne sa partie polynomiale, on obtient

$$\begin{aligned}
\eta_{n,k}(f) &= \eta_{n,k}\left(T_{x_k}^{r-1} f + R_{x_k}^{0,r-1} f\right) = \eta_{n,k}\left(R_{x_k}^{0,r-1} f\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_{x_k}^{0,r-1} f(x_k + \delta_k \cos t) \cos(nt) \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_{x_k}^{0,r-1} f(x_{k-1} + \delta_{k-1} \cos t) \sum_{i=n}^{l(k-1)-1} a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right) \cos(it)\, dt
\end{aligned}$$

donc

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right| \leq 2\delta_k^r \|f\|_a \exp(\phi(ar)) + 2(b_{k-1} - x_k)^r \|f\|_a \exp(\phi(ar)) \left|\sum_{i=n}^{l(k-1)-1} a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right)\right|$$

puis, en utilisant (26),

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right| \leq 2\|f\|_a \exp(\phi(ar)) \left(\delta_k^r + (b_{k-1} - x_k)^r \left(\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}\right)^n \delta_{k-1}^{-1}\right)$$

ce qui donne le résultat puisque $b_{k-1} \leq C_0 \delta_{k-1}$.

Troisième majoration. *Si les entiers n, k, r vérifient $2 \leq k$ et $1 \leq n < l(k-1) \leq r$, on a*

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right| \leq C'_a \frac{1}{n^r} \|f\|_a 2^r r! \exp(\phi(ar)) \left[\delta_k^r + \delta_{k-1}^{r-1} \left(\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}\right)^n\right].$$

Preuve. Comme dans la démonstration du lemme 4, on pose $C'_a = \delta_{k_a}^{-r_{a,k_a}}$. Alors, en utilisant encore le lemme 3, on a

$$|a_{n,k}(f)| \leq C'_a \|f\|_a \frac{1}{n^r} r! \delta_k^r 2^r \exp(\phi(ar))$$

et, si $i \in \{n, ..., l(k-1)-1\}$,

$$\left|a_{i,k-1}(f)\right| \leq \delta_{k_a-1}^{-r_{a,k_a}} \|f\|_a \frac{1}{i^r} r! \delta_{k-1}^r 2^r \exp(\phi(ar)) \leq C'_a \|f\|_a \frac{1}{n^r} r! \delta_{k-1}^r 2^r \exp(\phi(ar)).$$

Donc

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right| \leq C'_a \frac{1}{n^r} \|f\|_a 2^r r! \exp(\phi(ar)) \left[\delta_k^r + \delta_{k-1}^r \sum_{i=n}^{l(k-1)-1} \left|a_{n,k}\left(\overline{T}_{i,k-1}\right)\right|\right]$$

et, en utilisant encore (26), on obtient

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right| \leq C'_a \frac{1}{n^r} \|f\|_a 2^r r! \exp(\phi(ar)) \left[\delta_k^r + \delta_{k-1}^r \left(\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}\right)^n \delta_{k-1}^{-1}\right].$$

Démonstration du lemme 5. D'après les trois majorations précédentes, pour tout entier $r \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\eta_{n,k}(f)\right| &\leq C'_a \|f\|_a 2^r r! \exp(\phi(ar)) C_0^r \left[\delta_k^r + \delta_{k-1}^{r-1} \left(\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}\right)^n\right] \\
&\leq C'_a \|f\|_a 2^r r! \exp(\phi(ar)) C_0^r \left[\delta_k^r + \delta_{k-1}^{r-1}\right] \\
&\leq C'_a \|f\|_a 2^r r! \exp(\phi(ar)) C_0^r \left[\delta_k^r + \delta_k^{\frac{r-1}{M}}\right] \\
&\leq 2C'_a \|f\|_a 2^r r! \exp(\phi(ar)) C_0^r \left[\delta_k^{\frac{r-1}{M}}\right]. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Si p est un entier quelconque, avec $r = \lambda p + \mu$, on peut écrire

$$\left|\eta_{n,k}(f)\right| \leq 2C'_a \|f\|_a (2C_0)^\mu \delta_k^{\frac{\mu-1}{M}} \left(2C_0 \delta_k^{\frac{1}{M}}\right)^{\lambda p} (\lambda p + \mu)! \exp(\phi(a(\lambda p + \mu))).$$

En minimisant sur p et en utilisant la notation (22), on obtient l'inégalité (25).

Lemme 6. *Soient λ et μ deux entiers avec $\lambda \geq \max(M,2)$ et soit a un réel strictement positif. Il existe une constante $\sigma_{a,\lambda,\mu} > 0$ telle que, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^{*2}$, on ait*

$$h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(\frac{2\delta_k}{n}\right)^{\lambda}\right) \leq \sigma_{a,\lambda,\mu} h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_k}{n^2 C_0}\right)$$

et

$$h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(2C_0\delta_k^{\frac{1}{M}}\right)^{\lambda}\right) \leq \sigma_{a,\lambda,\mu} h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_k}{4C_0}\right).$$

Démonstration.
i) Pour tout entier p, on a

$$\left(\frac{2\delta_k}{n}\right)^{\lambda p}(\lambda p+\mu)^{\lambda p+\mu}\exp\left(\phi\left(a\left(\lambda p+\mu\right)\right)\right) \leq \left(\frac{\delta_k}{n^2 C_0}\right)^p \frac{\left(C_0 2^{\lambda}\right)^p(\lambda p+\mu)^{\lambda p+\mu}}{\exp(\phi(a(\lambda p+\mu)))}\exp\left(\phi\left(2a\left(\lambda p+\mu\right)\right)\right)$$

or $\lambda p+\mu \leq \max(\mu,(\lambda+\mu)p)$ et donc $\phi(2a(\lambda p+\mu)) \leq \phi(2\mu a)+\phi(2a(\lambda+\mu)p)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2\delta_k}{n}\right)^{\lambda p}(\lambda p+\mu)^{\lambda p+\mu}\exp\left(\phi\left(a\left(\lambda p+\mu\right)\right)\right)\\
\leq\ &\left(\frac{\delta_k}{n^2 C_0}\right)^p \frac{\left(C_0 2^{\lambda}\right)^p(\lambda p+\mu)^{\lambda p+\mu}\exp\left(\phi\left(2\mu a\right)\right)}{\exp\left(\phi\left(a\left(\lambda p+\mu\right)\right)\right)}\exp\left(\phi\left(2a\left(\lambda+\mu\right)p\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, d'après la condition (12), $\sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{\left(C_0 2^{\lambda}\right)^p(\lambda p+\mu)^{\lambda p+\mu}\exp(\phi(2\mu a))}{\exp(\phi(a(\lambda p+\mu)))} = \sigma_{a,\lambda,\mu,1} < +\infty$, ce qui implique

$$h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(\frac{2\delta_k}{n}\right)^{\lambda}\right) \leq \sigma_{a,\lambda,\mu,1} h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_k}{n^2 C_0^2}\right).$$

ii) Pour tout entier p, on a également

$$\begin{aligned}
&\left(2C_0\delta_k^{\frac{1}{M}}\right)^{\lambda p}(\lambda p+\mu)^{\lambda p+\mu}\exp\left(\phi\left(a\left(\lambda p+\mu\right)\right)\right)\\
\leq\ &\frac{\left(4C_0\right)^{(\lambda+1)p}(\lambda p+\mu)^{\lambda p+\mu}\exp\left(\phi\left(2\mu a\right)\right)}{\exp\left(\phi\left(a\left(\lambda p+\mu\right)\right)\right)}\left(\frac{\delta_k}{4C_0}\right)^p\exp\left(\phi\left(2a\left(\lambda+\mu\right)p\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, d'après la condition (12), $\sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{\left(4C_0\right)^{(\lambda+1)p}(\lambda p+\mu)^{\lambda p+\mu}\exp(\phi(2\mu a))}{\exp(\phi(a(\lambda p+\mu)))} = \sigma_{a,\lambda,\mu,2} < +\infty$, ce qui implique

$$h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(2C_0\delta_k^{\frac{1}{M}}\right)^{\lambda}\right) \leq \sigma_{a,\lambda,\mu,2} h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_k^2}{4C_0^2}\right).$$

Démonstration du théorème 5.3.2. On choisit un couple d'entiers (λ, μ) vérifiant $\lambda \geq \max(M, 2)$ et $\mu \geq 3M + 2$. Soit $a > 0$ et soit f un jet appartenant à $I_\phi(K)$.

On considère la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |\eta_{n,k}(f)| \left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_{2a(\lambda+\mu)}.$$

Posons $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\eta_{n,1}(f)| \left\|\overline{T}_{n,1}\right\|_{2a(\lambda+\mu)} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n,1}(f)| \left\|\overline{T}_{n,1}\right\|_{2a(\lambda+\mu)}$. D'après les lemmes 1 et 2 utilisés avec $\alpha = 2a(\lambda+\mu)$ et la remarque complétant l'énoncé du lemme 4, on a

$$\begin{aligned} S_1 \leq & \frac{1}{h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_1}{4C_0}\right)} \|f\|_a \\ & + \sum_{n=1}^{l(1)-1} \frac{(4C_0)^n}{2h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_1}{4C_0}\right)} 2C'_a \left(\frac{2\delta_1}{n}\right)^\mu h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(\frac{2\delta_1}{n}\right)^\lambda\right) \|f\|_a \\ & + \sum_{n \geq \max(l(1),1)} \frac{e}{h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_1}{n^2 C_0}\right)} C'_a \left(\frac{2\delta_1}{n}\right)^\mu h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(\frac{2\delta_1}{n}\right)^\lambda\right) \|f\|_a . \end{aligned}$$

Donc, en utilisant le lemme 6, on a

$$S_1 \leq \sigma_1(a) \|f\|_a ,$$

en posant

$$\begin{aligned} \sigma_1(a) = & \sum_{n=1}^{l(1)-1} \frac{(4C_0)^{l(1)-1}}{h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_1}{4C_0}\right)} C'_a (2\delta_1)^\mu h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left((2\delta_1)^\lambda\right) \\ & + \frac{1}{h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_1}{4C_0}\right)} + \sum_{n \geq \max(l(1),1)} e C'_a \left(\frac{2\delta_1}{n}\right)^\mu \sigma_{a,\lambda,\mu}. \end{aligned}$$

Ensuite, on sépare la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |\eta_{n,k}(f)| \left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_{2a(\lambda+\mu)}$ en deux suivant que $n \geq l(k)$ ou que $n < l(k)$. Dans la somme pour $n \geq l(k)$, on met éventuellement à part les termes correspondant à $n = 0$. Si on note K_0 le plus grand entier k tel que $l(k) = 0$, il s'agit de la somme $S_2 = \sum_{k=2}^{K_0} |\eta_{0,k}(f)| \left\|\overline{T}_{0,k}\right\|_{2a(\lambda+\mu)} = \sum_{k=2}^{K_0} |a_{0,k}(f)| \left\|\overline{T}_{0,k}\right\|_{2a(\lambda+\mu)} \leq \sigma_2(a) \|f\|_a$, en posant

$$\sigma_2(a) = \|f\|_a \sum_{k=2}^{K_0} \left\|\overline{T}_{0,k}\right\|_{2a(\lambda+\mu)} .$$

Ainsi, quitte à mettre à part la somme S_2, dans la somme pour $n \geq l(k)$ on peut supposer que $n > 0$. On utilise les lemmes précédents et on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\eta_{n,k}(f)\right|\left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_{2a(\lambda+\mu)} \\
\leq\ &\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=l(k)}^{+\infty}\frac{e}{h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_k}{n^2C_0}\right)}C'_a\left(\frac{2\delta_k}{n}\right)^{\mu}h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(\frac{2\delta_k}{n}\right)^{\lambda}\right)\|f\|_a \\
&+\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=0}^{l(k)-1}\frac{(4C_0)^n}{h_{\phi(2a(\lambda+\mu)t)}\left(\frac{\delta_k}{4C_0}\right)}C'_a\|f\|_a(2C_0)^{\mu}\delta_k^{\frac{\mu-1}{M}}h_{\phi(a(\lambda t+\mu))+(\lambda t+\mu)\ln(\lambda t+\mu)}\left(\left(2C_0\delta_k^{\frac{1}{M}}\right)^{\lambda}\right) \\
\leq\ &C'_a\sigma_{a,\lambda,\mu}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=l(k)}^{+\infty}e\left(\frac{2\delta_k}{n}\right)^{\mu}+\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=0}^{l(k)-1}(4C_0)^n(2C_0)^{\mu}\delta_k^{\frac{\mu-1}{M}}\right)\|f\|_a
\end{aligned}$$

et, en utilisant la propriété (14),

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\eta_{n,k}(f)\right|\left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_{2a(\lambda+\mu)} \leq \sigma_3(a)\|f\|_a$$

en posant

$$\sigma_3(a) = C'_a\sigma_{a,\lambda,\mu}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=l(k)}^{+\infty}e\left(\frac{2\delta_k}{n}\right)^{\mu}+\sum_{k=1}^{+\infty}\delta_k^{-2}(2C_0)^{\mu}\delta_k^{\frac{\mu-1}{M}}\right).$$

La relation (15) est donc établie, ce qui termine la démonstration du théorème 5.3.2.

5.4 Extension linéaire des jets appartenant à $I_\phi(K)$.

Pour l'espace $I_\phi(K)$, comme pour $I_\phi([-1,1])$ au paragraphe 4.1, on définit la propriété d'extension linéaire.

5.4.1 Théorème.

On suppose que la fonction ϕ vérifie la condition

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\phi(u)}{u^2} = +\infty.$$

Alors, l'espace $I_\phi(K)$ a la propriété d'extension linéaire.

5.4.2 Lemme.

Il existe une famille de fonctions $\left(\widetilde{T}_{n,k}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ *appartenant à* $I_\phi(\mathbb{R})$ *vérifiant les conditions suivantes.*
1) Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$*, on a* $\widetilde{T}_{n,k|K}=\overline{T}_{n,k}$.
2) Pour tout réel $\alpha>0$*, il existe deux réels* $\beta>0$ *et* $D_\alpha>0$ *tels que, pour tout* $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$*, on ait*

$$\left\|\widetilde{T}_{n,k}\right\|_\alpha\leq D_\alpha\left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_\beta.$$

Démonstration. Soit ψ une fonction vérifiant les conditions (8) et (9) de la démonstration du théorème 4.3. On note encore $C_\psi=1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\left(\exp\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)\right)}$. Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on pose $\tau_{n,k}=\frac{\delta_k}{C_0^2(1+n^2)}$. Il existe une famille $(\omega_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, positives, vérifiant les conditions suivantes.
• Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $n<l(k)$, $\omega_{n,k}$ est une fonction à support dans $[-\tau_{n,k},b_k+\tau_{n,k}]$ égale à 1 sur l'intervalle $[0,b_k]$.
• Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $n\geq l(k)$, $\omega_{n,k}$ est une fonction à support dans $[a_k-\tau_{n,k},b_k+\tau_{n,k}]$ égale à 1 sur l'intervalle $[a_k,b_k]$.
• Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\omega_{n,k}^{(p)}(x)\right|\leq(2C_\psi)^p\tau_{n,k}^{-p}p!\exp(\psi(p)).$$

i) Si n et k sont deux entiers tels que $k\geq1$ et $n\geq l(k)$, pour tout $x\in[a_k-\tau_{n,k},b_k+\tau_{n,k}]$, on a $T_{n,k}(x)=T_n\left(\frac{x-x_k}{\delta_k}\right)$ et, d'après la proposition 2.3.4, pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\left|T_{n,k}^{(p)}(x)\right|\leq e^2\frac{n^{2p}}{p!}\delta_k^{-p}.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on obtient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(T_{n,k}\omega_{n,k})^{(p)}(x)\right|\leq p!\exp(\psi(p))e^2\left(2C_\psi C_0^2\right)^p\delta_k^{-p}\left(1+2n^2\right)^p$$

et, si $n>0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(T_{n,k}\omega_{n,k})^{(p)}(x)\right|\leq p!\exp(\psi(p))e^2\left(2C_\psi C_0^2\right)^p\delta_k^{-p}\left(3n^2\right)^p.$$

Soit $\beta\in\mathbb{R}_+^*$, on écrit la majoration (24) avec $r=2p$ et la norme $\|T_{n,k}\|_\beta$. Comme $\left|\eta_{n,k}\left(\overline{T}_{n,k}\right)\right|=1$, quitte à augmenter la constante C'_β lorsque $p=0$, on obtient $\delta_k^{-p}n^{2p}\leq C'_\beta\delta_k^p\|T_{n,k}\|_\beta 2^{2p}(2p)!\exp(\phi(2\beta p))$ et donc, pour tout $n>0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(T_{n,k}\omega_{n,k})^{(p)}(x)\right|\leq C'_\beta p!\exp(\psi(p))e^2\left(24C_\psi C_0^2\right)^p(2p)!\exp(\phi(2\beta p))\|T_{n,k}\|_\beta.$$

Si l'ensemble des entiers k tels que $l(k) = 0$ est non vide, on note encore K_0 son plus grand élément et on pose $L = \delta_{K_0}^{-1}$; sinon, on pose $L = 1$. Alors, pour tout entier $n \geq l(k)$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\left(T_{n,k}\omega_{n,k}\right)^{(p)}(x)\right| \leq C'_\beta p! \exp(\psi(p)) e^2 \left(24C_\psi L C_0^2\right)^p (2p)! \exp(\phi(2\beta p)) \|T_{n,k}\|_\beta . \tag{28}$$

ii) Si k et n sont deux entiers tels que $k \geq 1$ et $1 \leq n < l(k)$, comme dans la démonstration du lemme 2 du paragraphe 5.3.2, on a

$$T_{n,k}(x) = 2^{n-1}\delta_k^{-n} \prod_{j=1}^{n} (x - t_j),$$

et si $x \in [-\tau_{n,k}, b_k + \tau_{n,k}]$, alors $|x - t_j| \leq (C_0 + 1)\delta_k$ et on a

$$\left|\frac{T_{n,k}^{(i)}(x)}{i!}\right| \leq 2^{n-1}\frac{n!}{i!(n-i)!}\delta_k^{-n}\left((C_0+1)\delta_k\right)^{n-i} \leq \delta_k^{-i}\frac{4^n}{2}(1+C_0)^n .$$

Avec la formule de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\left(T_{n,k}\omega_{n,k}\right)^{(p)}(x)\right| &\leq \left|\sum_{l=0}^{p}\binom{p}{l}T_{n,k}^{(l)}(x)\,\omega_{n,k}^{(p-l)}(x)\right| \\
&\leq \sum_{l=0}^{p}\binom{p}{l}\delta_k^{-l}\frac{4^n(1+C_0)^n}{2}\left(2C_\psi C_0^2\delta_k\right)^{p-l}\left(1+n^2\right)^{p-l}(p-l)!\exp(\psi(p-l)) \\
&\leq 4^n(1+C_0)^n\left(2C_\psi C_0^2\right)^p p!\exp(\psi(p))\,\delta_k^{-p}\sum_{l=0}^{p}\left(1+n^2\right)^{p-l} \\
&\leq 4^n(1+C_0)^n\left(2C_\psi C_0^2\right)^p p!\exp(\psi(p))\,\delta_k^{-p}\left(2+n^2\right)^p .
\end{aligned}$$

Or, en utilisant (14), on a

$$4^n(1+C_0)^n \leq 4^{l(k)-1}(1+C_0)^{l(k)-1} \leq (8C_0)^{l(k)} \leq (4C_0)^{2l(k)} \leq \delta_k^{-2}$$

et

$$\left(2+n^2\right)^p \leq \left(2+l(k)^2\right)^p \leq \left(2+\delta_k^{-2}\right)^p \leq 3^p\delta_k^{-2p}.$$

Donc

$$\left|\left(T_{n,k}\omega_{n,k}\right)^{(p)}(x)\right| \leq \left(6C_\psi C_0^2\right)^p p!\exp(\psi(p))\,\delta_k^{-3p-2}.$$

Notons que si $n = 0$, la majoration précédente est vraie car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(T_{0,k}\omega_{0,k}\right)^{(p)}(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\omega_{0,k}^{(p)}(x)\right| \leq \delta_k^{-p}\left(2C_\psi C_0^2\right)^p p!\exp(\psi(p)) .$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on écrit la majoration (27) avec $r = (3p+2)[M+2]$ et la norme $\|T_{n,k}\|_\beta$. Comme $\left|\eta_{n,k}\left(\overline{T}_{n,k}\right)\right| = 1$ et $\delta_k^{-3p-2} \leq \delta_k^{-\frac{r-1}{M}}$, on obtient

$$\delta_k^{-3p-2} \leq 2C'_\beta \left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_\beta (2C_0)^{(3p+2)[M+2]} ((3p+2)[M+2])! \exp(\phi(\beta(3p+2)[M+2])).$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\left(T_{n,k}\omega_{n,k}\right)^{(p)}(x)\right| &\leq 2C'_\beta \left\|\overline{T}_{n,k}\right\|_\beta (2C_0)^{(3p+2)[M+2]} ((3p+2)[M+2])! \left(6C_\psi C_0^2\right)^p \\ &\quad \exp(\phi(\beta(3p+2)[M+2]))\, p! \exp(\psi(p)). \qquad (29)\end{aligned}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\beta = \frac{\alpha}{10([M]+3)}$. Il existe une constante C_β telle que l'on ait $\exp(\psi(p)) \leq C_\beta \exp(\phi(\beta p))$. Alors, comme la condition (12) implique,

$$\sup_{p\geq 0}\left(\frac{\exp(\phi(\beta p))\,(24C_\psi L C_0^2)^p\,(2p)!\exp(\phi(2\beta p))}{\exp(\phi(\alpha p))}\right) < +\infty$$

et

$$\sup_{p\geq 0}\left(\frac{(2C_0)^{(3p+2)[M+2]}((3p+2)[M+2])!\exp(\phi(\beta(3p+2)[M+2]))\left(6C_\psi C_0^2\right)^p \exp(\phi(\beta p))}{\exp(\phi(\alpha p))}\right) < +\infty,$$

le lemme résulte des inégalités (28) et (29).

Enfin, le théorème d'extension linéaire 5.4.1 en découle immédiatement.

5.4.3 Exemple.

Si on considère le cas $\delta_k = 2^{-3^k}$ et $b_k = 6\delta_k$, alors, le compact K ne vérifie pas la propriété de Markov (voir [$Go2$]). Le théorème précédent montre que l'hypothèse de Markov n'est pas nécessaire pour qu'il y ait extension linéaire. En revanche, on sait que c'est une condition suffisante (voir le théorème 8.8 de [Be]).

Dans le cas particulier où $\phi(u) = u^a$, avec $a > 2$, $I_\phi(K)$ est un espace de Beurling (voir [BMT]).

6 Compacts "ventrus" pour lesquels il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension.

Dans ce paragraphe, si f est une fonction de classe C^∞ en $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$f^{(p_1,p_2)}(x) = \frac{\partial^{p_1+p_2} f(x)}{\partial^{p_1} x_1 \partial^{p_2} x_2}.$$

On suppose que $\lim_{u\to+\infty}\frac{\phi(u)}{u\ln(\ln u)}=+\infty$ et on considère une fonction g appartenant à $I_\phi([0,1])$, ayant toutes ses dérivées nulles en 0 et strictement positive sur $]0,1]$. On peut construire une telle fonction en utilisant encore la proposition 4.2 et le lemme 3.1.1 de $[Be]$.

On pose $K_g=\left\{(x,y)\in[0,1]^2, 0\le y\le g(x)\right\}$; K_g est un compact de $\mathbb{R}^2$ régulier au sens de Whitney. On note $I_\phi(K_g)$ l'ensemble des fonctions f, de classe C^∞ sur K_g, telles que, pour tout $a>0$, on ait

$$\sup_{(p_1,p_2)\in\mathbb{N}^2}\ \sup_{(x_1,x_2)\in K_g}\frac{\left|f^{(p_1,p_2)}(x)\right|}{(p_1+p_2)!\exp\left(\phi\left(a\left(p_1+p_2\right)\right)\right)}=\|f\|_a<+\infty.$$

On définit de même l'espace $I_\phi(\mathbb{R}^2)$. Ce sont des espaces de Fréchet.

D'après le théorème 4.1. de $[Be]$, on sait que l'application de restriction, de $I_\phi(\mathbb{R}^2)$ dans $I_\phi(K_g)$ est surjective.

Le théorème qui suit est inspiré par un travail de M. Tidten $[Ti]$; il complète une situation étudiée par U. Franken dans $[Fr]$.

Théorème. *Il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension, de $I_\phi(K_g)$ dans $I_\phi(\mathbb{R}^2)$.*

On rappelle que, pour tout $a>0$ et tout $r>0$, on note

$$h_{\phi(at)}(r)=\inf_{k\in\mathbb{N}}r^k\exp\left(\phi\left(ak\right)\right)$$

et on remarque que, pour tout $r>0$, $h_{\phi(at)}(r)=r^{k_0}\exp\left(\phi\left(ak_0\right)\right)$ où k_0 est le plus petit entier k tel que $\phi\left(a\left(k+1\right)\right)-\phi\left(ak\right)+\ln r\ge 0$. En particulier, si

$$\phi\left(a\left(k_0\right)\right)-\phi\left(a\left(k_0-1\right)\right)<-\ln r\le\phi\left(a\left(k_0+1\right)\right)-\phi\left(ak_0\right),$$

on a

$$h_{\phi(at)}(r)=r^{k_0}\exp\left(\phi\left(ak_0\right)\right).$$

Lemme 1. *Pour tout $r>0$, il existe $\varphi_r\in I_\phi(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :* $\operatorname{supp}(\varphi_r)\subset[-r,r]$, $\varphi_r(0)=1$ *et, pour tout $a>0$, il existe une constante $D\ge 0$ telle que, pour tout $j\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[-r,r]$, on ait*

$$\left|\varphi_r^{(j)}(x)\right|\le D\frac{1}{h_{\phi(at)}(r)}j!\exp\left(\phi\left(2aj\right)\right).$$

Démonstration. Soit ψ une fonction vérifiant les conditions (8) et (9) de la démonstration du théorème 4.3. Pour tout $r>0$, il existe une fonction $\varphi_r\in C^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $[-r,r]$, telle que $\varphi_r(0)=1$ et, pour tout $j\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[-r,r]$, on ait

$$\left|\varphi_r^{(j)}(x)\right|\le\left(\frac{2C_\psi}{r}\right)^j j!\exp\left(\psi\left(j\right)\right)$$

avec encore $C_\psi = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\left(\exp\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)\right)}$. Quitte à remplacer $\psi(t)$ par $\psi(t) + t\ln(2C_\psi)$ et à augmenter la constante C_a de l'inégalité (9), on peut supposer que

$$\left|\varphi_r^{(j)}(x)\right| \leq \left(\frac{1}{r}\right)^j j! \exp(\psi(j)).$$

Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-r, r]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_r^{(j)}(x)\right| &\leq C_a \left(\frac{1}{r}\right)^j j! \exp(\phi(aj)) \\
&\leq C_a \frac{1}{r^j \exp(\phi(aj))} j! \exp(\phi(2aj)) \\
&\leq C_a \frac{1}{h_{\phi(at)}(r)} j! \exp(\phi(2aj)).
\end{aligned}$$

Dans toute la suite du paragraphe, si γ est un réel strictement positif, on note $\|g\|_\gamma = \sup_{p\in\mathbb{N}} \sup_{x\in[0,1]} \frac{\left|g^{(p)}(x)\right|}{p!\exp(\phi(\gamma p))}$. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la formule de Taylor.

Lemme 2. *Pour tout $\gamma > 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a*

$$|g(x)| \leq h_{\phi(\gamma t)}(x) \|g\|_\gamma.$$

Démonstration du théorème.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$, on note $f_{r,n}$ l'application de K_g dans $\mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \varphi_r(x) \frac{y^n}{n!}$. Soit $b > 0$, on a

$$\|f_{r,n}\|_b = \sup_{\substack{(x,y)\in K_g \\ |x|\leq r \\ 0\leq k_1 \text{ et } 0\leq k_2\leq n}} \left(\left|\varphi_r^{(k_1)}(x)\right| \frac{\left|y^{n-k_2}\right|}{(n-k_2)!}\right) \frac{1}{(k_1+k_2)!\exp(\phi(b(k_1+k_2)))}.$$

Donc, en notant D la constante donnée par le lemme 1 lorsque $a = \frac{b}{2}$, pour tout $\gamma > 0$, on a

$$\|f_{r,n}\|_b \leq \sup_{0\leq k_1 \text{ et } 0\leq k_2\leq n} \left(\frac{Dk_1!\exp(\phi(bk_1))\left(h_{\phi(\gamma t)}(r)\|g\|_\gamma\right)^{n-k_2}}{h_{\phi\left(\frac{b}{2}t\right)}(r)(n-k_2)!(k_1+k_2)!\exp(\phi(b(k_1+k_2)))}\right).$$

Or $\frac{k_1!}{(n-k_2)!(k_1+k_2)!} \leq \frac{2^n}{n!}$ et $\frac{1}{\exp(\phi(b(k_1+k_2)))} \leq \frac{1}{\exp(\phi(bk_1))}\frac{1}{\exp(\phi(bk_2))}$ donc

$$\|f_{r,n}\|_b \leq D\frac{2^n}{h_{\phi\left(\frac{b}{2}t\right)}(r)\,n!} \max_{0\leq k_2\leq n} \frac{\left(\|g\|_\gamma h_{\phi(\gamma t)}(r)\right)^{n-k_2}}{\exp(\phi(bk_2))}. \tag{30}$$

Supposons qu'il existe une application linéaire continue U, de $I_\phi(K_g)$ dans $I_\phi(\mathbb{R}^2)$ telle que, si on note R_{K_g} l'application de restriction $I_\phi(\mathbb{R}^2)$ dans $I_\phi(K_g)$, on ait $R_{K_g} \circ U = id_{I_\phi}(K_g)$. Alors U vérifie la condition suivante :

pour tout $a > 0$, il existe deux réels $b > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout f appartenant à $I_\phi(K_g)$, on ait

$$\|U(f)\|_a \leq C \|f\|_b . \tag{31}$$

On note b_1 et C_1 les constantes de l'inégalité (31) associées à $a = 1$.
Soit $a_2 \in \left]0, \frac{b_1}{4}\right[$, on note b_2 et C_2 les constantes de l'inégalité (31) associées à $a = a_2$.

Pour tout $r > 0$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on pose $g_{r,n}(y) = U(f_{r,n})(0, y)$. On a

$$\begin{aligned} \left|g_{r,n}^{(n)}(y) - 1\right| &\leq \frac{y^n}{n!} \|U(f_{r,n})\|_{\{\phi(a_2 t), \mathbb{R}^2\}} (2n)! \exp(\phi(2a_2 n)) \\ &\leq \frac{y^n}{n!} C_2 \|f_{r,n}\|_{b_2} (2n)! \exp(\phi(2a_2 n)) . \end{aligned}$$

Soit $\tau_n = \left(\frac{1}{2} \frac{n!}{(2n)! \exp(\phi(2a_2 n)) C_2 \|f_{r,n}\|_{b_2}}\right)^{\frac{1}{n}}$, alors, pour tout $y \in [0, \tau_n]$, on a

$$\left|g_{r,n}^{(n)}(y) - 1\right| \leq \frac{1}{2}.$$

et donc

$$g_{r,n}^{(n)}(y) \geq \frac{1}{2},$$

puis, par intégration,

$$g_{r,n}(y) \geq \frac{1}{2} \frac{y^n}{n!}.$$

En particulier, avec $y = \tau_n$, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_n^n}{n!} \leq g_{r,n}(\tau_n) \leq C_1 \|f_{r,n}\|_{b_1}$$

donc

$$\frac{n!}{4(2n)! n! \exp(\phi(2a_2 n)) C_2 \|f_{r,n}\|_{b_2}} \leq C_1 \|f_{r,n}\|_{b_1}$$

soit

$$\frac{1}{4(2n)! \exp(\phi(2a_2 n))} \leq C_1 C_2 \|f_{r,n}\|_{b_1} \|f_{r,n}\|_{b_2} . \tag{32}$$

On choisit $\gamma < \max\left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}\right)$ et on note D_1 (resp. D_2) la constante donnée par le lemme 1 lorsque $a = \frac{b_1}{2}$ (resp. $a = \frac{b_2}{2}$). Alors, d'après l'inégalité (30), on a

$$\|f_{r,n}\|_{b_1} \leq D_1 2^n \frac{1}{h_{\phi\left(\frac{b_1}{2} t\right)}(r)} \frac{1}{n!} \max_{0 \leq k_2 \leq n} \frac{\left(h_{\phi(\gamma t)}(r) \|g\|_\gamma\right)^{n-k_2}}{\exp(\phi(b_1 k_2))}.$$

Soit $(r_{2n'})_{n'\geq 0}$ une suite décroissante de réels strictement positifs, de limite nulle, telle que, pour tout $n' \in \mathbb{N}$, on ait

$$\phi\left(b_1\left(n'\right)\right) - \phi\left(b_1\left(n'-1\right)\right) < -\ln\left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\|g\|_\gamma\right) \leq \phi\left(b_1\left(n'+1\right)\right) - \phi\left(b_1 n'\right).$$

On a donc

$$\min_{0\leq k_2\leq 2n'}\left(\left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\|g\|_\gamma\right)^{k_2}\exp\left(\phi\left(b_1 k_2\right)\right)\right) = \left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\|g\|_\gamma\right)^{n'}\exp\left(\phi\left(b_1 n'\right)\right)$$

soit

$$\max_{0\leq k_2\leq 2n'}\frac{\left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\|g\|_\gamma\right)^{2n'-k_2}}{\exp\left(\phi\left(b_1 k_2\right)\right)} = \frac{\left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\|g\|_\gamma\right)^{n'}}{\exp\left(\phi\left(b_1 n'\right)\right)}.$$

Pour tout $n' \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\|f_{r,2n'}\|_{b_1} \leq D_1 2^{2n'}\frac{1}{(2n')!}\frac{\left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\right)^{n'-1}\|g\|_\gamma^{n'}}{\exp\left(\phi\left(b_1 n'\right)\right)}.$$

D'autre part, si n' est assez grand,

$$\max_{0\leq k_2\leq 2n'}\frac{\left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\|g\|_\gamma\right)^{2n'-k_2}}{\exp\left(\phi\left(b_2 k_2\right)\right)} \leq 1.$$

D'après (30), on a donc

$$\|f_{r,2n'}\|_{b_2} \leq D_2 2^{2n'}\frac{1}{(2n')!}\frac{1}{h_{\phi\left(\frac{b_2}{2}t\right)}\left(r_{2n'}\right)}.$$

Ainsi, en utilisant (32),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{1}{(4n')!\exp\left(\phi\left(4a_2 n'\right)\right)}\\
\leq\ & C_1 C_2 D_1 2^{2n'}\frac{1}{(2n')!}\frac{\left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\right)^{n'-1}\|g\|_\gamma^{n'}}{\exp\left(\phi\left(b_1 n'\right)\right)} D_2 2^{2n'}\frac{1}{(2n')!}\frac{1}{h_{\phi\left(\frac{b_2}{2}t\right)}\left(r_{2n'}\right)}
\end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{4}\frac{(2n')!\,(2n')!}{(4n')!\exp\left(\phi\left(4a_2 n'\right)\right)} \leq C_1 C_2 D_1 D_2 2^{4n'}\frac{\left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\right)^{n'-2}\|g\|_\gamma^{n'}}{\exp\left(\phi\left(b_1 n'\right)\right)}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2^{(4n'+2)}\exp\left(\phi\left(4a_2 n'\right)\right)} \leq C_1 C_2 D_1 D_2 2^{4n'}\frac{\left(h_{\phi(\gamma t)}\left(r_{2n'}\right)\right)^{n'-2}\|g\|_\gamma^{n'}}{\exp\left(\phi\left(b_1 n'\right)\right)}.$$

Ce qui est impossible, lorsque n' tend vers $+\infty$ (puisque $a_2 \in \left]0, \frac{b_1}{4}\right[$). Donc il n'existe pas d'opérateur linéaire continu d'extension, de $I_\phi(K_g)$ dans $I_\phi(\mathbb{R}^2)$.
Remarque. La démonstration de ce théorème s'inspire de celle de la proposition du paragraphe 7.1 de $[Be]$ concernant le cas d'un compact de $\mathbb{R}$ réduit à point. Ici les fonctions $g_{r,n}$ jouent le même rôle que les fonctions χ_p de $[Be]$.

Remerciements.

Je tiens à remercier Monsieur Jacques Chaumat pour son aide précieuse.

7 Bibliographie.

$[Be]$ P. Beaugendre, Extensions de jets dans des intersections de classes non quasi-analytiques. Ann. Polon. Math. 76 (2001) , 213-243.
$[BMT]$ R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis, Res. in Math. 17 (1990), 206-237.
$[DL]$ R. De Vore, G. Lorentz, Constructive approximation. Springer-Verlag, (1993).
$[Fr]$ U. Franken, Examples of compact sets with non-empty interior which do not admit a continuous linear extension operator for ultradifferentiable functions of Beurling type. Arch. Math. 62 (1994), 239-247.
$[Go1]$ A. Goncharov, A compact set without Markov's property but with an extension operator for C^∞-functions, Studia Math. 119 (1996), 27-35.
$[Go2]$ A. Goncharov, Spaces of Whitney functions with basis, Math. Nachr. 220 (2000), 47-57.
$[Go3]$ A. Goncharov, On the explicit form of an extension operator for C^∞-functions, East Journal on Approximations, 7, 2 (2001), 179-193.
$[Mi]$ B. S. Mityagin, Approximate dimension and bases in nuclear spaces, Russian Math. Surveys, 16 (1961), 59-127.
$[Riv]$ T. J. Rivlin, Chebyshev polynomials, 2nd edn. Wiley and sons, New York (1990).
$[Ro]$ S. Roman, The formula of Faà di Bruno. Amer. Math. Monthly 87 (1980), 805-809.
$[Ti]$ M. Tidten, Fortsetzungen von C^∞-Funktionen, welche auf einer abgeschlossenen Menge in $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Manuscripta Math. 27 (1979), 291-312.

N° d'impression 2541
4ième trimestre 2003