

**C\*-GROUPOÏDES QUANTIQUES ET INCLUSIONS DE FACTEURS :  
STRUCTURE SYMÉTRIQUE ET AUTODUALITÉ,  
ACTION SUR LE FACTEUR HYPERFINI DE TYPE  $II_1$**

MARIE-CLAUDE DAVID

RÉSUMÉ : Etant données une inclusion  $N_0 \subset N_1$  de facteurs de type  $II_1$  de profondeur 2 et d'indice fini et  $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 \dots$  la tour de Jones correspondante, D. Nikshych et L. Vainerman ont muni les commutants relatifs  $N'_0 \cap N_2$  et  $N'_1 \cap N_3$  de structures de C\*-groupeïde quantique duales.

Je modifie ici la dualité et j'obtiens ainsi une construction symétrique qui n'exige pas une nouvelle définition des involutions. Alors les algèbres de Temperley-Lieb sont des C\*-groupeïdes quantiques autoduaux ; plus généralement on peut associer à une inclusion de profondeur finie et d'indice fini un C\*-groupeïde quantique autodual.

Je montre que tout C\*- groupeïde quantique connexe de dimension finie agit extérieurement sur le facteur hyperfini de type  $II_1$ .

ABSTRACT : Let  $N_0 \subset N_1$  a depth 2, finite index inclusion of type  $II_1$  factors and  $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 \dots$  the corresponding Jones tower. D. Nikshych et L. Vainerman built dual structures of quantum C\*-groupoid on the relative commutants  $N'_0 \cap N_2$  et  $N'_1 \cap N_3$ .

Here I define a new duality which allows a symmetric construction without changing the involution. So the Temperley-Lieb algebras are selfdual quantum C\*-groupoids and the quantum C\*-groupoids associated to a finite depth finite index inclusion can be chosen selfdual.

I show that every finite-dimensional connexe quantum C\*-groupoid acts outerly on the type  $II_1$  hyperfinite factor.

CODE MATIÈRE AMS : 46L37, 16W30, 57T05, 22D35.

MOTS CLEFS : Subfactors, quantum groupoids, Temperley-Lieb algebras, crossed product, action.

## 1. INTRODUCTION

Soient une inclusion  $N_0 \subset N_1$  de facteurs de type  $II_1$  de profondeur 2 et d'indice fini  $f_1$   $f_2$  et  $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 \dots$  la tour obtenue par construction de base. Si l'inclusion est irréductible, les commutants relatifs  $A = N'_0 \cap N_2$  et  $B = N'_1 \cap N_3$  peuvent être munis de structures d'algèbres de Kac de dimension finie duales ([Da], [L], [Szy]). Généralisant les méthodes de W. Szymananski aux inclusions réductibles, D. Nikshych et L. Vainerman définissent dans [NV 1] une dualité entre les commutants relatifs  $A$  et  $B$  à l'aide de la trace  $tr$  de  $N_1$  :

$$\langle a, b \rangle = [N_1 : N_0]^2 tr(af_2f_1Hb) \quad (a \in A, b \in B)$$

(L'élément qui rend compte du fait que l'inclusion n'est pas irréductible est l'indice  $H$  de la restriction à  $N'_1 \cap N_2$  de la trace  $tr$ .) A l'aide de cette dualité, ils définissent des structures de  $C^*$ -groupoïde quantique duales sur  $A$  et  $B$ . Les coproduits sont définis par dualité, aussi pour qu'ils soient compatibles avec l'involution, ils ont dû définir de nouvelles involutions sur  $A$  et  $B$  différentes de celles héritées du facteur  $N_4$ . L'étude de ces structures à l'aide de formules généralisant celles obtenues dans [Da] pour une inclusion irréductible fait apparaître un autre inconvénient : Si on note  $B(N_1 \subset N_2)$  la structure définie sur  $B$ , la structure duale sur  $A$  n'est pas isomorphe, mais anti-isomorphe à  $B(N_0 \subset N_1)$ .

Je propose ici une autre dualité qui permet une construction symétrique conservant l'involution :

$$\langle a, b \rangle = [N_1 : N_0]^2 tr(aH^{1/2}f_2f_1H^{1/2}b) \quad (a \in A, b \in B)$$

Avec cette nouvelle définition, si on note  $B(N_1 \subset N_2)$  la structure définie sur  $B$ , la structure duale sur  $A$  est  $B(N_0 \subset N_1)$ . Les propriétés des structures de  $C^*$ -groupoïde quantique construites à partir de cette dualité pourraient s'obtenir à partir des résultats de D. Nikshych et L. Vainerman. Certaines démonstrations sont d'ailleurs fortement inspirées des leurs. Pourtant, comme je dispose maintenant de formules pour les coproduits et les antipodes, je donne souvent des démonstrations directes.

L'intérêt de cette construction symétrique apparaît dans la partie 4. Dans le cas d'une inclusion de profondeur finie, on peut alors obtenir des  $C^*$ -groupoïdes quantiques autoduaux.

Dans la partie 5, je précise la structure de  $C^*$ -groupoïde quantique des algèbres de Temperley-Lieb. Grâce à la symétrie de la construction, ces  $C^*$ -groupoïdes quantiques sont autoduaux. J'étudie en particulier le  $C^*$ -groupoïde quantique de dimension 13 associé au graphe linéaire  $A_4$  et montre qu'il est isomorphe à celui décrit par G. Böhm et K. Szlachanyi dans [BSz - 5].

Dans la partie 6, j'étends aux  $C^*$ -groupoïdes quantiques connexes de dimension finie un résultat de D. Nikshych [N] sur les algèbres de Kac faibles en les faisant agir extérieurement sur le facteur hyperfini de type  $II_1$ .

L'essentiel de ce texte a été écrit au printemps 2001, la partie 6 l'a complété au printemps 2003. Léonid Vainerman et Jean-Michel Vallin ont été à l'origine de cet travail, je les en remercie vivement et plus particulièrement Léonid pour de nombreux échanges par courrier électronique à propos de la construction originale du  $C^*$ -groupoïde quantique. Mes remerciements vont aussi à Kornel Szlachányi pour ses réponses précises. Les calculs concernant le groupoïde quantique de dimension 13 ont été grandement facilités par les conseils Maple de Jacques Peyrière, je lui en suis reconnaissante.

## 2. C\*-GROUPOÏDES QUANTIQUES

On rappelle ici les définitions de C\*-groupeïde quantique fini et de C\*-groupeïde quantique fini dual ([BNSz][N][NV 2] [NV 3]) ainsi que celles d'une action et du produit croisé.

## 2.1. C\*-groupeïde quantique.

**Définition.** Un **C\*-groupeïde quantique fini** est une C\*-algèbre  $G$  de dimension finie (on note  $m$  la multiplication,  $1$  l'unité,  $*$  l'involution) munie d'une structure de co-algèbre associative avec un coproduit  $\Delta$ , une co-unité  $\varepsilon$  et une antipode  $S$  tels que  
i)  $\Delta$  soit un \*-homomorphisme d'algèbres de  $G$  dans  $G \otimes G$  vérifiant :

$$(\Delta \otimes \text{id})\Delta(1) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)$$

ii) La co-unité soit une application linéaire de  $G$  dans  $G$  vérifiant :

$$\varepsilon(fgh) = \varepsilon(fg_{(1)})\varepsilon(g_{(2)}h) \quad ((f, g, h) \in G^3)$$

(propriété est équivalente à

$$\varepsilon(fgh) = \varepsilon(fg_{(2)})\varepsilon(g_{(1)}h) \quad ((f, g, h) \in G^3))$$

iii) L'antipode  $S$  soit un anti-homomorphisme d'algèbre et de co-algèbre de  $G$  dans  $G$  vérifiant pour tout  $g$  de  $G$  :

$$m(\text{id} \otimes S)\Delta(g) = (\varepsilon \otimes \text{id})(\Delta(1)(g \otimes 1))$$

(propriété équivalente à

$$m(S \otimes \text{id})\Delta(g) = (\text{id} \otimes \varepsilon)((1 \otimes g)\Delta(1))$$

On appelle **co-unité but** et **co-unité source** les applications  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_s$  définies pour tout  $g$  de  $G$  par :

$$\varepsilon_t(g) = (\varepsilon \otimes \text{id})(\Delta(1)(g \otimes 1)) \quad \varepsilon_s(g) = (\text{id} \otimes \varepsilon)((1 \otimes g)\Delta(1))$$

## 2.2. C\*-groupeïde quantique dual.

**Définition.** On définit sur  $\hat{G} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(G, \mathbb{C})$  une structure de C\*-groupeïde quantique dual de celle de  $G$  grâce aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \langle h, \phi\psi \rangle &= \langle \Delta(h), \phi \otimes \psi \rangle \\ \langle h \otimes g, \hat{\Delta}(\phi) \rangle &= \langle hg, \phi \rangle \\ \langle h, \hat{S}(\phi) \rangle &= \langle S(h), \phi \rangle \\ \langle h, \phi^* \rangle &= \overline{\langle S(h)^*, \phi \rangle} \end{aligned}$$

pour tous  $\phi$  et  $\psi$  de  $\hat{G}$  et tous  $h$  et  $g$  de  $G$ .

L'unité de  $\hat{G}$  est  $\varepsilon$  et la counité  $\hat{\varepsilon}$  est  $\phi \mapsto \langle 1, \phi \rangle$ .

**2.3. Projection de Haar, mesure de Haar.** D'après [BNSz 4.5] et [NV 1-7.3.1], il existe une unique projection  $p$  de  $G$  invariante par l'antipode, appelée **projection de Haar normalisée** telle que pour tout  $g$  de  $G$ , on ait les propriétés équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \varepsilon_t(g)p &= gp & \varepsilon_t(p) &= 1 \\ \text{(ii)} \quad p\varepsilon_s(g) &= pg & \varepsilon_s(p) &= 1 \end{aligned}$$

La forme linéaire duale  $\hat{\phi}$  de la projection de Haar normalisée est appelée **mesure de Haar normalisée de  $\hat{G}$** . Elle est fidèle, invariante par l'antipode et vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (\text{id} \otimes \hat{\phi})\hat{\Delta} = (\hat{\varepsilon}_t \otimes \hat{\phi})\hat{\Delta} & \hat{\phi} \circ \hat{\varepsilon}_t &= \hat{\varepsilon} \\ \text{(ii)} \quad & (\hat{\phi} \otimes \text{id})\hat{\Delta} = (\hat{\phi} \otimes \hat{\varepsilon}_s)\hat{\Delta} & \hat{\phi} \circ \hat{\varepsilon}_s &= \hat{\varepsilon} \end{aligned}$$

#### 2.4. Les sous-algèbres de Cartan. [NV3 - 2.2][BNSz - 2.5 et 2.9]

L'algèbre  $G_s = \varepsilon_s(G)$  (resp.  $G_t = \varepsilon_t(G)$ ) est appelée sous-algèbre de Cartan source (resp. sous-algèbre de Cartan but).

Les co-unités but et source sont des homomorphismes idempotents de  $G_t$  (resp.  $G_s$ ) et vérifient pour tout  $g$  de  $G$  :

$$(\text{id} \otimes \varepsilon_t)\Delta(g) = 1_{(1)}g \otimes 1_{(2)} \quad (\varepsilon_s \otimes \text{id})\Delta(g) = 1_{(1)} \otimes g1_{(2)}$$

On a aussi les formules suivantes :

$$\varepsilon_t \circ S = \varepsilon_t \circ \varepsilon_s = S \circ \varepsilon_s \quad \varepsilon_s \circ S = \varepsilon_s \circ \varepsilon_t = S \circ \varepsilon_t$$

Les sous-algèbres de Cartan commutent entre elles et vérifient :

$$\begin{aligned} G_t &= \{g \in G, \Delta(g) = 1_{(1)}g \otimes 1_{(2)} = g1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\} = \{(\omega \otimes \text{id})\Delta(1), \omega \in \hat{G}\} \\ G_s &= \{g \in G, \Delta(g) = 1_{(1)} \otimes g1_{(2)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}g\} = \{(\text{id} \otimes \omega)\Delta(1), \omega \in \hat{G}\} \end{aligned}$$

#### 2.5. Action d'un groupoïde quantique. [NSzW - def.1.2.2] [N - 2.2]

2.5.1. Soit  $M$  une algèbre involutive unitaire. On dit qu'un groupoïde quantique  $G$  fini agit à gauche (resp. à droite) sur  $M$  s'il existe une application linéaire  $g \otimes m \mapsto g \triangleright m$  de  $G \otimes M$  dans  $M$  (resp.  $m \otimes g \mapsto m \triangleleft g$  de  $M \otimes G$  dans  $M$ ) définissant une structure de  $G$ -module à gauche (resp. à droite) sur  $M$  et vérifiant pour  $g$  dans  $G$  et  $x$  et  $y$  dans  $M$

$$\begin{aligned} (1) \quad & g \triangleright (xy) = (g_{(1)} \triangleright x)(g_{(2)} \triangleright y) \quad (\text{resp. } (xy) \triangleleft g = (x \triangleleft g_{(1)})(y \triangleleft g_{(2)})) \\ (2) \quad & (g \triangleright x)^* = S(g)^* \triangleright x^* \quad (\text{resp. } (g \triangleleft x)^* = x^* \triangleleft S(g)^*) \\ (3) \quad & g \triangleright 1 = \varepsilon_t(g) \triangleright 1 \quad (\text{resp. } 1 \triangleleft g = 1 \triangleleft \varepsilon_s(g)) \end{aligned}$$

Si  $M$  est une  $C^*$ -algèbre ou une algèbre de von Neumann, l'application  $g \otimes m \mapsto g \triangleright m$  (resp.  $m \otimes g \mapsto m \triangleleft g$ ) doit être continue en norme ou faiblement pour tout  $g$  de  $G$ .

D'après [NSzW - def 1.2.4], une action à gauche est dite **standard** si l'application  $x \otimes 1_M \mapsto x \triangleright 1_M$  est un isomorphisme de  $A_t$  sur une sous-algèbre de  $M$ .

Une action à gauche est standard si et seulement si elle vérifie :

$$g \triangleright 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_t(g) = 0$$

2.5.2. Rappelons les définitions des actions duales des groupoïdes l'un sur l'autre (voir [NSzW] ou [N]). Posons  $A = G$  et  $B = \hat{G}$ . Le groupoïde  $A$  agit à droite sur  $B$  :

$$b \triangleleft a = \langle a, b_{(1)} \rangle b_{(2)} \quad (a \in A, b \in B)$$

Le groupoïde  $B$  agit à gauche sur  $A$  :

$$b \triangleright a = \langle a_{(2)}, b \rangle a_{(1)} \quad (a \in A, b \in B)$$

De façon équivalente, pour tous  $x$  et  $a$  de  $A$  et  $y$  et  $b$  de  $B$ , on a

$$\langle x, b \triangleleft a \rangle = \langle ax, b \rangle \quad \text{et} \quad \langle b \triangleright a, y \rangle = \langle a, yb \rangle.$$

2.5.3. Les actions que nous venons de définir sont standard.

**Proposition** (BNSz-lemme 2.6). *L'application  $x \mapsto 1_b \triangleleft x$  est un isomorphisme de l'algèbre  $A_s$  sur l'algèbre  $B_t$ . Sa réciproque est donnée par  $y \mapsto y \triangleright 1_a$  ( $y \in B_t$ ).*

2.5.4. [BNSz - 2.7] Des propriétés des sous-algèbres de Cartan, on déduit les formules suivantes pour  $b$  dans  $B$ ,  $x$  dans  $A_t$  et  $y$  dans  $A_s$  :

$$\begin{aligned} x \triangleright b &= (x \triangleright 1_b) b & y \triangleright b &= b (y \triangleright 1_b) \\ b \triangleleft x &= (1_b \triangleleft x) b & b \triangleleft y &= b (1_b \triangleleft y) \end{aligned}$$

## 2.6. Produit croisé d'une algèbre par un groupoïde quantique.

2.6.1. *Définition.* [N - 2.2] Le produit croisé à gauche (resp. à droite)  $M \rtimes G$  (resp.  $G \rtimes M$ ) est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $M \otimes_{G_t} G$  (resp.  $G \otimes_{G_s} M$ ) où on identifie  $m(z \triangleright 1) \otimes g$  et  $m \otimes zg$  (resp.  $gz \otimes m$  et  $g \otimes (1 \triangleleft z)m$ ) pour  $m$  dans  $M$ ,  $g$  dans  $G$  et  $z$  dans  $G_t$  (resp.  $G_s$ ). Soit  $[m \otimes g]$  (resp.  $[g \otimes m]$ ) la classe de  $m \otimes g$  (resp.  $g \otimes m$ ).

On munit le produit croisé d'une structure d'une algèbre involutive en posant pour tous  $g$  et  $h$  dans  $G$  et  $x$  et  $y$  dans  $M$  :

$$\begin{aligned} [x \otimes g][y \otimes h] &= [x(g_{(1)} \triangleright y) \otimes g_{(2)}h] & [x \otimes g]^* &= [(g_{(1)}^* \triangleright x^*) \otimes g_{(2)}^*] \\ (\text{resp. } [g \otimes x][h \otimes y] &= [gh_{(1)} \otimes (x \triangleleft h_{(2)})y] & [g \otimes x]^* &= [g_{(1)}^* \otimes (x^* \triangleleft g_{(2)}^*)] \end{aligned}$$

De plus si  $M$  est une  $C^*$ -algèbre ou une algèbre de von Neumann, le produit croisé devient une  $C^*$ -algèbre ou une algèbre de von Neumann.

Les applications  $i_G : g \mapsto [1 \otimes g]$  (resp.  $g \mapsto [g \otimes 1]$ ) et  $i_M : m \mapsto [m \otimes 1]$  (resp.  $m \mapsto [1 \otimes m]$ ) sont des homomorphismes injectifs d'algèbres involutives de  $G$  et  $M$  dans le produit croisé telles que :

$$M \rtimes G = i_M(M)i_G(G) \quad (\text{resp. } G \rtimes M = i_G(G)i_M(M))$$

2.6.2. *Action duale sur le produit croisé.* [N - 2.2]. On définit l'action duale à gauche (resp. à droite) de  $\hat{G}$  sur  $M \rtimes G$  (resp.  $G \rtimes M$ ) par :

$$\begin{aligned} h \triangleright [m \otimes g] &= [m \otimes h \triangleright g] & (g \in G, h \in \hat{G}, m \in M) \\ (\text{resp. } [g \otimes m] \triangleleft h &= [g \triangleleft h \otimes m] & (g \in G, h \in \hat{G}, m \in M)) \end{aligned}$$

2.7. **Inclusions de profondeur 2.** Nous rappelons ici quelques résultats de [NSzW] qui motivent cet article. Nous considérons un  $C^*$ -groupoïde quantique  $A$  de dimension finie agissant sur une algèbre de von Neumann  $M$ .

2.7.1. *Produit croisé et tour de Jones.*

**Corollaire** (NSzW - 4.1.5). *Soient  $N$  et  $M$  des algèbres de von Neumann et  $A$  un  $C^*$ -groupoïde quantique de dimension finie tel que  $M$  soit  $N \rtimes \hat{A}$ . La tour*

$$N \subset M \subset M \rtimes A \subset M \rtimes A \rtimes \hat{A} \dots$$

*est une tour de Jones de profondeur 2.*

En particulier, si on prend  $N = A_t$  et  $M = A_t \rtimes A = A$ , alors

$$A_t \subset A \subset A \rtimes \hat{A} \subset A \rtimes \hat{A} \rtimes A \dots$$

est une tour de Jones.

2.7.2. *Action extérieure.* Nous prendrons le résultat du théorème suivant comme définition pour une action extérieure.

**Théorème** (NSzW - 4.2.3). *L'action de  $A$  sur  $M$  est extérieure si et seulement si on a l'égalité :*

$$M' \cap (M \rtimes A) = Z(M) \rtimes A_s$$

2.7.3.  *$C^*$ -groupoïde quantique connexe.*

**Définition.** Un  $C^*$ -groupoïde quantique  $A$  est dit connexe (terminologie de [N] que nous gardons car elle fait référence à l'inclusion  $A_s \subset A$ ) ou pur (terminologie de [NSzW]) si  $A_s \cap Z(A)$  est réduit à  $\mathbb{C}$ .

**Proposition** (NSzW - 2.4.6). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A$  est connexe
- (2)  $\hat{A}_s \cap \hat{A}_t = \mathbb{C}$
- (3)  $A_t \cap Z(A) = \mathbb{C}$

*Remarques*

- (1) Si  $A$  est connexe, toute action est standard ([NSzW - 2.2.1]).
- (2) D'après le théorème 3.1.1 de [NSzW], le centre de  $M \rtimes A$  contient nécessairement  $1_M \rtimes (A_t \cap Z(A))$ . Donc la connexité de  $A$  est nécessaire pour obtenir un facteur comme produit croisé.
- (3) D'après le corollaire 2.4.4 de [NSzW], si l'action de  $A$  sur  $M$  est standard, le centre de  $M$  contient nécessairement une sous-algèbre isomorphe à  $A_t \cap A_s$  donc la connexité de  $\hat{A}$  est nécessaire à l'action de  $A$  sur un facteur.

2.7.4. *Action extérieure et facteur.*

**Théorème** (NSzW - 4.2.4). *Si  $A$  agit extérieurement et de façon standard sur un facteur  $M$ ,  $M \rtimes A$  est un facteur si et seulement si  $A$  est connexe.*

**Théorème** (NSzW - 4.2.5). *Si  $A$  est connexe et agit extérieurement sur un facteur  $M$  alors la tour*

$$M^A \subset M \subset M \rtimes A \subset M \rtimes A \rtimes \hat{A} \dots$$

*est une tour de Jones de facteurs. De plus le groupoïde dual  $\hat{A}$  est aussi connexe et son action canonique sur  $M \rtimes A$  est extérieure.*

2.7.5. *Tour dérivée.* Le résultat suivant précise la tour dérivée de l'inclusion obtenue par l'action de  $A$ .

**Corollaire** (NSzW - 4.3.5). *Soient  $A$  un  $C^*$ -groupoïde quantique fini agissant extérieurement sur un facteur  $M$  et  $N$  la sous-algèbre des points fixes de  $M$  sous  $A$ . On a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} N' \cap M &= 1_M \rtimes A_t \\ M' \cap M \rtimes A &= 1_M \rtimes A_s \\ N' \cap M \rtimes A &= 1_M \rtimes A \end{aligned}$$

### 3. C\*-GROUPOÏDES QUANTIQUES ASSOCIÉS À UNE INCLUSION D'INDICE FINI DE PROFONDEUR 2 DE FACTEURS DE TYPE $\text{II}_1$ .

Soit  $N_0 \subset N_1$  une inclusion d'indice fini  $\tau^{-1}$  de facteurs de type  $\text{II}_1$ . On note

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset N_4 \cdots \subset N_n \subset N_{n+1} \cdots$$

la tour de Jones obtenue par construction de base [G.H.J. 3] et  $tr$  la trace normale finie normalisée sur les facteurs considérés.

On suppose que l'inclusion  $N_0 \subset N_1$  est de profondeur 2 c'est-à-dire qu'elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- (1) le commutant relatif  $N'_0 \cap N_3$  est obtenu par construction de base à partir de  $N'_0 \cap N_1 \subset N'_0 \cap N_2$
- (2) l'algèbre  $N'_0 \cap N_3$  est linéairement engendrée par  $N'_0 \cap N_2 f_2 N'_0 \cap N_2$
- (3)  $\dim Z(N'_0 \cap N_1) = \dim Z(N'_0 \cap N_3)$

On remarque que  $N_0 \subset N_1$  est de profondeur 2 si et seulement si  $N_1 \subset N_2$  est de profondeur 2.

**3.1. Anti-automorphismes associés à la tour dérivée [Da 1-2].** Soit  $J_n$  l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de l'espace standard  $L^2(N_n, tr)$  de  $N_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Cette isométrie permet de définir un anti-automorphisme  $j_n$  de  $N'_0 \cap N_{2n}$  en posant :

$$j_n(x) = J_n x^* J_n \quad (x \in N'_0 \cap N_{2n}).$$

L'anti-automorphisme  $j_n$  envoie  $N'_0 \cap N_n$  sur  $N'_n \cap N_{2n}$ .

3.1.1. On rappelle ici les principales propriétés de ces anti-automorphismes.

**Théorème** (Da 1- 2.2.1,2.2.2). *Pour tout entier naturel  $n$ , les anti-automorphismes  $j_n$  sont involutifs et satisfont les relations suivantes :*

- a) La restriction de  $j_{n+2}j_{n+1}$  à  $N'_0 \cap N_{2n}$  coïncide avec  $j_{n+1}j_n$ .
- b) Si on note  $F_n$  le projecteur de Jones de l'inclusion  $N_0 \subset N_n$ , pour tout  $x$  de  $N'_0 \cap N_n$ , on a l'égalité  $F_n x = F_n j_n(x)$ .
- c)  $j_n(f_p) = f_{2n-p}$  ( $1 \leq p \leq n$ ).
- d) Si l'inclusion  $N_0 \subset N_1$  est de profondeur finie, l'anti-automorphisme  $j_n$  conserve la trace de  $N'_0 \cap N_{2n}$  pour tout entier  $n$ .

3.1.2. Comme les isomorphismes  $j_{n+1}j_n$  se prolongent les uns les autres, on peut définir un isomorphisme  $\gamma$  de la tour dérivée par  $\gamma|_{N'_0 \cap N_{2n}} = j_{n+1}j_n$ . Cet isomorphisme  $\gamma$  ajoute 2 aux indices, par exemple :

$$\gamma(f_n) = f_{n+2}, \quad \gamma(N'_0 \cap N_{2n}) = N'_2 \cap N_{2n+2} \cdots$$

3.1.3. *Remarque.* D'après [Da.2. 2.2.3.v et 2.3], on peut affirmer que les applications  $S_A$  et  $S_B$  utilisées par D. Nikshych et L. Vainerman dans [NV 3-8.2 68] sont respectivement  $j_1$  et  $j_2$ , nous les noterons ainsi, gardant les notations  $S_A$  et  $S_B$  pour les antipodes. On a donc pour tous  $a$  de  $N'_0 \cap N_2$  et  $b$  de  $N'_1 \cap N_3$  :

$$E_{N'_1}(j_1(a)f_2f_1) = E_{N'_1}(f_1f_2a) \quad \text{et} \quad E_{N_2}(bf_1f_2) = E_{N_2}(f_2f_1j_2(b))$$

Nous utiliserons sans cesse et pour différentes constructions de base le résultat suivant de [PiPo1] :

$$\forall x \in N_2 \quad x f_1 = \tau^{-1} E_{N_1}(x f_1) f_1$$

**3.2. L'opérateur  $h$ .** L'élément qui va rendre compte du fait que l'inclusion n'est pas irréductible est l'indice de la restriction à  $N'_1 \cap N_2$  de la trace  $tr$  défini par Watatani [W]. Cet opérateur noté  $H$  est un élément inversible et autoadjoint du centre de  $N'_1 \cap N_2$ . Si l'algèbre  $N'_1 \cap N_2$  se décompose sur son centre comme  $\bigoplus_{j \in J} M_{\nu_j}(\mathbb{C})q_j$  et que, pour tout  $j$  de  $J$ ,  $t_j$  soit la valeur de la restriction à  $N'_1 \cap N_2$  de la trace  $tr$  sur les projecteurs minimaux de  $M_{\nu_j}(\mathbb{C})q_j$ , alors  $H$  est donné par la formule :

$$H = \sum_{j \in J} t_j^{-1} \nu_j q_j.$$

On vérifie facilement que la trace de  $H$  est égale à la dimension de  $N'_1 \cap N_2$ . On notera  $h$  l'opérateur  $H^{1/2}$ .

**Lemme.** *Pour tout élément  $x$  de  $N'_1 \cap N_2$ , en particulier pour  $x = h$ , on a :*

- (a)  $f_2 j_2(x) = f_2 x$  et  $f_1 x = f_1 j_1(x)$
- (b)  $j_2(x) f_1 f_2 = f_1 f_2 j_1(x)$

*Démonstration.*

- (a) D'après 3.1.1 (c).
- (b) On utilise (a) et les propriétés de commutation des projecteurs  $f_1$  et  $f_2$ . □

### 3.3. Unités matricielles et quasi-bases.

**3.3.1. Notations.** Les notations et les résultats utilisés ici se trouvent dans [GHJ] aux paragraphes 2.3.11, 2.4.6 et 2.6.5. On peut voir en 5.3 un exemple. Soit une inclusion  $K \subset L$  de  $C^*$ -algèbres unitaires de dimension finie :

$$K = \bigoplus_{j \in J} M_{\nu_j}(\mathbb{C})q_j \subset L = \bigoplus_{i \in I} M_{\mu_i}(\mathbb{C})p_i$$

On suppose qu'il existe sur  $L$  une trace fidèle  $tr$  et on note  $\vec{t}$  et  $\vec{s}$  les vecteurs définis par :

$$t_j = \nu_j^{-1} tr(q_j) \quad (j \in J), \quad s_i = \mu_i^{-1} tr(p_i) \quad (i \in I).$$

et  $h$  l'élément  $\sum_{j \in J} \sqrt{\nu_j t_j^{-1}} q_j$  de  $K$ .

On considère le diagramme de Bratelli (augmenté d'un sommet  $*$ ) de  $K \subset L$ . On appelle étage 1 du diagramme celui des sommets représentant les facteurs de  $K$ , étage 2 l'étage de ceux de  $L$ . Soit  $P$  l'ensemble des couples de chemins  $p = (\xi, \eta)$  joignant le sommet  $*$  à un même sommet du deuxième étage noté  $\text{end}(p)$  et on note  $s_p$  la valeur  $s_{\text{end}(p)}$ . L'ensemble des opérateurs  $\{T_p, p \in P\}$  est une famille d'unités matricielles de  $L$ .

#### 3.3.2. Quasi-base d'une espérance conditionnelle.

**Définition** (W - 1.2.2). Soit  $E$  une espérance conditionnelle fidèle de  $L$  sur  $K$ . Une famille finie  $\{(u_1, v_1) \dots (u_n, v_n)\}$  de  $L \times L$  est dite une quasi-base si pour tout  $x$  de  $L$ , on a :

$$\sum_{i=1}^n u_i E(v_i x) = x = \sum_{i=1}^n E(x u_i) v_i$$

**Proposition** (W - 2.4.1). *Soit  $E$  l'espérance conditionnelle définie par la trace  $tr$  de  $L$  sur  $K$ . Posons, pour  $p \in P$ ,  $u_p = \frac{1}{\sqrt{s_p}} T_p h^{-1}$  alors  $\{(u_p, u_p^*), p \in P\}$  est une quasi-base pour  $E$ .*

On dira dans ce cas que  $\{u_p, p \in P\}$  est une quasi-base pour  $E$ .



3.3.3. *Cas particulier de la tour dérivée.* On considère le diagramme de Bratelli de la tour dérivée de l'inclusion  $N_1 \subset N_2$  :

$$N'_1 \cap N_1 = \mathbb{C} \subset N'_1 \cap N_2 = \bigoplus_{j \in J} M_{\nu_j}(\mathbb{C})q_j \subset N'_1 \cap N_3 = \bigoplus_{i \in I} M_{\mu_i}(\mathbb{C})p_i \subset N'_1 \cap N_4 \dots$$

La restriction de la trace  $tr$  aux algèbres de la tour dérivée est une trace de Markov caractérisée par les vecteurs  $\vec{t}$  et  $\vec{s}$  définis par :

$$t_j = \nu_j^{-1}tr(q_j) \quad (j \in J), \quad s_i = \mu_i^{-1}tr(p_i) \quad (i \in I).$$

Dans le cas d'une inclusion irréductible de profondeur 2, une famille d'unités matricielles normalisées (par  $tr(b_p^*b_p) = 1$ ) de  $B$  est une base orthonormale de  $B$  pour le produit scalaire issu de la trace  $tr$  mais aussi une base de Pimsner-Popa de  $N_3$  sur  $N_2$ . Dans le cas d'une inclusion réductible de profondeur 2, ces deux propriétés ne coïncident plus. Si la normalisation est modifiée par  $h^{-1}$ , nous obtenons des quasi-bases.

**Proposition.**

- (i) L'ensemble  $\{b_p = \frac{1}{\sqrt{s_p}}T_p, p \in P\}$  est une famille d'unités matricielles normalisées (ou une base orthonormale) de  $B$ .
- (ii) L'ensemble  $\{b_ph^{-1}, p \in P\}$  est une quasi-base de  $N_3 \cap N'_1$  sur  $N_2 \cap N'_1$ .
- (iii) Si l'inclusion  $N_1 \subset N_2$  est de profondeur 2, l'ensemble  $\{b_ph^{-1}, p \in P\}$  est une quasi-base de  $N_3$  sur  $N_2$ , c'est-à-dire que pour tout  $x$  de  $N_3$ , on a :

$$x = \sum_{p \in P} b_ph^{-1}E_{N_2}(h^{-1}b_p^*x) = \sum_{p \in P} E_{N_2}(xb_ph^{-1})h^{-1}b_p^*.$$

*Démonstration.*

La première affirmation est évidente puisque la trace de  $T_{p'}^*T_p$  vaut  $\delta(p, p')s_p$  pour  $(p, p')$  dans  $P \times P$ . La deuxième résulte du lemme 2.4.1 de [W] rappelé en 3.3.2.

Si l'inclusion  $N_1 \subset N_2$  est de profondeur 2, le commutant relatif  $N_4 \cap N'_1$  est obtenu par contraction de base à partir de l'inclusion  $N'_1 \cap N_2 \subset N'_1 \cap N_3$  donc il existe une famille finie  $\{(u_\mu, v_\mu), \mu \in M\}$  de couples de  $N'_1 \cap N_3$  telle que  $\sum_{\mu \in M} u_\mu f_3 v_\mu = 1$ . Alors  $\{(u_\mu, v_\mu), \mu \in M\}$  est une quasi-base de  $N_3$  sur  $N_2$  en effet  $\sum_{\mu \in M} u_\mu f_3 v_\mu = 1$  implique  $\sum_{\mu \in M} u_\mu E_{N_2}(v_\mu x) f_3 = x f_3$  pour tout  $x$  de  $N_3$  et donc grâce à [GHJ - 2.6.7(iii)], on peut écrire :

$$\sum_{\mu \in M} u_\mu E_{N_2}(v_\mu x) = x$$

En utilisant (ii) pour chaque  $u_\mu$ , on obtient :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\mu \in M, p \in P} b_ph^{-1}E_{N_2}(h^{-1}b_p^*u_\mu)E_{N_2}(v_\mu x) \\ &= \sum_{\mu \in M, p \in P} b_ph^{-1}E_{N_2}(h^{-1}b_p^*u_\mu E_{N_2}(v_\mu x)) \\ &= \sum_{p \in P} b_ph^{-1}E_{N_2}(h^{-1}b_p^*x) \end{aligned}$$

□

3.3.4. *Remarque.* Dans le cas d'une inclusion de profondeur 2, on a donc une quasi-base formée d'éléments du commutant relatif  $N_3 \cap N'_1$ , de plus on peut la choisir très proche d'une base orthonormale de cette algèbre. Nous verrons dans les calculs que ces propriétés sont très précieuses.

**3.4. Dualité.** Contrairement à D. Nikshych et L. Vainerman, nous définissons une dualité entre  $A$  et  $B$  en utilisant une formule symétrique :

$$\langle a, b \rangle = \tau^{-2} \text{tr}(ahf_2f_1hb) \quad (a \in A, b \in B)$$

On remarque que, grâce 3.2, la dualité s'écrit aussi :

$$\langle a, b \rangle = \tau^{-2} \text{tr}(aj_2(h)f_2f_1j_1(h)b) \quad (a \in A, b \in B)$$

et on a pour tout  $a$  de  $A$ , tout  $b$  de  $B$  et tout  $x$  de  $N'_1 \cap N_2$  :

$$\langle a, bx \rangle = \langle xa, b \rangle \quad \text{et} \quad \langle a, j_2(x)b \rangle = \langle aj_1(x), b \rangle$$

*Remarque :* Ce crochet définit une dualité car l'inclusion est de profondeur 2 (voir [Szy] ou [NV1 -3.2]).

**3.5. Les co-algèbres  $A$  et  $B$ .** Les algèbres  $A$  et  $B$  sont des  $C^*$ -algèbres. Grâce à la dualité entre  $A$  et  $B$ , nous définissons sur  $A$  et  $B$  des structures de co-algèbres co-associatives. Nous allons voir que les co-produits et les co-unités de ces co-algèbres sont définis par des formules analogues pour  $A$  et  $B$  et montrer qu'ils vérifient les propriétés (i) et (ii) des  $C^*$  groupoïdes quantiques (2.1).

**3.5.1. Formule pour les co-produits.** Le co-produit  $\Delta_B$  de  $B$  est défini comme dual de la multiplication de l'algèbre  $A$ . De même pour le co-produit  $\Delta_A$  de  $A$ .

**Proposition.** Soient  $\{b_p, p \in P\}$  une famille d'unités matricielles normalisées de  $B$  et  $\{a_s, s \in S\}$  une famille d'unités matricielles normalisées de  $A$ .

*Premières formules :*

Le co-produit  $\Delta_B$  de  $B$  est donné pour  $x$  dans  $B$  par :

$$\Delta_B(x) = \tau^{-2} \sum_{p \in P} E_{N_3}(f_3xE_{N'_2}(b_p^*f_3h^{-1}f_2h^{-1})) \otimes b_p$$

et le co-produit  $\Delta_A$  de  $A$  vérifie pour  $x$  dans  $A$  une formule analogue :

$$\Delta_A(x) = \tau^{-2} \sum_{s \in S} E_{N_2}(f_2xE_{N'_1}(a_s^*f_2j_1(h^{-1})f_1j_1(h^{-1}))) \otimes a_s.$$

formule qui s'écrit aussi :

$$\Delta_A(x) = \tau^{-2} \sum_{s \in S} E_{N_2}(f_2xE_{N'_1}(a_s^*f_2h^{-1}f_1h^{-1})) \otimes a_s.$$

*Deuxième formule pour  $\Delta_B$  :*

Si  $\{\alpha_r, r \in R\}$  est une base de Pimsner-Popa de  $A$  sur  $N'_0 \cap N_1$ , on a aussi :

$$\Delta_B(x) = \sum_{p \in P} \sum_{r \in R} E_A(x\alpha_r b_p^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_p$$

*Démonstration.*

Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux éléments de  $A$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle a_1 \otimes a_2, \Delta_B(x) \rangle &= \tau^{-6} \sum_{p \in P} \text{tr}(a_1 h f_2 f_1 h f_3 x E_{N'_2}(b_p^* h^{-1} f_3 f_2 h^{-1})) \text{tr}(a_2 h f_2 f_1 h b_p) \\ &= \tau^{-6} \text{tr}(f_1 h f_3 x a_1 E_{N'_2} \left( \sum_{p \in P} \text{tr}(a_2 h f_2 f_1 h b_p) b_p^* h^{-1} f_3 f_2 \right) f_2) \\ &= \tau^{-6} \text{tr}(f_1 h f_3 x a_1 E_{N'_2} [E_{N'_1}(a_2 h f_2 f_1) f_3 f_2] f_2) \end{aligned}$$

Comme les tours  $N'_3 \subset N'_2 \subset N'_1$  et  $N'_2 \subset N'_1 \subset N'_0$  sont standard, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle a_1 \otimes a_2, \Delta_B(x) \rangle &= \tau^{-5} \text{tr}(f_1 h x a_1 E_{N'_1}(a_2 h f_2 f_1) f_3 f_2 f_3) \\ &= \tau^{-4} \text{tr}(f_1 h x a_1 E_{N'_1}(a_2 h f_2 f_1) f_3) \\ &= \tau^{-3} \text{tr}(a_1 E_{N'_1}(a_2 h f_2 f_1) f_1 h x) \\ &= \tau^{-2} \text{tr}(a_1 a_2 h f_2 f_1 h x) \\ &= \langle a_1 a_2, x \rangle \end{aligned}$$

La première formule pour  $\Delta_A$  se montre de manière analogue.

Nous pouvons établir une expression du co-produit  $\Delta_B$  semblable à celle de [Da - 5.3.1], c'est la deuxième formule. Soit  $\{\alpha_r, r \in R\}$  une base de Pimsner-Popa de  $A$  sur  $N'_0 \cap N_1$ , on vérifie facilement que  $\{\alpha_r, r \in R\}$  est une base de Pimsner-Popa de  $N_2$  sur  $N_1$ . On sait d'après [Bi 2.7] que pour tout  $y$  de  $N'_1 \cap N_4$ , on a :

$$\tau \sum_{r \in R} \alpha_r y \alpha_r^* = E_{N'_2}(y).$$

En appliquant ce résultat à la première formule de  $\Delta_B$ , on obtient la seconde.  $\square$

On utilisera la notation habituelle de Sweedler :  $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ .

3.5.2. Des définitions des co-produits par dualité et des propriétés de la dualité, on déduit :

**Proposition.** *Soit  $x$  un élément de  $N'_1 \cap N_2$ . Pour tous  $a$  de  $A$  et  $b$  de  $B$ , on a :*

$$\begin{aligned} \Delta_B(bx) &= \Delta_B(b)(x \otimes 1) & \Delta_B(j_2(x)b) &= (1 \otimes j_2(x))\Delta_B(b) \\ \Delta_A(aj_1(x)) &= \Delta_A(a)(j_1(x) \otimes 1) & \Delta_A(xa) &= (1 \otimes x)\Delta_A(a) \end{aligned}$$

3.5.3. *Les projecteurs  $\Delta_A(1)$  et  $\Delta_B(1)$ .* Nous calculons maintenant les images de l'unité par les co-produits et nous faisons le lien avec les projecteurs relatifs aux produits fibrés en dimension finie définis par Jean-Michel Vallin dans [V1].

**Proposition.** *Si  $\{\lambda_k, k \in K\}$  est une famille d'unités matricielles de  $N'_1 \cap N_2$  telle que l'élément  $\lambda_k$  appartienne au facteur  $M_{\nu_{j_k}}(\mathbb{C})q_{j_k}$ , l'élément  $\Delta_B(1)$  est le projecteur*

$$\sum_k \frac{1}{\nu_{j_k}} j_2(\lambda_k^*) \otimes \lambda_k \text{ de } N'_2 \cap N_3 \otimes N'_1 \cap N_2.$$

*Démonstration.*

Ecrivons la deuxième formule du co-produit pour  $x = 1$ , comme  $\sum_{r \in R} \alpha_r f_2 \alpha_r^*$  vaut 1, la propriété 3.2 (a) donne :

$$\Delta_B(1) = \sum_p j_2(h^{-1} E_{N_2}(b_p^*) h^{-1}) \otimes b_p.$$

Si  $\{\lambda_k, k \in K\}$  est une famille d'unités matricielles de  $N'_1 \cap N_2$ ,  $\{\sqrt{\frac{1}{t_{j_k}}} \lambda_k, t \in I\}$  est une base orthonormale de  $N'_1 \cap N_2$  et comme  $E_{N_2}(b_p^*) h^{-1}$  appartient à  $N'_1 \cap N_2$ , on a :

$$\begin{aligned} \Delta_B(1) &= \sum_{p,k} \frac{1}{t_{j_k}} j_2(h^{-1} \lambda_k^*) \otimes \text{tr}(E_{N_2}(b_p^*) h^{-1} \lambda_k) b_p \\ &= \sum_k \frac{1}{t_{j_k}} j_2(h^{-1} \lambda_k^*) \otimes h^{-1} \lambda_k \end{aligned}$$

On obtient donc la formule annoncée et l'appartenance de  $\Delta_B(1)$  à  $N'_2 \cap N_3 \otimes N'_1 \cap N_2$  ;  $\Delta_B(1)$  est un projecteur car  $\Delta_B$  est un homomorphisme d'algèbres, comme on le montre au paragraphe suivant.  $\square$

Considérons l'identité comme représentation de  $N'_1 \cap N_2$  dans  $A$  et  $B$ ,  $j_1$  (resp.  $j_2$ ) comme antireprésentation de  $N'_1 \cap N_2$  dans  $A$  (resp.  $B$ ). Alors  $\Delta_A(1)$  (resp.  $\Delta_B(1)$ ) est le projecteur  $e_{Id, j_1}$  (resp.  $e_{j_2, Id}$ ) défini par Jean-Michel Vallin [V1].

### 3.5.4. Propriétés des co-produits.

**Proposition.** *Les co-produits sont des homomorphismes d'algèbres involutives vérifiant :*

$$(\Delta \otimes \text{id})\Delta(1) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)$$

*Démonstration.*

Montrons la proposition pour  $\Delta_B$  par exemple. D'après 3.5.1, pour tous  $x$  et  $y$  de  $B$ , on a :

$$\begin{aligned} & \Delta_B(x)\Delta_B(y) \\ &= \tau^{-2} \sum_{p, p' \in P} E_{N_3}(f_3 x E_{N'_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2 h^{-1})) \sum_{r \in R} E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_p b_{p'} \\ &= \tau^{-2} \sum_{p, p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_3}[f_3 x E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) h^{-1} E_{N'_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2 j_2(h^{-1})) f_2 h^{-1} \alpha_r^*] \otimes b_p b_{p'} \\ &= \tau^{-2} \sum_{p, p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_3}[f_3 x E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) H^{-1} E_{N'_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2) f_2 h^{-1} \alpha_r^*] \otimes b_p b_{p'} \\ &= \tau^{-1} \sum_{p, p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_3}[f_3 x E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) H^{-1} b_p^* f_3 h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^*] \otimes b_p b_{p'} \\ &= \sum_{p, p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}[x E_A(y \alpha_r b_{p'}^*) H^{-1} b_p^*] h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_p b_{p'} \\ &= \sum_{p, p', q \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}[x E_A(y \alpha_r b_{p'}^* \text{tr}(b_{p'} b_q^* b_p)) H^{-1} b_p^*] h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_q \\ &= \sum_{p, q \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}[x E_A(y \alpha_r b_q^* b_p h^{-1}) h^{-1} b_p^*] h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_q \\ &= \sum_{p, q \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}(x y \alpha_r b_q^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_q \quad (\text{d'après 3.3.3}) \\ &= \Delta_B(xy) \end{aligned}$$

Traisons maintenant le cas de l'involution :

$$\begin{aligned} \Delta_B(x)^* &= \sum_{p \in P} \sum_{r \in R} \alpha_r h^{-1} f_2 h^{-1} E_A(b_p \alpha_r^* x^*) \otimes b_p^* \\ &= \sum_{p \in P} \sum_{r, s \in R} \alpha_r h^{-1} f_2 h^{-1} E_{N_1}(b_p \alpha_r^* x^* \alpha_s) \alpha_s^* \otimes b_p^* \\ &= \sum_{p \in P} \sum_{r, s \in R} \alpha_r E_{N_1}(b_p \alpha_r^* x^* \alpha_s) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_s^* \otimes b_p^* \end{aligned}$$

Comme  $b_p$  commute avec  $N_1$ , on a :

$$E_{N_1}(b_p \alpha_r^* x^* \alpha_s) = E_{N_1}(\alpha_r^* x^* \alpha_s b_p)$$

Puisque  $\{\alpha_r, r \in R\}$  est une base de Pimsner-Popa de  $A$  sur  $N'_0 \cap N_1$  et que  $\{b_p^*, p \in P\}$  est une famille d'unités matricielles normalisées, on obtient :

$$\Delta_B(x)^* = \sum_{p \in P} \sum_{s \in R} E_A(x^* \alpha_s b_p) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_s^* \otimes b_p^* = \Delta_B(x^*)$$

Montrons la relation pour  $\Delta_B(1)$ . Comme  $1_{(1)}$  appartient à  $N'_2 \cap N_3$ , d'après 3.5.2, on a :

$$(\Delta_B \otimes \text{id})\Delta_B(1) = \Delta_B(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)} = (1 \otimes 1_{(1)})\Delta_B(1) \otimes 1_{(2)} = (1 \otimes \Delta_B(1))(\Delta_B(1) \otimes 1)$$

□

### 3.5.5. Etude des counités.

**Proposition.** *Pour tout élément  $b$  de  $B$ , la co-unité  $\varepsilon_B$  de  $B$  est donnée par :*

$$\varepsilon_B(b) = \tau^{-1} \text{tr}(h f_2 h b).$$

*Pour tout élément  $a$  de  $A$ , la co-unité  $\varepsilon_A$  de  $A$ , vérifie une formule analogue :*

$$\varepsilon_A(a) = \tau^{-1} \text{tr}(h f_1 h a) = \tau^{-1} \text{tr}(j_1(h) f_1 j_1(h) a).$$

*Chaque co-unité vérifie :  $\varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z)$ .*

*Démonstration.*

Les formules sont évidentes compte-tenu des propriétés des projecteurs de Jones. Montrons la relation pour la counité de  $B$ . Soient  $x, y$  et  $z$  trois éléments de  $B$ . On pose :

$$\Delta_A(1) = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \quad \text{et} \quad \Delta_B(y) = y_{(1)} \otimes y_{(2)}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z) &= \langle 1_{(1)}, x \rangle \langle 1_{(2)}, y_{(2)} \rangle \langle 1_{(1)}, y_{(1)} \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \\ &= \langle 1_{(1)}, x \rangle \langle 1_{(2)}, \varepsilon_B(y_{(1)} 1_{(1)}) y_{(2)} \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \end{aligned}$$

Or comme  $1_{(1)}$  est un élément de  $N'_1 \cap N_2$  et  $B$  une co-algèbre, d'après 3.5.2, on a :

$$\varepsilon_B(y_{(1)} 1_{(1)}) y_{(2)} = (\varepsilon_B \otimes \text{id})(\Delta_B(y)(1_{(1)} \otimes 1)) = (\varepsilon_B \otimes \text{id})\Delta_B(y 1_{(1)}) = y 1_{(1)}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z) &= \langle 1_{(1)}, x \rangle \langle 1_{(2)}, y 1_{(1)} \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \\ &= \langle 1, x y 1_{(1)} \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \\ &= \langle 1_{(1)}, x y \rangle \langle 1_{(2)}, z \rangle \\ &= \varepsilon_B(xyz). \end{aligned}$$

□

Nous donnons maintenant les expressions des co-unités but et source de  $B$ , les formules pour  $A$  sont analogues :

**Proposition.** *Pour tout  $x$  de  $B$ , on a :*

$$\begin{aligned} \varepsilon_B^t(x) &= \tau^{-1} E_{N'_1 \cap N_2}(x h f_2 h^{-1}) \\ \varepsilon_B^s(x) &= \tau^{-1} j_2(E_{N'_1 \cap N_2}(x h f_2 h^{-1})) = \tau^{-1} E_{N'_2 \cap N_3}(j_2(x) h^{-1} f_2 h) \end{aligned}$$

*La sous-algèbre de Cartan but  $A_t$  de  $A$  est  $N'_0 \cap N_1$ , la sous-algèbre de Cartan source  $B_s$  de  $B$  est  $N'_2 \cap N_3$ , les sous-algèbres de Cartan but  $B_t$  et source  $A_s$  coïncident avec  $N'_1 \cap N_2$ .*

*Démonstration.*

Avec les notations de 3.5.3 et grâce à la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon_B^t(x) &= \tau^{-1} \sum_k \frac{1}{\nu_{j_k}} \text{tr}(x h f_2 h j_2(\lambda_k^*)) \lambda_k \\ &= \tau^{-1} \sum_k \frac{1}{\nu_{j_k}} \text{tr}(x h f_2 \lambda_k^* h) \lambda_k \\ &= \tau^{-1} \sum_k \text{tr}(x h f_2 \frac{1}{\sqrt{t_{j_k}}} \lambda_k^*) \frac{1}{\sqrt{t_{j_k}}} \lambda_k h^{-1}\end{aligned}$$

On obtient la formule annoncée en remarquant que  $\{\frac{1}{\sqrt{t_{j_k}}} \lambda_k, k \in K\}$  est une famille d'unités matricielles normalisées de  $N'_1 \cap N_2$ . La deuxième formule se montre de même.  $\square$

**3.6. Antipodes sur  $A$  et  $B$ .** Pour obtenir des structures de  $C^*$ -groupoïdes quantiques duaux sur  $A$  et  $B$ , nous complétons nos données par les antipodes  $S_A$  et  $S_B$  définies pour tous  $a$  de  $A$  et  $b$  de  $B$  par :

$$\langle S_A(a)^*, b \rangle = \overline{\langle a, b^* \rangle} \quad \langle a, S_B(b)^* \rangle = \overline{\langle a^*, b \rangle}$$

3.6.1. *Formules pour les antipodes.* Nous obtenons alors les formules suivantes :

$$\begin{aligned}S_B(b) &= h j_2(h^{-1}) j_2(b) h^{-1} j_2(h) \\ S_A(a) &= j_1(h) h^{-1} j_1(a) j_1(h^{-1}) h\end{aligned}$$

Il est évident que  $S_A$  et  $S_B$  sont des anti-automorphismes d'algèbres conservant l'unité. On vérifie facilement la formule de dualité :

$$\langle S_A(a), b \rangle = \langle a, S_B(b) \rangle.$$

Et par dualité, on obtient que  $S_A$  et  $S_B$  sont des anti-automorphismes de co-algèbres conservant les co-unités.

3.6.2. Il nous reste à vérifier la formule liant l'antipode, la co-unité et le co-produit :

**Proposition.** *Les antipodes  $S_A$  et  $S_B$  vérifient la relation :*

$$m(\text{id} \otimes S) \Delta(x) = (\varepsilon \otimes \text{id})(\Delta(1)(x \otimes 1)) = \varepsilon_t(x)$$

*Démonstration.*

Soit  $x$  un élément de  $B$ , avec les notations de 3.5.1, on a :

$$\begin{aligned}m(\text{id} \otimes S_B) \Delta_B(x) &= x_{(1)} S_B(x_{(2)}) \\ &= \tau^{-2} \sum_{p \in P} E_{N_3} [f_3 x E_{N'_2} (b_p^* f_3 h^{-1} f_2 h^{-1})] h j_2(h^{-1}) j_2(b_p) h^{-1} j_2(h) \\ &= \tau^{-2} \sum_{p \in P} E_{N_3} [f_3 x E_{N'_2} (b_p^* f_3 h^{-1} f_2) h j_2(b_p h^{-2}) h^{-1} j_2(h)]\end{aligned}$$

Or, si  $\{\alpha_r, r \in R\}$  est une base de Pimsner-Popa de  $A$  sur  $N'_0 \cap N_1$ , la formule de [Da 1-3.2.1] nous donne une expression de  $j_2(b_p h^{-2})$  :

$$j_2(b_p h^{-2}) = \tau^{-1} \sum_{r \in R} E_A(f_2 \alpha_r b_p h^{-2}) f_2 \alpha_r^*.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} m(\text{id} \otimes S_B)\Delta_B(x) &= \tau^{-3} \sum_{p \in P, r \in R} E_{N_3}[f_3 x h E_A(f_2 \alpha_r b_p h^{-2}) E_{N_2}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2) f_2 \alpha_r^* h^{-1} j_2(h)] \\ &= \tau^{-2} \sum_{p \in P, r \in R} E_{N_3}[f_3 x h E_A(f_2 \alpha_r b_p h^{-1}) h^{-1} b_p^* f_3 h^{-1} f_2 \alpha_r^* h^{-1} j_2(h)] \end{aligned}$$

Comme l'ensemble  $\{b_p h^{-1}, p \in P\}$  est une quasi-base de  $N_3$  sur  $N_2$  [3.3.3], on a :

$$\sum_{p \in P} E_A(f_2 \alpha_r b_p h^{-1}) h^{-1} b_p^* = f_2 \alpha_r$$

d'autre part puisque  $\{\alpha_r, r \in R\}$  est une base de Pimsner-Popa, la somme  $\sum_{r \in R} \alpha_r f_2 \alpha_r^*$  vaut 1, on en déduit :

$$\begin{aligned} m(\text{id} \otimes S_B)\Delta_B(x) &= \tau^{-2} \sum_{r \in R} E_{N_3}(f_3 x h f_2 \alpha_r f_3 j_2(h^{-1}) f_2 \alpha_r^* h^{-1} j_2(h)) \\ &= \tau^{-2} E_{N_3}(f_3 x h f_2 f_3 h^{-1}) \\ &= \tau^{-2} E_{N_3}(E_{N_2}(x h f_2 h^{-1}) f_3) \\ &= \tau^{-1} E_{N_2}(x h f_2 h^{-1}) \end{aligned}$$

On obtient la formule annoncée grâce à l'expression de  $\varepsilon_B^t$  démontrée en 3.5.5.  $\square$

3.6.3. *Remarques.* Les formules définissant  $S_A$  et  $S_B$  sont analogues. Les automorphismes  $S_A^2$  et  $S_B^2$  sont intérieurs :

$$S_A^2 = \text{Ad}(j_1(H)H^{-1}) \quad S_B^2 = \text{Ad}(j_2(H^{-1})H)$$

Les restrictions des antipodes aux sous-algèbres de Cartan sont involutives.

3.7. **Projection de Haar, mesure de Haar.** On démontre facilement la proposition suivante.

**Proposition.** *Soit  $d$  la dimension de  $N'_1 \cap N_2$ . La projection de Haar normalisée du C\*-groupe quantique  $B$  est  $p_B = d^{-1} h f_2 h$ . La mesure de Haar normalisée du C\*-groupe quantique  $B$  est  $\phi_B$  définie par :*

$$\phi_B(x) = d^{-1} \text{tr}(H j_2(H) x) \quad (x \in B).$$

On a des formules analogues pour le C\*-groupe quantique  $A$ .

3.8. **Actions des C\*-groupe quantiques.**

D'après [NV 1 - 6.1], le C\*-groupe quantique  $B$  agit à gauche sur l'algèbre  $N_2$ . Nous définissons ici une action à gauche du C\*-groupe quantique  $A$  sur  $N_1$  puis nous obtiendrons par dualité une action à gauche du C\*-groupe quantique  $B$  sur  $N_2$ . On trouvera toutes les définitions concernant les actions et les produits croisés dans la partie 2.

3.8.1. *Action du C\*-groupe quantique  $A$  sur  $N_1$ .*

**Proposition.** *L'application :  $A \otimes N_1 \rightarrow N_1$   
 $a \otimes x \mapsto a \triangleright x = \tau^{-1} E_{N_1}(a x h f_1 h^{-1})$  est une action à gauche standard et extérieure du C\*-groupe quantique  $A$  sur l'algèbre  $N_1$ .*

*Démonstration.*

Tout au long de cette démonstration, nous utilisons l'égalité :  $f_1h = f_1j_1(h)$  ( voir 3.2 (a)). Montrons d'abord que l'application définit une structure de  $A$ -module à gauche sur  $N_1$  :

$$\begin{aligned} 1 \triangleright x &= \tau^{-1}E_{N_1}(xhf_1h^{-1}) = x \\ a \triangleright (c \triangleright x) &= \tau^{-2}E_{N_1}(aE_{N_1}(cxhf_1h^{-1})hf_1h^{-1}) \\ &= \tau^{-2}E_{N_1}(aE_{N_1}(cxhf_1)f_1h^{-1}) \\ &= \tau^{-1}E_{N_1}(acxhf_1h^{-1}) = (ac) \triangleright x \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant l'action de  $A$  sur un produit.

**Lemme.** *Pour tout  $a$  de  $A$  et  $x$  de  $N_1$ , on a :*

$$(a_{(1)} \triangleright x)a_{(2)} = ax$$

*Démonstration.*

Soit  $\{a_s, s \in S\}$  une famille d'unités matricielles normalisées de  $A$ . D'après 3.5.1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (a_{(1)} \triangleright x)a_{(2)} &= \tau^{-3} \sum_{s \in S} E_{N_1}[E_{N_2}(f_2aE_{N_1}(a_s^*f_2h^{-1}f_1h^{-1}))xhf_1h^{-1}]a_s \\ &= \tau^{-3} \sum_{s \in S} E_{N_1}[f_2axE_{N_1}(a_s^*f_2h^{-1}f_1)f_1h^{-1}]a_s \\ &= \tau^{-2} \sum_{s \in S} E_{N_1}(f_2axa_s^*f_2h^{-1}f_1h^{-1})a_s \\ &= \tau^{-2} \sum_{s \in S} E_{N_1}(f_2E_{N_1}(axa_s^*)j_1(h^{-1})f_1j_1(h^{-1}))a_s \\ &= \sum_{s \in S} E_{N_1}(axa_s^*j_1(h^{-1}))j_1(h^{-1})a_s \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que si  $\{a_s, s \in S\}$  une famille d'unités matricielles normalisées de  $A$ ,  $\{a_s^*, s \in S\}$  l'est aussi et d'après 3.3.3,  $\{a_s^*j_1(h^{-1}), s \in S\}$  est une quasi-base de  $N_2$  sur  $N_1$ .  $\square$

On reprend maintenant la démonstration des propriétés de l'action. En appliquant le lemme précédent pour  $a$  dans  $A$  et  $x$  et  $y$  dans  $N_1$ , on obtient :

$$(a_{(1)} \triangleright x)(a_{(2)} \triangleright y) = \tau^{-1}E_{N_1}((a_{(1)} \triangleright x)a_{(2)}yhf_1h^{-1}) = a \triangleright xy$$

Pour montrer la relation :  $(a \triangleright x)^* = S_A(a)^* \triangleright x^*$ , commençons par un lemme :

**Lemme.** *Si  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $N_1$  et que  $a$  appartient à  $A$ , alors on a :*

$$tr(j_1(a)xf_1y) = tr(f_1xay)$$

*Démonstration.*

Ici, en considérant l'inclusion des commutants, la formule [NV 1 - 4.5 (i)] s'écrit :

$$j_1(a) = \tau^{-3}E_{N_2}(f_2f_1E_{N_1}(af_2f_1))$$



En utilisant les propriétés de commutation, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
tr(j_1(a)xf_1y) &= \tau^{-3}tr(E_{N_2}(f_2f_1E_{N_1}(af_2f_1))xf_1y) \\
&= \tau^{-3}tr(f_2f_1xE_{N_1}(af_2f_1)f_1y) \\
&= \tau^{-2}tr(f_2f_1xaf_2f_1y) \\
&= tr(E_{N_1}(f_1xa)y) \\
&= tr(f_1xay)
\end{aligned}$$

□

Grâce à ce lemme, pour  $x$  et  $y$  éléments de  $N_1$  et  $a$  dans  $A$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
tr((S_A(a)^* \triangleright x^*)y) &= \tau^{-1}tr(hj_1(h^{-1})j_1(a^*)h^{-1}j_1(h)x^*hf_1h^{-1}y) \\
&= \tau^{-1}tr(j_1(ha^*h^{-1})x^*f_1y) \\
&= \tau^{-1}tr(f_1x^*ha^*h^{-1}y) \\
&= \tau^{-1}tr(h^{-1}f_1hx^*a^*y) \\
&= tr((a \triangleright x)^*y)
\end{aligned}$$

On étudie ensuite l'action de  $A$  sur l'unité de  $N_1$  :

$$a \triangleright 1 = \tau^{-1}E_{N_1}(ahf_1h^{-1}) = \varepsilon_A^t(a) = \varepsilon_A^t(a) \triangleright 1$$

On vérifie facilement que  $a \triangleright 1$  est nul si et seulement si  $\varepsilon_A^t(a)$  l'est. L'action est donc standard. La proposition 3.8.3 nous permet d'affirmer qu'elle est extérieure (voir 2.7.2) puisque d'après 3.5.5,  $N'_1 \cap N_2$  est la sous-algèbre de Cartan  $A_s$ . □

**3.8.2. Points fixes sous l'action de  $A$ .** Par définition, un élément  $x$  de  $N_1$  est un point fixe sous l'action de  $A$  si on a l'égalité

$$a \triangleright x = \varepsilon_A^t(a) \triangleright x \quad (*)$$

**Proposition.** *L'algèbre  $N_0$  est l'algèbre des points fixes de  $N_1$  sous l'action du  $C^*$ -groupe quantique  $A$ .*

*Démonstration.*

Si  $x$  est dans  $N_0$ , alors  $x$  commute à  $A$  donc vérifie l'égalité (\*). Si  $x$  est un point fixe, écrivons l'égalité (\*) pour  $a = f_1h^{-1}$ , en utilisant le lemme 3.2, nous obtenons alors la suite d'égalités équivalentes :

$$\begin{aligned}
(f_1h^{-1}) \triangleright x &= \varepsilon_A^t(f_1h^{-1}) \triangleright x \\
\tau^{-1}E_{N_1}(f_1xf_1h^{-1}) &= \tau^{-2}E_{N_1}(E_{N_1}(f_1h^{-1})xf_1h^{-1}) \\
E_{N_0}(x)j_1(h^{-1}) &= xj_1(h^{-1}) \\
E_{N_0}(x) &= x
\end{aligned}$$

Donc  $x$  appartient à  $N_0$ . □

**3.8.3. Produit croisé de  $N_1$  par  $A$ .**

**Proposition.** *L'application  $\Theta : [x \otimes a] \longmapsto xa$  est un isomorphisme d'algèbres de von Neumann entre  $N_1 \rtimes A$  et  $N_2$ .*

*Démonstration.*

La démonstration est semblable à celle donnée par D. Nikshych et L. Vainerman dans [NV 1 - 6.3], nous la donnons pour être complets.

Si  $z$  appartient à  $A_t = N'_0 \cap N_1$ , on a :

$$z \triangleright 1 = \varepsilon_A^t(z) = z$$

donc  $\Theta$  définit une application linéaire de  $N_1 \otimes_{A_t} A$  dans  $N_2$  qui est surjective puisque  $A$  fournit une quasi-base de  $N_2$  sur  $N_1$ .

En utilisant le premier lemme démontré en 3.8.1, on obtient pour  $a$  et  $c$  dans  $A$ ,  $x$  et  $y$  dans  $N_1$  :

$$\begin{aligned} \Theta([x \otimes a][y \otimes c]) &= \Theta([x(a_{(1)} \triangleright y) \otimes a_{(2)}c]) \\ &= x(a_{(1)} \triangleright y)a_{(2)}c \\ &= xayc \\ &= \Theta([x \otimes a])\Theta([y \otimes c]) \\ \Theta([x \otimes a]^*) &= \Theta([(a_{(1)}^* \triangleright x^*) \otimes a_{(2)}^*]) \\ &= (a_{(1)}^* \triangleright x^*)a_{(2)}^* \\ &= a^*x^* \\ &= \Theta([x \otimes a]) \end{aligned}$$

L'application est donc un homomorphisme surjectif d'algèbres involutives. Puisque ces algèbres sont des facteurs de type  $II_1$ ,  $\Theta$  est injectif et la proposition est démontrée.  $\square$

3.8.4. *Action du  $C^*$ -groupeïde quantique  $B$  sur  $N_2$ .* On précise maintenant l'action à gauche de  $B$  sur  $A$ .

**Lemme.** *L'action à gauche de  $B$  sur  $A$  définie par dualité est :*

$$b \triangleright a = \tau^{-1}E_A(bahf_2h^{-1}) \quad (a \in A, b \in B)$$

*Démonstration.*

D'après 2.5.2, l'action duale de  $B$  sur  $A$  est définie par

$$b \triangleright a = a_{(1)}\langle a_{(2)}, b \rangle \quad (a \in A, b \in B).$$

Pour tout  $c$  dans  $B$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \langle b \triangleright a, c \rangle &= \langle a_{(1)}, c \rangle \langle a_{(2)}, b \rangle \\ &= \langle a, cb \rangle \\ &= \tau^{-2}tr(bahf_2f_1hc) \\ &= \tau^{-2}tr(\tau^{-1}E_{N_2}(bahf_2)f_2f_1hc) \\ &= \tau^{-2}tr(\tau^{-1}E_{N_2}(bahf_2h^{-1})hf_2f_1hc) \\ &= \langle \tau^{-1}E_A(bahf_2h^{-1}), c \rangle \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition.** *L'application :* 
$$\begin{array}{ccc} B \otimes N_2 & \rightarrow & N_2 \\ b \otimes x & \mapsto & b \triangleright x = \tau^{-1}E_{N_2}(bxhf_2h^{-1}) \end{array}$$
 *est une action à gauche du  $C^*$ -groupeïde quantique  $B$  sur l'algèbre  $N_2$  qui prolonge l'action duale de  $B$  sur  $A$  et dont l'algèbre de points fixes est  $N_1$ . Le facteur  $N_3$  est isomorphe au produit croisé de  $N_2$  par  $B$ .*

*Démonstration.*

Il suffit de remarquer que la formule est analogue à celle qui définit l'action de  $A$  sur  $N_1$  et que si  $x$  appartient à  $A$ , on retrouve l'action duale. C'est l'action duale de  $B$  sur  $N_1 \rtimes A$  (voir 2.6.2). Comme l'algèbre  $N_2$  est linéairement engendrée par les produits

$xa$  ( $x \in N_1, a \in A$ ), on a plus précisément pour  $x$  dans  $N_1$  et  $a$  dans  $A$  l'égalité  $b \triangleright xa = x(b \triangleright a)$ .  $\square$

**3.9. Conclusion.** Nous avons donc défini sur les commutants relatifs  $N'_0 \cap N_2$  et  $N'_1 \cap N_3$  des structures de C\*-groupeïde quantique duales données par des formules analogues. Ces C\*-groupeïdes quantiques agissent extérieurement de manière analogue et duale sur les facteurs  $N_1$  et  $N_2$ . L'intérêt de la symétrie des définitions apparaîtra dans les parties suivantes.

Les C\*-groupeïdes quantiques associés à une inclusion de profondeur 2 de facteurs de type  $II_1$  sont un peu particuliers, d'une part la restriction de l'antipode aux sous-algèbres de Cartan est involutive, d'autre part ce sont des groupeïdes connexes en effet :

$$A_t \cap Z(A) \subset N'_0 \cap N_1 \cap \{f_1\}' = N'_0 \cap N_0 = \mathbb{C}$$

Cela tient au fait qu'on considère des inclusions de facteurs.

#### 4. C\*-GROUPOÏDES QUANTIQUES ASSOCIÉS À UNE INCLUSION D'INDICE FINI DE PROFONDEUR FINIE DE FACTEURS DE TYPE $II_1$

**4.1. Inclusion de profondeur finie.** Soit  $P_0 \subset P_1$  une inclusion d'indice fini  $\delta^{-1}$  et de profondeur finie de facteurs de type  $II_1$ . On note

$$P_0 \subset P_1 \overset{e_1}{\subset} P_2 \overset{e_2}{\subset} P_3 \subset \dots P_n \overset{e_n}{\subset} P_{n+1} \dots$$

la tour de Jones obtenue par construction de base [G.H.J. 3] et  $tr$  la trace normale finie normalisée sur les facteurs considérés.

4.1.1. D. Nikshych et L. Vainerman ont montré qu'une inclusion de profondeur finie peut être vue comme intermédiaire d'une inclusion de profondeur 2.

**Proposition** (NV 2 - 4.1). *Soit  $P_0 \subset P_1$  une inclusion d'indice fini et de profondeur finie  $p$  de facteurs de type  $II_1$ . Si l'entier  $m$  est supérieur ou égal à  $p-1$  alors l'inclusion  $P_0 \subset P_m$  est de profondeur 2.*

4.1.2. On suppose donc que l'inclusion  $P_0 \subset P_m$  est de profondeur 2 (4.1.1). Pour cette inclusion, on prend les notations suivantes :

$$N_0 = P_0 \subset N_1 = P_m \overset{f_1}{\subset} N_2 = P_{2m} \overset{f_2}{\subset} N_3 = P_{3m}$$

D'après [PP2], les projecteurs  $f_j$  s'expriment en fonction des projecteurs  $e_i$ , on a par exemple :

$$f_1 = \delta^{-m(m-1)/2} (e_m e_{m-1} \dots e_1) (e_{m+1} e_m \dots e_2) (e_{2m-1} e_{2m-2} \dots e_m).$$

L'anti-automorphisme  $j_n$  est l'anti-automorphisme de  $P'_0 \cap P_{2n}$  défini en posant :

$$j_n(x) = J_n x^* J_n \quad (x \in P'_0 \cap P_{2n}).$$

où  $J_n$  l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de l'espace standard  $L^2(P_n, tr)$  de  $P_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) (voir 3.1.1).

Les commutants relatifs  $A = N'_0 \cap N_2$  et  $B = N'_1 \cap N_3$  sont donc munis de structures de C\*-groupeïde quantique duales.

**4.2. Facteur intermédiaire et \*-sous-algèbre co-idéale.** D'après le théorème 4.3 de [NV 2], le commutant relatif  $P'_m \cap P_{2m+1}$  est une \*-sous-algèbre co-idéale de  $B$  et  $P_{2m+1}$  est isomorphe au produit croisé de  $P_{2m}$  par ce co-idéal. Précisons la structure de  $P'_m \cap P_{2m+1}$ , son action sur  $P_{2m}$  et les points fixes de  $P_{2m}$  sous cette action.

4.2.1. Nous gardons les notations de 3.5.1 pour la proposition suivante.

**Proposition.** *Le co-produit d'un élément  $y$  du co-idéal à gauche  $P'_m \cap P_{2m+1}$  est donné par :*

$$\Delta_B(y) = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} E_A(y\alpha_r \mu_l^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes \mu_l$$

où  $\{\mu_l, l \in L\}$  est une famille d'unités matricielles normalisées de  $P'_m \cap P_{2m+1}$ .

Les restrictions à  $P'_m \cap P_{2m+1}$  de la co-unité et de la co-unité but de  $B$  vérifient pour tout élément  $y$  de  $P'_m \cap P_{2m+1}$  :

$$\varepsilon_B(y) = \delta^{-1} \text{tr}(y h e_{2m} h) \quad \varepsilon_B^t(y) = \delta^{-1} E_{N_2}(y h e_{2m} h^{-1})$$

La restriction à  $P'_m \cap P_{2m+1}$  de l'action de  $B$  sur  $P_{2m}$  est donnée par

$$y \triangleright x = \delta^{-1} E_{N_2}(y x h e_{2m} h^{-1}) \quad (y \in P'_m \cap P_{2m+1}, x \in P_{2m})$$

Si l'on appelle algèbre des points fixes de  $P_{2m}$  sous l'action du co-idéal  $P'_m \cap P_{2m+1}$ , l'algèbre  $P_{2m}^f$  définie par :

$$P_{2m}^f = \{x \in P_{2m}, y \triangleright x = \varepsilon_B^t(y) \triangleright x, \forall y \in P'_m \cap P_{2m+1}\}$$

alors  $P_{2m}^f$  est l'image de  $P_{2m-1}$  par l'automorphisme intérieur  $\text{Ad}(h)$ .

*Démonstration.*

Pour le co-produit, on écrit la deuxième formule :

$$\Delta_B(y) = \sum_{p \in P} \sum_{r \in R} E_A(y\alpha_r b_p^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_p$$

Comme  $y\alpha_r$  est un élément de  $P'_0 \cap P_{2m+1}$ , on a :

$$E_A(y\alpha_r b_p^*) = E_A(y\alpha_r E_{P_{2m+1}}(b_p^*))$$

Soit  $\{\mu_l, l \in L\}$  une famille d'unités matricielles normalisées de  $P'_m \cap P_{2m+1}$ . En décomposant  $E_{P_{2m+1}}(b_p^*)$  sur cette base, on obtient la formule annoncée.

Les formules pour la co-unité, la co-unité but et l'action résultent de leurs définitions et du lemme suivant :

**Lemme.**  $E_{P_{2m+1}}(f_2)$  vaut  $\delta^{m-1} e_{2m}$ .

*Démonstration.*

Comme  $f_2$  est le projecteur de Jones de l'inclusion  $P_m \subset P_{2m}$  qui est d'indice  $\delta^{-m}$ , on sait que  $E_{P_{2m}}(f_2)$  est le scalaire  $\delta^m$ . D'autre part, d'après [PP2], on a l'égalité :  $f_2 = f_2 e_{2m}$ . On en déduit, pour tout  $x$  de  $P_{2m+1}$  :

$$\text{tr}(E_{P_{2m+1}}(f_2)x) = \text{tr}(f_2 x) = \text{tr}(f_2 e_{2m} x) = \delta^{-1} \text{tr}(f_2 e_{2m} E_{P_{2m}}(e_{2m} x)) = \delta^{m-1} \text{tr}(e_{2m} x)$$

La formule annoncée en résulte. □

La démonstration du troisième point est analogue à celle de 3.8.2. □

4.2.2. De cette proposition et du théorème 4.3 de [NV 2], on déduit le corollaire :

**Corollaire.** *La tour  $P_1 \subset P_2 \subset P_3$  est isomorphe à la tour*

$$h P_{2m-1} h^{-1} \subset P_{2m} \subset P_{2m} \times (P'_m \cap P_{2m+1}).$$

*Si  $m$  est impair, la tour  $P_0 \subset P_1 \subset P_2$  est isomorphe à la tour*

$$j_m(h) P_{m-1} j_m(h^{-1}) \subset P_m \subset P_m \times (P'_0 \cap P_{m+1}).$$

La deuxième assertion résulte de la symétrie de la construction.

4.2.3. *Calcul de  $\Delta_B(e_{2m})$ .*

**Corollaire.** *Si  $\{\mu_l, l \in L\}$  est une famille d'unités matricielles normalisées de  $P'_m \cap P_{2m+1}$ , on a la formule :*

$$\Delta_B(e_{2m}) = \delta \sum_{l \in L} j_{2m}(h^{-1}\mu_l^*) \otimes h^{-1}\mu_l$$

*Démonstration.*

De la proposition et du lemme 4.2.1, on déduit :

$$\Delta_B(e_{2m}) = \delta^{-(m-1)} \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} E_A(f_2 \alpha_r \mu_l^*) f_2 \alpha_r^* j_{2m}(h^{-1}) \otimes h^{-1}\mu_l$$

Et la formule 3.2.1 de [Da] permet d'écrire l'égalité annoncée.  $\square$

4.3. **Autodualité.** Pour la fin de cette partie, nous choisissons  $m$  pair ( $m = 2k$ ) et nous adoptons les notations suivantes :  $M_q$  est le facteur  $P_{qk}$  et  $N_q$  le facteur  $M_{2q}$  pour tout entier  $q$ . L'inclusion  $N_0 \subset N_1$  est donc de profondeur 2 et son indice est  $\tau^{-1} = [M_1 : M_0]^2$ . Les projecteurs de Jones sont indiqués sur les tours :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & e_1 & & e_2 & & e_3 & & e_4 & & e_5 & & \\ M_0 \subset & M_1 \subset & M_2 \subset & M_3 \subset & M_4 \subset & M_5 \subset & M_6 & & & & & & \\ & & & & f_1 & & f_2 & & & & & & \\ N_0 & \subset & N_1 & \subset & N_2 & \subset & N_3 & & & & & & \end{array}$$

Ici l'anti-automorphisme  $j_q$  est l'anti-automorphisme de  $M'_0 \cap M_{2q}$  défini à partir de l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de l'espace standard  $L^2(M_q, tr)$ . Dans les diverses formules de la partie 3, il faut donc remplacer  $j_2$  par  $j_4$  et  $j_1$  par  $j_2$ .

Les algèbres  $A = N'_0 \cap N_2$  et  $B = N'_1 \cap N_3$  sont munies de structures de C\*-groupeïde quantique que nous allons comparer. Quand on choisit  $m$  pair, on bénéficie de l'existence de l'isomorphisme  $\gamma = j_4 j_3 = j_3 j_2$  qui envoie l'algèbre involutive  $(A, j_2)$  sur  $(B, j_4)$  (3.1.2). L'isomorphisme  $\gamma$  décale de 2 les indices de la tour des  $M_n$  mais de 1 ceux de la tour des  $N_q$ . De plus comme l'anti-isomorphisme  $j_3$  de  $N'_0 \cap N_3$  conserve la trace et échange les algèbres  $A$  et  $B$ , il conserve aussi l'indice  $H$  de la restriction à  $N'_1 \cap N_2$  de la trace  $tr$ , on a donc :

$$\gamma(j_2(h)) = h \quad \text{et} \quad \gamma(h) = j_4(h).$$

Ces remarques et la symétrie des structures de C\*-groupeïde quantique permettent d'affirmer que  $\gamma$  est un isomorphisme du C\*-groupeïde quantique  $A$  sur le C\*-groupeïde quantique  $B$ .

**Théorème.** *Soit  $P_0 \subset P_1$  une inclusion d'indice fini et de profondeur finie de facteurs de type  $\text{II}_1$  telle que  $P_0 \subset P_{2k}$  soit de profondeur 2. Alors les C\*-groupeïdes quantiques  $P'_0 \cap P_{4k}$  et  $P'_{2k} \cap P_{6k}$  sont isomorphes, ils sont donc autoduaux.*

## 5. STRUCTURE DE C\*-GROUPOÏDE QUANTIQUE SUR LES ALGÈBRES DE TEMPERLEY-LIEB

Comme dans [NV 3 - 2.7], nous précisons la structure de C\*-groupeïde quantique sur les algèbres de Temperley-Lieb dans le cas non générique. Ces algèbres sont apparues dès le début de l'étude des inclusions ([J]). Ce sont les commutants relatifs des facteurs de Jones dans le facteur hyperfini.

### 5.1. Facteurs de Jones et algèbres de Temperley-Lieb. [GHJ - 2.1, 4.7b,II.7].

Soient  $l$  un entier supérieur à 2 et  $(e'_i)_{i \geq 0}$  une suite de projecteurs satisfaisant les relations suivantes :

$$e'_i e'_{i \pm 1} e'_i = \delta e'_i \quad \text{et} \quad e'_i e'_j = e'_j e'_i \quad \text{pour } |i - j| \geq 2$$

avec  $\delta = (4 \cos^2 \frac{\pi}{l+1})^{-1}$ . Le facteur  $P_1$  engendré par les projecteurs  $(e'_i)_{i \geq 0}$  est le facteur hyperfini de type  $\text{II}_1$  et le sous-facteur  $P_0$  de  $P_1$  engendré par les projecteurs  $(e'_i)_{i \geq 1}$  est le sous-facteur de Jones d'indice  $\delta^{-1}$ . On note  $tr$  la trace normalisée de  $P_1$ . Le graphe principal de l'inclusion  $P_0 \subset P_1$  est le graphe linéaire  $A_l$  à  $l$  sommets (voir [GHJ - 1.4.3], [J - 4,5]), de même pour l'inclusion  $P_1 \subset P_2$  qui lui est isomorphe. La profondeur de ces inclusions est donc  $l - 1$ . Les commutants relatifs sont des algèbres de Temperley-Lieb de paramètre non-générique  $\delta^{-1}$  :

$$P'_q \cap P_n = (1, e_{q+1}, e_{q+2} \dots e_{n-2}, e_{n-1})''$$

D'après [NV 2 - 4.1] (voir 4.1.1), pour  $m = l-2$ , l'inclusion  $P_0 \subset P_m$  est de profondeur 2, de plus elle est isomorphe à l'inclusion  $P_m \subset P_{2m}$ . L'algèbre de Temperley-Lieb  $A = P'_0 \cap P_{2m} = (1, e_1, e_2, \dots, e_{2m-1})''$  est donc munie d'une structure de  $C^*$ -groupoïde quantique autodual qu'on va préciser.

### 5.2. Structure de $C^*$ -groupoïde quantique des algèbres de Temperley-Lieb.

**Proposition.** *Le co-produit de  $A$  est donné par :*

$$\begin{aligned} \Delta_A(1) &= \sum_k \frac{1}{\nu_{j_k}} j_m(\lambda_k^*) \otimes \lambda_k \\ \Delta_A(e_p) &= \Delta_A(1)(e_p \otimes 1) = (e_p \otimes 1)\Delta_A(1) && (1 \leq p \leq m-1) \\ \Delta_A(e_q) &= \Delta_A(1)(1 \otimes e_q) = (1 \otimes e_q)\Delta_A(1) && (m+1 \leq q \leq 2m-1) \\ \Delta_A(e_m) &= \delta \sum_{l \in L} j_m(j_m(h^{-1})\mu_l^*) \otimes j_m(h^{-1})\mu_l. \end{aligned}$$

où  $\{\lambda_k, k \in K\}$  est une famille d'unités matricielles de  $P'_0 \cap P_m$  ( $\nu_{j_k}$  est la dimension du facteur de  $P'_0 \cap P_m$  auquel appartient  $\lambda_k$ ),  $\{\mu_l, l \in L\}$  une famille d'unités matricielles normalisées de  $P'_0 \cap P_{m+1}$  et  $h$  la racine carrée de l'indice de la restriction à  $P'_m \cap P_{2m}$  de  $tr$ .

La co-unité de  $A$  est donnée par :

$$\varepsilon_A(x) = \delta^{-m} tr(h f_1 h x) \quad (x \in A)$$

où  $f_1$  est le projecteur de Jones de l'inclusion  $P_0 \subset P_m$  :

$$f_1 = \delta^{-m(m-1)/2} (e_m e_{m-1} \dots e_1) (e_{m+1} e_m \dots e_2) (e_{2m-1} e_{2m-2} \dots e_m).$$

L'antipode de  $A$  est donnée par :

$$\begin{aligned} S_A(e_p) &= e_{2m-p} \quad (1 \leq p \leq 2m-1, p \neq m) \\ S_A(e_m) &= j_m(h) h^{-1} e_m j_m(h^{-1}) h \end{aligned}$$

*Démonstration.*

Le co-produit est un homomorphisme d'algèbres, il suffit donc de le connaître sur les générateurs  $1, e_1, \dots, e_{2m-1}$  de  $A$ . L'expression de  $\Delta(1)$  résulte de 3.5.3. Tous les projecteurs sauf  $e_m$  sont soit dans  $N'_0 \cap N_1$  soit dans  $N'_1 \cap N_2$ , leur co-produit est calculé grâce à 3.5.2 et 3.5.3.

L'expression de  $\Delta(e_m)$  est donnée par le corollaire 4.2.3 grâce à la symétrie de la construction.

La formule de la co-unité découle de 3.5.5 et de [PiPo 2].

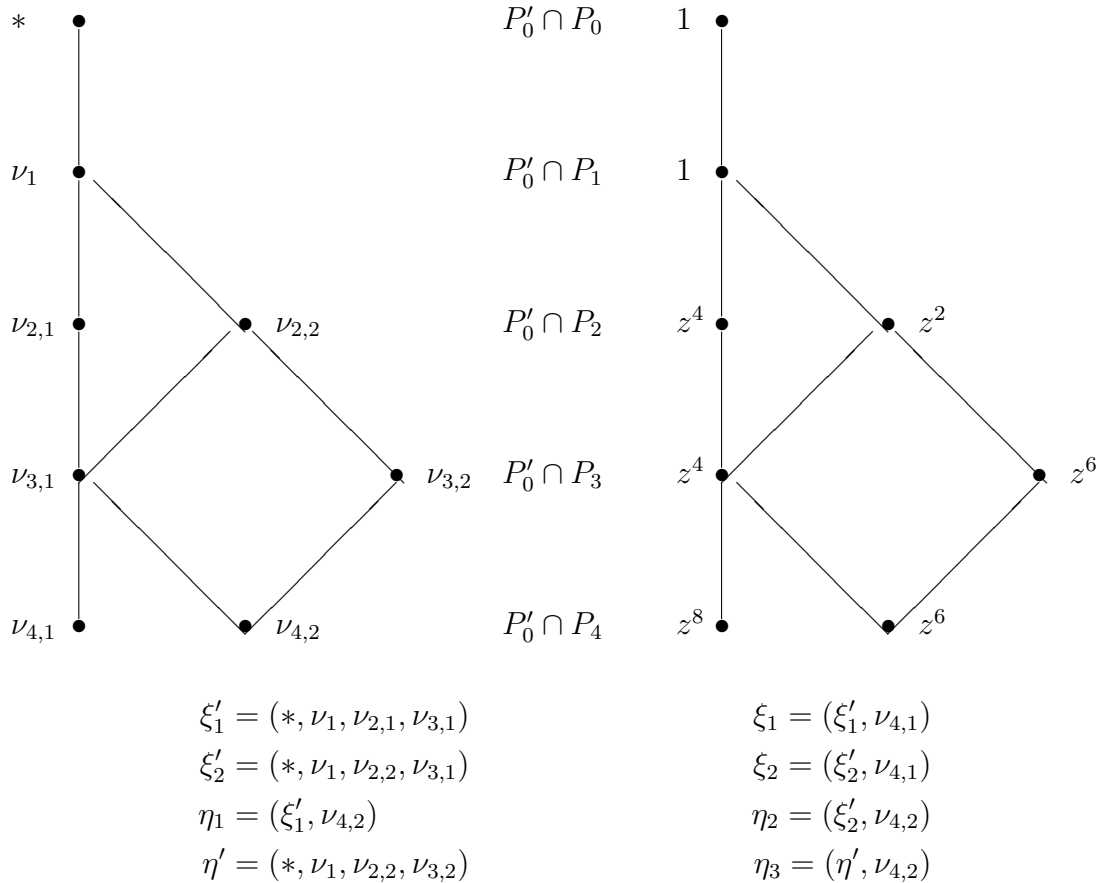
L'antipode est un anti-automorphisme d'algèbres conservant l'unité, il suffit donc de la connaître sur les projecteurs de Jones. D'après [Da-2.2.1], on sait que, pour  $p = 1 \dots 2m - 1$ ,  $j_m(e_p)$  est le projecteur  $e_{2m-p}$ ; les formules résultent alors des propriétés de commutation de  $h$ .  $\square$

**5.3. C\*-groupeïde quantique de dimension 13 associé au facteur de Jones de graphe  $A_4$ .** Dans cette partie, on suppose que  $l$  vaut 4, l'inclusion  $P_0 \subset P_1$  est alors d'indice  $\delta^{-1} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{5}$ , de graphe principal  $A_4$  et l'inclusion  $P_0 \subset P_2$  est de profondeur 2. La C\*-algèbre  $A_\delta = P'_0 \cap P_4$  est un C\*-groupeïde quantique autodual; nous le décrivons et montrons qu'il est isomorphe à celui, que nous nommerons  $G$ , décrit par G. Böhm et K. Szlachanyi dans [BSz - 5]. Dans [NV1], D. Nikshych et L. Vainerman munissent cette même algèbre d'une structure de groupeïde quantique pour laquelle l'involution est modifiée mais on peut montrer par les méthodes employées ici qu'elle est isomorphe aux deux autres.

Pour simplifier les calculs, nous utilisons le paramètre  $z = \sqrt[4]{\delta}$  introduit dans [BSz - 5] et qui vérifie les relations suivantes et bien d'autres encore :

$$\begin{aligned} 1 - 3\delta + \delta^2 &= 0 & z^4 + z^2 - 1 &= 0 & 1 + z^2 &= z^{-2} \\ z^2 &= 1 - \delta = \frac{\delta}{1 - \delta} & z^3 &= \sqrt{\delta(1 - \delta)} \end{aligned}$$

5.3.1. *Algèbre des chemins de  $A_\delta$ .* Comme dans [GHJ 2.3.11], nous représentons l'algèbre  $A_\delta$  comme algèbre des chemins du graphe  $A_4$  avec les notations suivantes pour les sommets du graphe et les chemins; la trace des projecteurs minimaux des algèbres correspondant aux sommets du graphe est donnée sur le graphe de gauche (d'après [J 5.2]) :



L'algèbre  $A_\delta$  est somme directe de l'algèbre  $C = \text{Vect} \{c_{i,j}, (i,j) \in \{1,2\}^2\}$  et l'algèbre  $D = \text{Vect} \{d_{h,k}, (h,k) \in \{1,2,3\}^2\}$  avec  $c_{i,j} = T_{\xi_i, \xi_j}$  et  $d_{h,k} = T_{\eta_h, \eta_k}$ .

L'algèbre  $P'_0 \cap P_3$  est somme directe de  $\text{Vect} \{b_{i,j}, (i,j) \in \{1,2\}^2\}$  et  $\mathbb{C}b_5$  avec  $b_{i,j} = T_{\xi'_i, \xi'_j} = c_{i,j} + d_{i,j}$  et  $b_5 = T_{\eta', \eta'} = d_{3,3}$ .

5.3.2. *Projecteurs de Jones.* L'algèbre  $A_\delta$  est engendrée, en tant qu'algèbre, par l'unité et les projecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$ . La formule [GHJ 2.6.5.4] nous fournit l'expression de ces projecteurs dans la base d'unités matricielles de l'algèbre des chemins.

D'après [GHJ 2.6.5.4], on a donc :

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 &= \begin{pmatrix} z^4 & z^3 \\ z^3 & z^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^4 & z^3 & 0 \\ z^3 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & z^3 \\ 0 & z^3 & z^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans ce cas, d'après 3.2 et 3.1.1, on a :

$$h = z^{-2}e_3 + z^{-1}(1 - e_3) \quad j_2(h) = z^{-2}e_1 + z^{-1}(1 - e_1).$$

5.3.3. *Expression des unités matricielles en fonction des projecteurs de Jones.* On vérifie facilement par le calcul les expressions suivantes pour les unités matricielles de  $A_\delta$  :

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= e_1 e_3 \\ c_{1,2} &= z^{-3} e_3 e_1 (e_2 - \delta) \\ d_{1,1} &= e_1 (1 - e_3) \\ d_{1,2} &= z^{-3} (1 - e_3) e_1 (e_2 - \delta) \\ d_{1,3} &= z^{-6} e_1 (1 - e_3) (e_2 - \delta) (e_3 - z^2) \end{aligned}$$

Et on obtient les autres expressions grâce aux relations entre les unités matricielles.

5.3.4. *Nouvelles unités matricielles.* Nous définissons maintenant des nouvelles unités matricielles sur  $D$  qui vont permettre d'obtenir des formules plus simples pour le co-produit et l'antipode et d'identifier  $A_\delta$  et le  $C^*$ -groupoïde quantique que nous appellerons  $G$  décrit en [BSz 5].

**Proposition.**  $(D, *)$  admet  $\{e_{i,j}, i, j = 1, 2, 3\}$  comme unités matricielles avec :

$$\begin{aligned} e_{1,2} &= z^2 d_{1,2} - z d_{1,3} = z^{-3} e_1 (1 - e_3) (e_2 - \delta) (1 - e_3) \\ e_{1,3} &= z d_{1,2} + z^2 d_{1,3} = \delta^{-1} e_1 (1 - e_3) (e_2 - \delta) e_3 \end{aligned}$$

On a alors en particulier :

$$\begin{aligned} e_1 &= c_{1,1} + e_{1,1} \\ e_3 &= c_{1,1} + e_{3,3} \\ e_2 &= z^4 c_{1,1} + z^3 c_{1,2} + z^3 c_{2,1} + z^2 c_{2,2} + z^4 e_{1,1} + z^5 e_{1,2} + z^4 e_{1,3} \\ &\quad + z^5 e_{2,1} + z^6 e_{2,2} + z^5 e_{2,3} + z^4 e_{3,1} + z^5 e_{3,2} + z^4 e_{3,3} \end{aligned}$$



Les calculs nécessaires à la vérification de cette proposition et des suivantes se font facilement à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

### 5.3.5. Expression du co-produit.

**Proposition** (BSz 5). *Si  $\{e_{i,j}^0, i, j = 1, 2\}$  (resp.  $\{e_{i,j}^1, i, j = 1, 2, 3\}$ ) est une famille d'unités matricielles du facteur de dimension 4 (resp. 9) de  $G$ , le co-produit de  $G$  est donné par :*

$$\begin{aligned}
\Delta_G(e_{1,1}^0) &= e_{1,1}^0 \otimes e_{1,1}^0 + e_{1,1}^1 \otimes e_{3,3}^1 \\
\Delta_G(e_{1,2}^0) &= e_{1,2}^0 \otimes e_{1,2}^0 + z^2 e_{1,3}^1 \otimes e_{3,1}^1 + z e_{1,2}^1 \otimes e_{3,2}^1 \\
\Delta_G(e_{2,2}^0) &= e_{2,2}^0 \otimes e_{2,2}^0 + z^4 e_{3,3}^1 \otimes e_{1,1}^1 + z^3 e_{3,2}^1 \otimes e_{1,2}^1 + z^3 e_{2,3}^1 \otimes e_{2,1}^1 + z^2 e_{2,2}^1 \otimes e_{2,2}^1 \\
\Delta_G(e_{1,1}^1) &= e_{1,1}^0 \otimes e_{1,1}^1 + e_{1,1}^1 \otimes e_{2,2}^0 + e_{1,1}^1 \otimes e_{2,2}^1 \\
\Delta_G(e_{1,2}^1) &= e_{1,2}^0 \otimes e_{1,2}^1 + e_{1,2}^1 \otimes e_{2,2}^0 + z e_{1,3}^1 \otimes e_{2,1}^1 - z^2 e_{1,2}^1 \otimes e_{2,2}^1 \\
\Delta_G(e_{1,3}^1) &= e_{1,2}^0 \otimes e_{1,3}^1 + e_{1,3}^1 \otimes e_{2,1}^0 + e_{1,2}^1 \otimes e_{2,3}^1 \\
\Delta_G(e_{2,2}^1) &= e_{2,2}^0 \otimes e_{2,2}^1 + e_{2,2}^1 \otimes e_{2,2}^0 + z^4 e_{2,2}^1 \otimes e_{2,2}^1 \\
&\quad + z^2 e_{3,3}^1 \otimes e_{1,1}^1 - z^3 e_{3,2}^1 \otimes e_{1,2}^1 - z^3 e_{2,3}^1 \otimes e_{2,1}^1 \\
\Delta_G(e_{2,3}^1) &= e_{2,2}^0 \otimes e_{2,3}^1 + e_{2,3}^1 \otimes e_{2,1}^0 + z e_{3,2}^1 \otimes e_{1,3}^1 - z^2 e_{2,2}^1 \otimes e_{2,3}^1 \\
\Delta_G(e_{3,3}^1) &= e_{2,2}^0 \otimes e_{3,3}^1 + e_{2,2}^1 \otimes e_{3,3}^1 + e_{3,3}^1 \otimes e_{1,1}^0
\end{aligned}$$

Dans la proposition suivante, nous donnons deux séries de formules pour le coproduit  $\Delta_A$ , l'une en fonction des nouvelles unités matricielles permet de le comparer avec  $\Delta_G$ , l'autre en fonction des projecteurs de Jones permet de le comparer avec celui de [NV1 - 7.3].

**Proposition.** *Le co-produit  $\Delta_A$  de  $A_\delta$  est l'homomorphisme d'algèbres déterminé par les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
\Delta_A(1) &= c_{1,1} \otimes c_{1,1} + c_{1,1} \otimes e_{1,1} + c_{2,2} \otimes c_{2,2} + c_{2,2} \otimes e_{2,2} + c_{2,2} \otimes e_{3,3} \\
&\quad + e_{1,1} \otimes c_{2,2} + e_{1,1} \otimes e_{2,2} + e_{1,1} \otimes e_{3,3} + e_{2,2} \otimes c_{2,2} + e_{2,2} \otimes e_{2,2} \\
&\quad + e_{2,2} \otimes e_{3,3} + e_{3,3} \otimes c_{1,1} + e_{3,3} \otimes e_{1,1} \\
\Delta_A(e_1) &= c_{1,1} \otimes c_{1,1} + c_{1,1} \otimes e_{1,1} + e_{1,1} \otimes c_{2,2} + e_{1,1} \otimes e_{2,2} + e_{1,1} \otimes e_{3,3} \\
\Delta_A(e_3) &= c_{1,1} \otimes c_{1,1} + c_{2,2} \otimes e_{3,3} + e_{1,1} \otimes e_{3,3} + e_{2,2} \otimes e_{3,3} + e_{3,3} \otimes c_{1,1} \\
\Delta_A(e_2) &= z^4 c_{1,1} \otimes c_{1,1} + z^4 c_{1,1} \otimes e_{1,1} \\
&\quad + z^3 c_{1,2} \otimes c_{1,2} + z^5 c_{1,2} \otimes e_{1,2} + z^4 c_{1,2} \otimes e_{1,3} \\
&\quad + z^3 c_{2,1} \otimes c_{2,1} + z^5 c_{2,1} \otimes e_{2,1} + z^4 c_{2,1} \otimes e_{3,1} \\
&\quad + z^2 c_{2,2} \otimes c_{2,2} + z^6 c_{2,2} \otimes e_{2,2} + z^5 c_{2,2} \otimes e_{2,3} + z^5 c_{2,2} \otimes e_{3,2} + z^4 c_{2,2} \otimes e_{3,3} \\
&\quad + z^4 e_{1,1} \otimes c_{2,2} + z^4 e_{1,1} \otimes e_{2,2} + z^4 e_{1,1} \otimes e_{3,3} \\
&\quad + z^5 e_{1,2} \otimes c_{2,2} - z^7 e_{1,2} \otimes e_{2,2} + z^4 e_{1,2} \otimes e_{2,3} + z^4 e_{1,2} \otimes e_{3,2} \\
&\quad + z^4 e_{1,3} \otimes c_{2,1} + z^6 e_{1,3} \otimes e_{2,1} + z^5 e_{1,3} \otimes e_{3,1} \\
&\quad + z^5 e_{2,1} \otimes c_{2,2} - z^7 e_{2,1} \otimes e_{2,2} + z^4 e_{2,1} \otimes e_{2,3} + z^4 e_{2,1} \otimes e_{3,2} \\
&\quad + z^6 e_{2,2} \otimes c_{2,2} + 2z^6 e_{2,2} \otimes e_{2,2} - z^7 e_{2,2} \otimes e_{2,3} - z^7 e_{2,2} \otimes e_{3,2} + z^4 e_{2,2} \otimes e_{3,3} \\
&\quad + z^5 e_{2,3} \otimes c_{2,1} + z^7 e_{2,3} \otimes e_{2,1} + z^6 e_{2,3} \otimes e_{3,1} \\
&\quad + z^4 e_{3,1} \otimes c_{1,2} + z^6 e_{3,1} \otimes e_{1,2} + z^5 e_{3,1} \otimes e_{1,3} \\
&\quad + z^5 e_{3,2} \otimes c_{1,2} + z^7 e_{3,2} \otimes e_{1,2} + z^6 e_{3,2} \otimes e_{1,3} \\
&\quad + z^4 e_{3,3} \otimes c_{1,1} + z^4 e_{3,3} \otimes e_{1,1}
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\Delta_A(1) &= e_3 \otimes e_1 + (1 - e_3) \otimes (1 - e_1) \\
\Delta_A(e_1) &= e_1 e_3 \otimes e_1 + e_1(1 - e_3) \otimes (1 - e_1) \\
\Delta_A(e_3) &= e_3 \otimes e_1 e_3 + (1 - e_3) \otimes (1 - e_1) e_3 \\
\Delta_A(e_2) &= \left(1 - \frac{(e_3 - e_2)^2}{(1 - \delta)}\right) \otimes \left(1 - \frac{(e_1 - e_2)^2}{(1 - \delta)}\right) + \delta e_3 \otimes e_1 \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\delta(1 - \delta)}} e_3(e_2 - \delta) \otimes e_1(e_2 - \delta) + \frac{1}{\sqrt{\delta(1 - \delta)}} (e_2 - \delta) e_3 \otimes (e_2 - \delta) e_1 \\
&\quad + (1 - \delta) \left(\frac{(e_3 - e_2)^2}{(1 - \delta)} - e_3\right) \otimes \left(\frac{(e_1 - e_2)^2}{(1 - \delta)} - e_1\right)
\end{aligned}$$

*Démonstration.*

Comme l'algèbre  $P'_0 \cap P_2$  égale  $\mathbb{C}e_1 \otimes \mathbb{C}(1 - e_1)$ , on a :

$$\Delta_A(1) = e_3 \otimes e_1 + (1 - e_3) \otimes (1 - e_1).$$

En utilisant les expressions des projecteurs de Jones en fonction des unités matricielles, on obtient :

$$\Delta_A(1) = (c_{1,1} + e_{3,3}) \otimes (c_{1,1} + e_{1,1}) + (c_{2,2} + e_{1,1} + e_{2,2}) \otimes (c_{2,2} + e_{2,2} + e_{3,3}).$$

De même, les autres formules sont la traduction à l'aide des unités matricielles des égalités (5.2) :

$$\Delta_A(e_1) = (e_1 \otimes 1)\Delta_A(1) \quad \Delta_A(e_3) = \Delta_A(1)(1 \otimes e_3).$$

Le calcul de  $\Delta_A(e_2)$  demande un peu plus de travail : D'après 5.3.1 et 5.3.3, les unités matricielles normalisées de  $P'_0 \cap P_3$  sont :

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= z^{-2}e_1 & \mu_2 &= z^{-2}(c_{1,2} + d_{1,2}) & \mu_3 &= z^{-2}(c_{2,1} + d_{2,1}) \\
\mu_4 &= z^{-2}(c_{2,2} + d_{2,2}) & \mu_5 &= z^{-3}d_{3,3}
\end{aligned}$$

Comme  $j_2(h^{-1})$  vaut  $z^2e_1 + z(1 - e_1)$ , la formule 5.2 s'écrit ici :

$$\begin{aligned}
\Delta_A(e_2) &= \delta(j_2(z^2\mu_1) \otimes z^2\mu_1 + j_2(z\mu_3) \otimes z^2\mu_2 + j_2(z^2\mu_2) \otimes z\mu_3 \\
&\quad + j_2(z\mu_4) \otimes z\mu_4 + j_2(z\mu_5) \otimes z\mu_5) \\
&= j_2(z^2e_1) \otimes z^2e_1 + j_2(zb_{2,1}) \otimes z^2b_{1,2} + j_2(z^2b_{1,2}) \otimes zb_{2,1} \\
&\quad + j_2(zb_{2,2}) \otimes zb_{2,2} + j_2(d_{3,3}) \otimes d_{3,3}
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
b_{1,2} &= z^{-3}e_1(e_2 - \delta) \\
b_{2,2} &= z^{-6}(e_2 - \delta)e_1(e_2 - \delta) = z^{-2}[(e_2 - e_1)^2 - (1 - \delta)e_1] \\
d_{3,3} &= z^{-12}(e_3 - z^2)(e_2 - \delta)(1 - e_3)e_1(e_2 - \delta)(e_3 - z^2) = 1 - \frac{(e_1 - e_2)^2}{(1 - \delta)}
\end{aligned}$$

Ces expressions des unités matricielles en fonction des projecteurs de Jones permettent de préciser les valeurs prises par  $j_2$  puis on exprime le résultat en fonction des nouvelles unités matricielles et on obtient les formules annoncées.  $\square$

**Corollaire.** *Le co-produit de  $A_\delta$  coïncide avec celui de  $G$ .*

*Démonstration.*

Comme le projecteur  $e_3$  est l'image de  $e_1$  par l'antipode qui est un anti-automorphisme de co-algèbre (on verra plus loin que les antipodes coïncident), il suffit pour comparer  $\Delta_A$  et le co-produit  $\Delta_G$  de  $G$  de considérer leurs valeurs en  $1$ ,  $e_1$  et  $e_2$ . On vérifie par le calcul qu'elles coïncident.  $\square$

5.3.6. *Expression de la co-unité.* Comme  $f_1$  coïncide avec  $e_2$  dans  $C$  et est nul dans  $D$ , la co-unité  $\varepsilon_A$  est nulle sur  $D$  et comme elle est linéaire et compatible avec l'involution, il suffit de la connaître sur  $c_{1,1}$  et  $c_{1,2}$ . Comme la trace des projecteurs minimaux de  $C$  est  $\delta^2$ , si on note  $Tr_0$  la trace de  $C$  qui vaut 1 sur les projecteurs minimaux, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon_A(c_{1,2}) &= Tr_0(hf_1hc_{1,2}) = 1 \\ \varepsilon_A(c_{1,1}) &= Tr_0(f_1hc_{1,1}) = 1\end{aligned}$$

La co-unité de  $A$  coïncide avec celle de  $G$ .

5.3.7. *Expression de l'antipode.*

**Proposition.** *L'antipode de  $A_\delta$  est entièrement déterminée par les formules suivantes ; elle coïncide avec l'antipode de  $G$ .*

$$\begin{aligned}S_A(c_{1,2}) &= c_{2,1} & S_A(c_{2,1}) &= c_{1,2} \\ S_A(e_{1,2}) &= z^{-1}e_{2,3} & S_A(e_{2,1}) &= ze_{3,2} \\ S_A(e_{1,3}) &= z^{-2}e_{1,3} & S_A(e_{3,1}) &= z^2e_{3,1}\end{aligned}$$

*Démonstration.*

Ces formules résultent des expressions des nouvelles unités matricielles en fonction des projecteurs de Jones (5.3.4) et de 3.1.1 (c). Elles suffisent pour connaître  $S_A$  qui est un anti-automorphisme d'algèbre.  $\square$

## 6. ACTION D'UN GROUPOÏDE QUANTIQUE FINI SUR UN FACTEUR

Dans cette partie, nous considérons  $(A, m_a, 1_a, \Delta_a, \varepsilon_a, S_a, \phi_a, p_a)$  et  $(B, m_b, 1_b, \Delta_b, \varepsilon_b, S_b, \phi_b, p_b)$  deux groupoïdes quantiques finis en dualité (notée  $\langle a, b \rangle$ ). Le but de cette partie est de construire une inclusion  $N \subset M$  de facteurs (que nous obtiendrons hyperfinis de type  $II_1$ ) telle que  $M$  soit le produit croisé  $N \rtimes A$ . Nous généralisons ainsi les résultats de [N] qui concernaient les algèbres de Kac faibles.

6.1. **Hypothèse et remarque importante.** Les résultats de [NSzW] rappelés en 2.7 et ceux de la partie 3 conduisent imposer l'hypothèse :  $A$  et  $B$  sont connexes (voir 2.7.3). Par contre, même si les antipodes sont involutives sur les algèbres de Cartan des groupoïdes quantiques construits à partir d'une inclusion de profondeur 2, cette hypothèse semble inutile à la construction de l'inclusion sur laquelle agissent  $A$  et  $B$ . Ce qui laisse penser que la structure obtenue dans la partie 3 à partir de l'inclusion construite n'est pas nécessairement la structure originelle.

6.2. **Produit croisé des groupoïdes en dualité : L'algèbre  $A.B$ .** Les produits croisés  $A \rtimes B$  et  $A \times B$  sont isomorphes en effet grâce à 2.5.3, l'identification, pour  $y$  dans  $A_s$ , de  $[ay \otimes b]$  et  $[a \otimes (1_b \triangleleft y)b]$  dans  $A \rtimes B$  correspond à celle, pour  $z$  dans  $B_t$ , de  $[a(z \triangleright 1_a) \otimes b]$  et  $[a \otimes zb]$  dans  $A \times B$ . On vérifie facilement que les lois sont compatibles et que les injections  $a \mapsto [a \otimes 1_b]$  et  $b \mapsto [1_a \otimes b]$  sont des homomorphismes d'algèbres qui permettent d'écrire  $A \rtimes B$  et  $A \times B$  comme  $A.B$ .

6.3. **Mesures de Haar et espérances conditionnelles.**

### 6.3.1. Mesure de Haar sur $A_s = B_t$ .

**Proposition.** *Les restrictions des mesures de Haar  $\phi_a$  et  $\phi_b$  coïncident sur les algèbres identifiées  $A_s$  et  $B_t$ .*

*Si les antipodes sont involutives sur les sous-algèbres de Cartan, la restriction des mesures de Haar à ces algèbres est leur trace canonique.*

*Démonstration.*

D'après 2.3, la restriction à  $A_s$  (resp.  $B_t$ ) de  $\phi_a$  (resp.  $\phi_b$ ) vaut  $\varepsilon_a$  (resp.  $\varepsilon_b$ ). Or, pour  $a$  dans  $A_s$ , on a :

$$\varepsilon_b(1_b \triangleleft a) = \langle 1_a, 1_{b(2)} \rangle \langle a, 1_{b(1)} \rangle = \langle a, 1_b \rangle = \varepsilon_a(a)$$

donc  $\phi_a$  et  $\phi_b$  coïncident sur les algèbres identifiées  $A_s$  et  $B_t$ .

D'après [BSz - 4.6], les restrictions des co-unités aux algèbres de Cartan sont liées aux traces canoniques de ces algèbres par une relation du type :

$$Tr_{A_t}(x) = \varepsilon_a(x1_{(2)})S(1_{(1)}) \quad (x \in A_t)$$

Si on suppose que  $S^2$  est l'identité sur  $A_t$  on peut écrire :

$$1_{(2)}S(1_{(1)}) = S(1_{(1)})S(1_{(2)}) = S(\varepsilon_a^t(1)) = 1$$

Ainsi si les antipodes sont involutives sur les sous-algèbres de Cartan, la restriction de  $\phi_a$  (ou  $\phi_b$ ) aux sous-algèbres de Cartan coïncide avec la trace canonique sur ces algèbres.  $\square$

### 6.3.2. Des espérances conditionnelles.

**Proposition.** *On pose pour  $a$  dans  $A$  :*

$$F_{A_t}(a) = (\text{id} \otimes \phi_a)\Delta_a(a) = p_b \triangleright a \quad \text{et} \quad F_{A_s}(a) = (\phi_a \otimes \text{id})\Delta_a(a) = a \triangleleft p_b$$

*Les applications  $F_{A_t}$  et  $F_{A_s}$  sont des espérances conditionnelles fidèles de  $A$  sur  $A_t$  (resp.  $A_s$ ). Elles conservent  $\phi_a$  et commutent.*

*On définit de même  $F_{B_t}$  et  $F_{B_s}$  avec des résultats analogues.*

*Démonstration.*

Les propriétés de  $\phi_a$  (2.3) et celles des éléments de  $A_t$  (2.5.4) permettent d'affirmer que pour tout  $a$  de  $A$ ,  $F_{A_t}(a)$  appartient à  $A_t$  et que l'égalité  $F_{A_t}(xay) = xF_{A_t}(a)y$  est vérifiée pour tous  $x$  et  $y$  dans  $A_t$  et  $a$  dans  $A$ . Comme  $\Delta$  est un homomorphisme d'algèbres involutives, on a  $F_{A_t}(x^*) = F_{A_t}(x)^*$ . L'identité  $\langle p_b \triangleright a, p_b \rangle = \langle a, p_b \rangle$  signifie que  $F_{A_t}$  conserve  $\phi_a$  alors  $F_{A_t}$  est fidèle puisque  $\phi_a$  est fidèle.

Grâce à la coassociativité du coproduit, on a :

$$F_{A_s}F_{A_t} = (\phi_a \otimes \text{id} \otimes \phi_a)(\Delta_a \otimes \text{id})\Delta_a = (\phi_a \otimes \text{id} \otimes \phi_a)(\text{id} \otimes \Delta_a)\Delta_a = F_{A_t}F_{A_s}$$

$\square$

### 6.3.3. Automorphisme modulaire de $\phi_a$ .

**Proposition** (BNSz - 4.12 et 4.14). *Les éléments  $g_s = F_{A_s}(p_a)^{1/2}$  et  $g_t = F_{A_t}(p_a)^{1/2}$  sont inversibles et l'automorphisme modulaire de  $\phi_a$  est implémenté par  $g_s g_t$  c'est-à-dire que  $\phi_a(g_s^{-1} g_t^{-1} \cdot)$  est une trace sur  $A$ . On posera de même*

$$\hat{g}_s = F_{B_s}(p_b)^{1/2} \quad \text{et} \quad \hat{g}_t = F_{B_t}(p_b)^{1/2}.$$

D'après [BNSz - 4.13], on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{g}_t &= 1_b \triangleleft g_s = 1_b \triangleleft g_t & g_t &= 1_a \triangleleft \hat{g}_s = 1_a \triangleleft \hat{g}_t \\ \hat{g}_s &= g_s \triangleright 1_b = g_t \triangleright 1_b & g_s &= \hat{g}_s \triangleright 1_a = \hat{g}_t \triangleright 1_a \\ S(g_t) &= g_s = S^{-1}(g_t) & S(\hat{g}_t) &= \hat{g}_s = S^{-1}(\hat{g}_t) \end{aligned}$$

Grâce à 2.4 et 2.3, on en déduit la relation suivante avec les projecteurs de Haar :

$$g_s p_a = \varepsilon_t(g_s) p_a = S(g_s) p_a = g_t p_a$$

et de même on montre :  $p_a g_s = p_a g_t$ .

D'après 6.3.2,  $F_{A_s}(g_t^{-1})$  appartient à  $A_s \cap A_t$ . Si  $A$  et  $B$  sont connexes,  $A_s \cap A_t$  est réduit aux scalaires et  $F_{A_s}(g_t^{-1})$  est un scalaire qui vaut  $d^{-1} \phi_a(g_t^{-1})$  avec  $d = \phi_a(1_a)$ .

Les mesures de Haar sont invariantes par les antipodes et coïncident sur les algèbres de Cartan donc on peut écrire les égalités suivantes

$$\phi_a(g_s^{-1}) = \phi_a(g_t^{-1}) = \phi_b(\hat{g}_s^{-1}) = \phi_b(\hat{g}_t^{-1})$$

et on notera  $\gamma$  ces scalaires. On en déduit :

$$F_{A_s}(g_t^{-1}) = F_{A_t}(g_s^{-1}) = F_{B_s}(\hat{g}_t^{-1}) = F_{B_t}(\hat{g}_s^{-1}) = d^{-1} \gamma$$

Si la restriction de  $S$  aux algèbres de Cartan est involutive alors la restriction de  $\phi_a$  à  $A_t$  est la trace canonique de  $A_t$  (voir 6.3.1) et  $d$  est la dimension commune des algèbres de Cartan.

#### 6.4. Trace sur $A.B$ .

##### 6.4.1. Traces sur $A$ et $B$ .

**Définition.** Pour  $a$  de  $A$ , on définit en posant :

$$tr_a(a) = d\gamma^{-2} \phi_a(g_s^{-1} g_t^{-1} a)$$

une trace normalisée  $tr_a$  sur  $A$ .

On définit de même  $tr_b$ .

6.4.2. *Espérances conditionnelles.* On notera  $E_{A_s}, E_{B_t}$  etc ... les espérances conditionnelles définies par les traces  $tr_a$  et  $tr_b$ . Elles sont reliées aux espérances définies par  $\phi_a$  et  $\phi_b$  par les formules :

$$\begin{aligned} E_{A_s}(a) &= d\gamma^{-1} F_{A_s}(a g_t^{-1}) & (a \in A) \\ E_{B_t}(b) &= d\gamma^{-1} F_{B_t}(\hat{g}_s^{-1} b) & (b \in B) \end{aligned}$$

6.4.3. *Lemme.* Pour tout  $b$  de  $B$  et tout  $y$  de  $B_s$ , on a :

- (i)  $b_{(1)} \otimes E_{B_t}(y b_{(2)}) = \Delta_b(E_{B_t}(y b))$
- (ii)  $b_{(1)}^* \otimes E_{B_t}(y b_{(2)}^*) = \Delta_b(E_{B_t}(y b^*))$
- (iii)  $S_b^{-1} E_{B_t}(b) \triangleright 1_a = E_{B_t}(b) \triangleright 1_a$

*Démonstration.*

La définition de  $E_{B_t}$  et les propriétés de  $g_s$  permettent d'obtenir facilement les propriétés de  $E_{B_t}$  à partir de celles de  $F_{B_t}$ .

(i) Comme  $\Delta_b(y)$  égale  $(1_b \otimes y) \Delta_b(1)$  on peut écrire :

$$\begin{aligned} b_{(1)} \otimes F_{B_t}(y b_{(2)}) &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \phi_b)(\text{id} \otimes \Delta_b) \Delta_b(y b) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \phi_b)(\Delta_b \otimes \text{id}) \Delta_b(y b) \\ &= \Delta_b(F_{B_t}(y b)) \end{aligned}$$

(ii) se démontre de même.

(iii) A l'aide de 2.3 et 2.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_b^{-1}F_{B_t}(b) \triangleright 1_a &= 1_{a(1)} \langle 1_{a(2)}, S_b^{-1}b_{(1)} \rangle \langle p_a, b_{(2)} \rangle &= 1_{a(1)} \langle S_a^{-1}(1_{a(2)}), b_{(1)} \rangle \langle p_a, b_{(2)} \rangle \\
&= 1_{a(1)} \langle S_a^{-1}(1_{a(2)})p_a, b \rangle &= 1_{a(1)} \langle p_a 1_{a(2)}, S_b^{-1}b \rangle \\
&= 1_{a(1)} \langle p_a \varepsilon_s(1_{a(2)}), S_b^{-1}b \rangle &= 1_{a(1)} \langle p_a \varepsilon_s \circ \varepsilon_t(1_{a(2)}), S_b^{-1}b \rangle \\
&= 1_{a(1)} \langle p_a S_a \circ \varepsilon_t(1_{a(2)}), S_b^{-1}b \rangle &= 1_{a(1)} \langle p_a S_a(1_{a(2)}), S_b^{-1}b \rangle \\
&= 1_{a(1)} \langle 1_{a(2)}p_a, b \rangle &= F_{B_t}(b) \triangleright 1_a
\end{aligned}$$

□

6.4.4. *D'autres espérances conditionnelles.* La proposition 4.2 de [N] se généralise ainsi :

**Proposition.**

(1) En posant pour tout  $[a \otimes b]$  dans  $A.B$ ,

$$E_A([a \otimes b]) = a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)$$

on définit une espérance conditionnelle fidèle de  $A.B$  dans  $A$ .

On définit de même l'espérance conditionnelle  $E_B$ .

(2) Le carré  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc}
& & E_A \\
A & \subset & A.B \\
\cup & & \cup E_B \\
A_s = B_t & \subset & B
\end{array}$$

est commutatif et symétrique (voir [JS - 5.3.6]). L'algèbre  $A \cap B$  est  $A_s = B_t$ .

*Démonstration.*

(1) Etudions les propriétés de  $E_A$  :

- Grâce à 2.5.3 la définition de  $E_A$  ne dépend pas du représentant de  $[a \otimes b]$ .
- Soient  $a$  et  $\alpha$  dans  $A$  et  $b$  dans  $B$ , comme  $[\alpha \otimes 1_b][a \otimes b]$  vaut  $[\alpha a \otimes b]$ , on a bien :

$$E_A([\alpha \otimes 1_b][a \otimes b]) = \alpha E_A([a \otimes b]).$$

Calculons maintenant  $E_A([a \otimes b][\alpha \otimes 1_b])$ .

$$E_A([a \otimes b][\alpha \otimes 1_b]) = a(b_{(1)} \triangleright \alpha)(E_{B_t}(b_{(2)}) \triangleright 1_a)$$

Grâce à 6.4.3(i) et à 2.5.4, on obtient :

$$E_A([a \otimes b][\alpha \otimes 1_b]) = a(E_{B_t}(b) \triangleright \alpha) = a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)\alpha = E_A([a \otimes b])\alpha$$

- Vérifions l'égalité  $E_A(x^*) = E_A(x)^*$ . Grâce à 6.4.3(ii), on peut écrire :

$$E_A([a \otimes b]^*) = E_A([b_{(1)}^* \triangleright a^* \otimes b_{(2)}^*]) = (b_{(1)}^* \triangleright a^*)(E_{B_t}(b_{(2)}^*) \triangleright 1_a) = E_{B_t}(b^*) \triangleright a^*$$

Comme  $S_b$  envoie  $B_t$  sur  $B_s$ , on obtient grâce à 2.5.4 :

$$E_A([a \otimes b]^*) = (S_b^{-1}E_{B_t}(b) \triangleright a)^* = (a(S_b^{-1}E_{B_t}(b) \triangleright 1_a))^*$$

et 6.4.3(iii) permet de conclure.

– Soit  $\{u_p, p \in P\}$  une quasi-base de  $B$  sur  $B_t$  (voir 3.3.2). Alors un élément  $[a \otimes b]$  de  $A.B$  s'écrit :

$$\begin{aligned} [a \otimes b] &= \sum_{p \in P} [a \otimes E_{B_t}(bu_p)u_p^*] \\ &= \sum_{p \in P} [a(E_{B_t}(bu_p) \triangleright 1_a) \otimes 1_b][1_a \otimes u_p^*] \\ &= \sum_{p \in P} [E_A([a \otimes b][1_a \otimes u_p]) \otimes 1_b][1_a \otimes u_p^*] \end{aligned}$$

Par involution, nous obtenons :

$$[a \otimes b] = \sum_{p \in P} [1_a \otimes u_p][E_A([1_a \otimes u_p^*][a \otimes b]) \otimes 1_b]$$

c'est-à-dire pour tout  $x$  de  $A.B$

$$x = \sum_{p \in P} [1_a \otimes u_p][E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \otimes 1_b]$$

– Nous calculons maintenant  $E_A(x^*x)$ .

$$\begin{aligned} E_A(x^*x) &= \sum_{(p,q) \in P \times P} E_A(x^*[1_a \otimes u_q])(E_{B_t}(u_q^*u_p) \triangleright 1_a)E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \\ &= \sum_{(p,q) \in P \times P} E_A(x^*[1_a \otimes u_q][1_a \otimes E_{B_t}(u_q^*u_p)])E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \\ &= \sum_{p \in P} E_A(x^*[1_a \otimes u_p])E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \\ &= \sum_{p \in P} E_A([1_a \otimes u_p^*]x)^*E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \end{aligned}$$

On en déduit que  $E_A$  est positive et fidèle.

(2) Le carré  $\mathcal{C}$  est commutatif puisqu'on peut écrire

$$E_A E_B = E_{A_s} \otimes E_{B_t} = E_B E_A.$$

On en déduit que  $A_s = B_t = A \cap B$  Il est symétrique par définition puisque  $A.B$  est l'espace vectoriel engendré par les produits  $i_a(a)i_b(b)$  ( $a \in A, b \in B$ ).

□

**Corollaire.** Pour tout  $[a \otimes b]$  de  $A.B$ , on a l'égalité :

$$tr_a(E_A([a \otimes b])) = tr_b(E_B([a \otimes b]))$$

*Démonstration.*

Soit  $[a \otimes b] \in A.B$ .

$$tr_a(E_A([a \otimes b])) = tr_a(a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)) = tr_a(E_{A_s}(a)(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a))$$

Par un calcul analogue on trouve :

$$tr_b(E_B([a \otimes b])) = tr_b((1_b \triangleleft E_{A_s}(a))E_{B_t}(b))$$

Par 2.5.3, 6.3.3 et 6.3.1,  $tr_a$  et  $tr_b$  coïncident sur  $A_s = B_t$ . On conclut à l'égalité :

$$tr_a(E_A([a \otimes b])) = tr_b(E_B([a \otimes b]))$$

□

6.4.5. *Prolongement des traces  $tr_a$  et  $tr_b$  à  $A.B$ .* Le corollaire précédent permet de prolonger  $tr_a$  et  $tr_b$  à  $A.B$ . Etudions ce prolongement.

**Proposition.** *La formule*

$$tr([a \otimes b]) = tr_a(E_A([a \otimes b])) = tr_b(E_B([a \otimes b]))$$

définit une trace normalisée fidèle sur  $A.B$ . Par construction, les espérances  $E_A$  et  $E_B$  conservent cette trace. On a aussi :

$$tr([a \otimes b]) = tr_a(E_{B_t}(b) \triangleright a) = tr_b(b \triangleleft E_{A_s}(a))$$

*Démonstration.*

On vérifie facilement l'égalité :  $tr([1_a \otimes 1_b]) = 1$ . De plus  $tr$  est une forme linéaire positive et fidèle puisque  $E_A$  est linéaire, positive et fidèle.

Comme  $[x \otimes y]$  vaut  $[x \otimes 1_b][1_a \otimes y]$  pour montrer que  $tr$  est une trace, il suffit de montrer, pour  $a$  et  $x$  dans  $A$  et  $b$  et  $y$  dans  $B$ , les deux identités :

$$(1) \ tr([a \otimes b][x \otimes 1_b]) = tr([x \otimes 1_b][a \otimes b])$$

$$(2) \ tr([a \otimes b][1_a \otimes y]) = tr([1_a \otimes y][a \otimes b])$$

Montrons la première, la seconde se démontre de manière analogue. Grâce à 6.4.3(i), on a :

$$\begin{aligned} tr([a \otimes b][x \otimes 1_b]) &= tr([a(b_{(1)} \triangleright x) \otimes b_{(2)}]) \\ &= tr_a(a(b_{(1)} \triangleright x)(E_{B_t}(b_{(2)}) \triangleright 1_a)) \\ &= tr_a(a(E_{B_t}(b) \triangleright x)) \end{aligned}$$

Comme  $tr_a$  est une trace, à l'aide des formules 2.5.4 on peut écrire :

$$\begin{aligned} tr([a \otimes b][x \otimes 1_b]) &= tr_a(a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)x) \\ &= tr_a(xa(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)) \\ &= tr([x \otimes 1_b][a \otimes b]) \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $[a \otimes b]$  de  $A.B$ , on a l'égalité :

$$tr([a \otimes b]) = tr_a((E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)a) = tr_a(E_{B_t}(b) \triangleright a).$$

□

6.4.6. *Représentation standard de  $A.B$  sur  $L^2(A, tr)$ .*

**Proposition** (BSz - 4.2). *L'algèbre  $A.B$  admet une représentation fidèle  $\pi_\phi$  sur  $L^2(A, \phi_a)$  qui prolonge la représentation de  $A$  par multiplication à gauche. En particulier,  $\pi_\phi$  vérifie pour  $b$  dans  $B$  et  $a$  dans  $A$ ,*

$$\pi_\phi(b)\Lambda_\phi(a) = \Lambda_\phi(b \triangleright a).$$

*L'algèbre  $A.B$  est l'extension de Jones de  $A_t \subset A$  représentée sur  $L^2(A, \phi_a)$ . Elle est donc engendrée par  $A$  et  $p_b$ , projecteur de Jones de l'inclusion. Plus précisément,  $p_b$  vérifie :  $\pi_\phi(p_b)\Lambda_\phi(a) = \Lambda_\phi(F_{A_t}(a))$ .*

Considérons l'isométrie  $U$  de  $L^2(A, \phi_a)$  sur  $L^2(A, tr)$  définie par

$$U\Lambda_\phi(a) = d^{-1/2}\gamma\Lambda_{tr}(ag_s^{1/2}g_t^{1/2}).$$

On vérifie facilement que la représentation  $\pi = U\pi_\phi U^{-1}$  de  $A.B$  prolonge la représentation standard de  $A$  sur  $L^2(A, tr)$  et le projecteur de Jones de l'inclusion  $A_t \subset A$  représentée sur  $L^2(A, tr)$  est alors

$$f_b = d\gamma^{-1}\hat{g}_t^{-1/2}p_b\hat{g}_t^{-1/2}.$$



en effet à l'aide de 6.3.3 et 2.5.4, on obtient pour  $a$  dans  $A$  :

$$\begin{aligned}
\pi(f_b)\Lambda_{tr}(a) &= d^{3/2}\gamma^{-2}U\Lambda_\phi(\hat{g}_t^{-1/2} \triangleright F_{A_t}(\hat{g}_t^{-1/2} \triangleright ag_s^{-1/2}g_t^{-1/2})) \\
&= d^{3/2}\gamma^{-2}U\Lambda_\phi(g_s^{-1/2}F_{A_t}(g_s^{-1/2}ag_s^{-1/2}g_t^{-1/2})) \\
&= d\gamma^{-1}\Lambda_{tr}(g_s^{-1/2}F_{A_t}(g_s^{-1/2}ag_s^{-1/2}g_t^{-1/2})g_s^{1/2}g_t^{1/2}) \\
&= d\gamma^{-1}\Lambda_{tr}(F_{A_t}(g_s^{-1/2}ag_s^{-1/2})) \\
&= \Lambda_{tr}(E_{A_t}(a))
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que  $E_{B_t}(f_b)$  vaut  $d^2\gamma^{-2}$ .

**Proposition.** *L'algèbre  $A.B$  est l'extension de Jones de  $A_t \subset A$  représentée sur  $L^2(A, tr_a)$ . Le projecteur de Jones est  $f_b = d\gamma^{-1}\hat{g}_t^{-1/2}p_b\hat{g}_t^{-1/2}$  avec  $E_{B_t}(f_b) = d^2\gamma^{-2}$ .*

6.4.7. *Trace de Markov.*

**Proposition.** *La trace  $tr$  est la trace de Markov normalisée de l'inclusion  $A_t \subset A$  dont l'indice est  $d^{-2}\gamma^2$ . C'est aussi la trace de Markov de l'inclusion  $A \subset A.B$*

*Démonstration.*

Comme l'inclusion  $A_t \subset A$  est connexe, il existe une unique trace de Markov dont le module est l'indice de l'inclusion ([GHJ - 2.7.3]). D'après 6.4.2 et 6.4.6, on a pour tout  $x$  de  $A_t$  :

$$tr([x \otimes f_b] = tr(E_{B_t}(f_b) \triangleright x) = d^2\gamma^{-2}tr([x \otimes 1_b])$$

On en déduit que  $tr$  est la trace de Markov de module  $\beta = d^{-2}\gamma^2$  ([GHJ - 2.7.1]).

D'après [GHJ - 2.7.4],  $tr$  est aussi la trace de de l'inclusion  $A \subset A.B$ . □

## 6.5. L'inclusion $N \subset M$ .

6.5.1. *Construction de  $N \subset M$ .* Comme le carré  $\mathcal{C}$  est un carré commutatif symétrique (6.4.2) pour les espérances conditionnelles associées à la trace de Markov de l'inclusion  $A \subset A.B$ , il vérifie le corollaire 5.3.4 de [JS] : La trace  $tr$  est aussi la trace de Markov des inclusions  $A_s \subset A$ ,  $B_t \subset B$  et  $B \subset A.B$  et on obtient par construction de base une échelle périodique de carrés commutatifs (voir aussi [JS 5.3.5]) qu'on peut préciser grâce à 2.7.1.

$$\begin{array}{ccccccc}
A_0 = A & \subset & A_1 = A \rtimes B & \subset & A_2 = A \rtimes B \rtimes A & \subset & A_3 = A \rtimes B \rtimes A \rtimes B & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & \\
B_0 = B_t & \subset & B_1 = B & \subset & B_2 = B \rtimes A & \subset & B_3 = B \rtimes A \rtimes B & \dots
\end{array}$$

A la limite, on obtient une paire  $N \subset M$  de facteurs hyperfinis de type  $II_1$  :  $M$  (resp.  $N$ ) est la fermeture faible de  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  (resp.  $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ ) dans la construction GNS par rapport à la trace  $tr$  qui se prolonge.

6.5.2. De plus d'après [JS - 5.7.1], le commutant relatif  $N' \cap M$  est  $B' \cap A$ . On en déduit la proposition suivante :

**Proposition.** *Le commutant relatif  $N' \cap M$  est l'algèbre  $A_t$  contenue dans  $A = A_0$ .*

*Démonstration.*

Le calcul suivant montre que les éléments de  $A_t$  commutent à  $B$ . Soient  $x \in A_t$  et  $b \in B$ , alors on a :

$$[1_a \otimes b][x \otimes 1_b] = [x_{(1)} \otimes b \triangleleft x_{(2)}]$$

Grâce à 2.4, on en déduit :

$$[1_a \otimes b][x \otimes 1_b] = [x 1_{a(1)} \otimes b \triangleleft 1_{a(2)}] = [x \otimes (1_b \triangleleft 1_{a(1)}) (b \triangleleft 1_{a(2)})] = [x \otimes b \triangleleft 1_a] = [x \otimes 1_b][1_a \otimes b]$$

D'autre part, si un élément  $x$  de  $A$  commute à  $B$ , il commute à  $f_b$  et on a :

$$x f_b = E_{A_t}(x) f_b.$$

Or d'après [GHJ - 2.6.7 (iii)], pour tout  $y$  de  $A.B$ , il existe un unique  $z$  dans  $A$  tel que  $y f_b = z f_b$ . On obtient donc l'égalité  $x = E_{A_t}(x)$  et  $x$  appartient à  $A_t$ .  $\square$

## 6.6. Action de $A$ sur $N$ .

6.6.1. Comme en 6.2 et [N - 5.6], on peut transformer les produits croisés à gauche en produits croisés à droite et obtenir l'échelle de carrés commutatifs suivante isomorphe à celle considérée en 6.5.1 :

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \subset & A \times B & \subset & A \times B \times A & \subset & A \times B \times A \times B & \dots & \subset & M \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & \\ B_t & \subset & B & \subset & B \times A & \subset & B \times A \times B & \dots & \subset & N \end{array}$$

6.6.2. Nous généralisons maintenant la proposition 5.7 de [N].

**Proposition.** Soient  $i_a : a \mapsto [a \otimes 1_b \otimes 1_a \otimes \dots]$  l'inclusion de  $A$  dans  $M$  et  $E_N$  l'espérance conditionnelle de  $M$  sur  $N$  conservant la trace  $tr$ . Posons

$$f_a = d\gamma^{-1}g_s^{-1/2}p_a g_s^{-1/2}.$$

L'application de  $N \times A$  dans  $N$

$$x \triangleleft a = d^{-2}\gamma^2 E_N(i_a(g_s^{-1/2}f_a g_s^{1/2})x i_a(a)) \quad (x \in N, a \in A)$$

définit une action extérieure à droite de  $A$  sur  $N$  telle que  $M = A \times N$ .

*Démonstration.*

Notons  $x = [b \otimes z]$  un élément de  $B_n$  avec  $b \in B$  et abusivement  $z \in A_{n-1}$ . L'élément  $x$  vu dans  $A_n \subset M$  s'écrit  $[1_a \otimes b \otimes z]$  et  $[1_a \otimes 1_b \otimes z]$  commute avec  $A_0$ . Observons l'action de  $A$  sur  $x$  :

$$\begin{aligned} x \triangleleft a &= d^{-1}\gamma E_N(i_a(g_s^{-1}p_a)x i_a(a)) \\ &= d^{-1}\gamma E_N([g_s^{-1}p_a \otimes b \otimes 1][a \otimes 1_b \otimes z]) \\ &= d^{-1}\gamma E_N([g_s^{-1}p_a a_{(1)} \otimes b \triangleleft a_{(2)} \otimes z]) \\ &= d^{-1}\gamma E_N([g_s^{-1}p_a \varepsilon_s(a_{(1)}) \otimes b \triangleleft a_{(2)} \otimes z]) && \text{(d'après 2.3)} \\ &= d^{-1}\gamma E_N([g_s^{-1}p_a \otimes (1_b \triangleleft \varepsilon_s(a_{(1)}))(b \triangleleft a_{(2)}) \otimes z]) \\ &= d^{-1}\gamma E_N([g_s^{-1}p_a \otimes (1_b \triangleleft a_{(1)})(b \triangleleft a_{(2)}) \otimes z]) \\ &= d^{-1}\gamma E_N([g_s^{-1}p_a \otimes b \triangleleft a \otimes z]) \end{aligned}$$

$A_n \subset M$   
 Le carré  $\cup \quad \cup$  muni des espérances conditionnelles conservant  $tr$  est commutatif, on en déduit :

$$\begin{aligned}
 x \triangleleft a &= d^{-1}\gamma E_{B_n}([g_s^{-1}p_a \otimes b \triangleleft a \otimes z]) \\
 &= d^{-1}\gamma[(1_b \triangleleft E_{A_s}(g_s^{-1}p_a))(b \triangleleft a) \otimes z] \\
 &= [b \triangleleft a \otimes z]
 \end{aligned}$$

En effet d'après 6.3.3 et 6.4.2, on a :

$$E_{A_s}(g_s^{-1}p_a) = d\gamma^{-1}g_s^{-1}F_{A_s}(p_ag_t^{-1}) = d\gamma^{-1}g_s^{-1}F_{A_s}(p_ag_s^{-1}) = d\gamma^{-1}g_s^{-1}F_{A_s}(p_a)g_s^{-1} = d\gamma^{-1}$$

L'application  $x \mapsto x \triangleleft a$  prolonge donc l'action duale  $[b \otimes z] \mapsto [b \triangleleft a \otimes z]$  de  $A$  sur  $B_n = B \rtimes A_{n-1}$ . Elle définit une action à droite faiblement continue de  $A$  sur  $N$ . De plus  $A \rtimes N = i_a(A)N$  est le facteur  $M$ . L'action est extérieure d'après 2.7.2 et 6.5.2.  $\square$

**6.7. Conclusion.** Tout C\*-groupe quantique connexe de dimension finie agit extérieurement sur le facteur hyperfini de type  $II_1$ .

## 7. RÉFÉRENCES

[Bi] D.Bisch : Bimodules, higher relative commutants and the fusion algebra associated to a subfactor *The Fields Institutes for Research in Mathematical Sciences Communications Series 13 (1997), 13-63*.

[BNSz] G. Böhm, F. Nill et K. Szlachányi : Weak Hopf algebras I. Integral theory and C\*-structure. *J. Algebra 221 (1999) 385-438*.

[BSz] G. Böhm et K. Szlachanyi : A Coassociative C\*-Quantum Group with Non-Integral Dimensions. *Lett. in Math. Phys., 35 (1996), 437-456*.

[Da] M.-C. David : Paragroupe d'Adrian Ocneanu et algèbre de Kac. *Pacific Journal of mathematics, Vol 172, No2, 1996*.

[GHJ] F. M. Goodman, P. de la Harpe et V. F. R. Jones : Coxeter Graphs and Towers of algebras. *MSRI Publications number 14*.

[J] V. Jones : Index for subfactors. *Invent. Math. 72 1-25 (1983)*.

[L] R.Longo : A duality for Hopf algebras and subfactors I. *Comm. Math. Phys. 159 (1994), 133-150*

[N] D. Nikshych : Duality for action of weak Kac algebras and crossed product inclusions of  $II_1$  factors. *journal of Operator Theory 46 (2001) n° 3 suppl. 635-655*

[NSzW] F. Nill, K. Szlachányi et H.-W. Wiesbrock : Weak Hopf algebras and reducible Jones inclusions of depth 2, I : From crossed products to Jones towers. *prépublication math. QA/9806130 (1998)*.

[NV1] D. Nikshych et L. Vainerman : A characterisation of depth 2 subfactors of  $II_1$  factors . *J. Func. Analysis 171 (2000) no. 2, 278-307*.

[NV2] D. Nikshych et L. Vainerman : A Galois correspondence for  $II_1$  factors and quantum groupoids. *J. Func. Analysis 178 (2000) 113-142*.

[NV3] D. Nikshych et L. Vainerman : Finite quantum groupoids and their applications. "New Directions in Hopf Algebras", Editors S. Montgomery and H.-J. Scheneider, *MSRI Publications Vol. 43, Cambridge University Press (2002), pp. 211 - 262*.

[PiPo 1] M. Pimsner et S. Popa : Entropy and index for subfactors. *Ann.Scient.ENS 19 (1986) p. 57-106*

[PiPo 2] M. Pimsner et S. Popa : Iterating the basic construction. *Trans.A.M.S. 310 (1988) No 1 p.127-134*.

[Szy] W. Szymanski : Finite index subfactors and Hopf algebras crossed products. Proc.Amer. Math. Soc. 120 (1994) 519-528. [V1] J.-M. Vallin. Groupoïdes quantiques finis. *Journal of Algebra* **239**,215-261 (2001)

[W] Y.Watatani. Index for  $C^*$ -subalgebras. *Memoirs of the AMS* 424 (1990).

MATHÉMATIQUE, BÂT. 425, UNIVERSITÉ PARIS-SUD, F-91405 ORSAY CEDEX.  
MCLD@MATH.U-PSUD.FR