REPRÉSENTATIONS LISSES DE GL(m, D), I : CARACTÈRES SIMPLES

Par Vincent SÉCHERRE

Résumé.– Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie des types pour les groupes réductifs sur un corps local non archimédien. Etant donnés un tel corps F et une algèbre à division D de centre F, de dimension finie sur celui-ci, nous produisons, pour toute strate simple de l'algèbre de matrices $\mathrm{M}(m, D)$, $m \geqslant 1$, un ensemble de caractères simples au sens de Bushnell et Kutzko. Ceux-ci sont reliés à ceux construits dans le cas déployé par un principe de transfert.

Abstract.– This work is concerned with type theory for reductive groups over a non Archimedean local field. Given such a field F, and a division algebra D of finite dimension over its center F, for each simple stratum of the matrix algebra $\mathrm{M}(m, D)$, $m \geqslant 1$, we produce a set of simple characters in the sense of Bushnell and Kutzko, related to those constructed by Bushnell and Kutzko in the split case by a transfert property.

Introduction

Dans toute cette introduction, la lettre F désigne un corps local commutatif non archimédien, de caractéristique résiduelle p, et la lettre G désigne le groupe des F-points d'un groupe réductif connexe défini sur F. Le groupe G est un groupe localement profini, et la question se pose d'étudier la catégorie $\mathfrak{R}(G)$ de ses représentations lisses complexes. On sait (voir [Ber84]) que, *via* le principe de l'induction parabolique, cette catégorie se décompose en un produit infini de sous-catégories abéliennes, appelées blocs de Bernstein. La théorie des types, élaborée par Bushnell et Kutzko [BK98], constitue un moyen de décrire ces blocs comme des catégories de modules sur certaines $\mathbb{C}$-algèbres liées à l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G)$, l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact de G dans $\mathbb{C}$. Le présent travail est une contribution à cette théorie pour les groupes de la forme $\mathrm{GL}(m, D)$, où $m \geqslant 1$ et où D est une algèbre à division de dimension finie d^2 sur son centre F. Désormais, dans tout ce qui suit, la lettre G désigne le groupe $\mathrm{GL}(m, D)$.

A un couple (K, ρ), constitué d'un sous-groupe ouvert compact K de G et d'une représentation lisse irréductible ρ de K, correspondent deux objets : d'une part une sous-catégorie pleine $\mathfrak{R}_\rho(G)$ de $\mathfrak{R}(G)$ dont les objets sont les représentations lisses de G qui sont engendrées par la composante ρ-isotypique de leur restriction à K, d'autre part une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire, notée $\mathscr{H}(G, \rho)$ et appelée l'*algèbre d'entrelacement* du couple (K, ρ). Ce couple est appelé un *type* si la catégorie $\mathfrak{R}_\rho(G)$ est stable par sous-quotients. Cette catégorie est alors une somme finie de blocs de Bernstein, et elle est équivalente à la catégorie des $\mathscr{H}(G, \rho)$-modules à droite. Ainsi, le programme proposé par la théorie des types est, pour chaque bloc de Bernstein $\mathscr{B}$, d'une part de construire un type (K, ρ) pour lequel $\mathscr{B}$ est équivalente à $\mathfrak{R}_\rho(G)$, d'autre part de calculer $\mathscr{H}(G, \rho)$. Ce programme a été entièrement mené à bien uniquement dans le cas où $D = F$ (cas déployé), par Bushnell et Kutzko [BK93], [BK99]. Dans le cadre général de $\mathrm{GL}(m, D)$, on ne dispose que de résultats partiels.

Pour $m = 1$, la description complète des représentations lisses irréductibles du groupe multiplicatif $D^\times$ a été réalisée indépendamment par Zink [Zin88], [Zin92] en caractéristique nulle et par Broussous [Bro98a] dans le cas général. Pour $m \geqslant 1$, Grabitz, Silberger et Zink [GSZ01] ont obtenu des types pour certains blocs de Bernstein de $\mathfrak{R}(G)$, dits *de niveau zéro*, ainsi que leur algèbre d'entrelacement. Broussous [Bro99] a franchi une première étape concernant la classification des représentations irréductibles supercuspidales qui, conjecturalement, sont supposées s'obtenir par induction compacte à partir d'un sous-groupe compact modulo le centre (comme cela a déjà été prouvé pour $\mathrm{GL}(m, F)$). La construction générale des types simples pour $\mathrm{GL}(m, D)$ a été abordée par Grabitz dans [Gra00]. Pour certaines strates simples, dont l'ordre sous-jacent est principal et vérifie une certaine hypothèse de plongement sur laquelle nous reviendrons, Grabitz construit des caractères simples, liés à ceux obtenus dans le cas déployé par des applications de transfert. Puis, adaptant une méthode générale décrite par Reimann [Rei91], il construit, pour chaque caractère simple produit ci-avant et sous une hypothèse de "non-dégénérescence" (voir [Gra00], (9.2)), un ensemble de prolongements de leur représentation de Heisenberg.

Cet article est le premier d'une série de deux dont le but est de prouver une étape essentielle dans la construction des types simples, à savoir l'existence de β-extensions pour toute strate simple. Ceci nécessite d'étendre les constructions de [Gra00] concernant les caractères simples à n'importe quelle strate simple, ce qui est l'objet du présent article. Les résultats obtenus sont, en bref, les suivants :

1. à chaque strate simple de l'algèbre de matrices $\mathrm{M}(m, D)$ nous faisons correspondre un ensemble de caractères simples, admettant toutes les propriétés requises, notamment une formule d'entrelacement, et une propriété de non-dégénérescence permettant d'associer à chacun d'eux sa représentation de Heisenberg ;

2. étant donnée une extension finie non ramifiée $\mathbf{F}/F$ déployant G, nous associons à chacun de ces caractères simples, dans l'esprit de [BH96], une famille de $\mathbf{F}/F$-relèvements, qui sont des caractères simples de $\mathrm{GL}(md/r, \mathbf{F})$, l'entier r dépendant du degré de $\mathbf{F}/F$ et de la strate ;

3. nous étendons le transfert, dans le cas déployé, aux caractères simples définis à partir de suites de réseaux (c'est-à-dire définis relativement à une filtration non canonique du sous-groupe parahorique sous-jacent à la strate simple). Puis, à l'aide du point **2**, nous étendons le transfert aux caractères simples définis en **1**.

Nous décrivons maintenant en détail les résultats sus-mentionnés.

Nous partons d'un D-espace vectoriel à droite V, de dimension finie $m \geqslant 1$. Désignons par A la F-algèbre de ses endomorphismes et par G le groupe multiplicatif de A. Une strate simple de A est pour l'essentiel constituée de deux objets. Le premier d'entre eux est un élément β de l'algèbre A qui engendre sur F un corps, noté E, à l'intérieur duquel β n'est pas un entier. Il lui correspond une sous-F-algèbre B de A, constituée des éléments de A commutant à β. Le second est un ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ de A, c'est-à-dire une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre ouverte compacte de A dont le radical de Jacobson est un idéal bilatère inversible. Il lui correspond un sous-groupe ouvert $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ de G, constitué des éléments de G normalisant l'ordre $\mathfrak{A}$. Ce groupe est compact modulo le centre, et naturellement muni d'une filtration décroissante $\mathrm{U}^i(\mathfrak{A})$, $i \geqslant 0$, constituée de sous-groupes ouverts compacts de G normalisés par $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$. La donnée conjointe de β et de $\mathfrak{A}$, ainsi que d'un entier $n > 0$ entièrement déterminé par ces deux objets, constitue une *strate simple* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *de niveau* n dans l'algèbre A si d'une part le groupe multiplicatif $E^\times$ du corps engendré par β normalise l'ordre $\mathfrak{A}$, et si d'autre part l'élément β vérifie une condition technique que nous n'énoncerons pas ici (voir définition (2.3)).

A toute strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ non scalaire (c'est-à-dire telle que $\beta \notin F$, le cas où $\beta \in F$ recevant un traitement à part) on peut attacher un entier k_0, strictement négatif et supérieur ou égal à $-n$, appelé son *exposant critique.* Cet entier indique en quelque sorte le degré de complexité de la strate, les strates de niveau n les plus faciles à manipuler correspondant à la valeur minimale $k_0 = -n$. De cette façon, les strates simples de A sont classées en une infinité de familles suivant deux paramètres : leur niveau n et leur exposant critique k_0.

Dans le cas où $D = F$ (voir [BK93], (3.1) et (3.2)), le processus $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta] \mapsto \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$ de construction des caractères simples se définit, à niveau fixé, par récurrence sur l'exposant critique k_0. Une fois le processus amorcé pour les strates d'exposant critique $-n$, la construction est basée sur un principe d'approximation pouvant se formuler ainsi : si $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ est une strate simple d'exposant critique $k_0 > -n$, il existe une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \gamma]$, d'exposant critique strictement moindre, telle que les éléments β et γ sont, dans un sens à préciser, suffisamment proches l'un de l'autre (voir [BK93], (2.4.1)(i)). Au centre de la construction se trouve, de façon plus ou moins permanente, l'application $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A} \cap B$, qui est munie de propriétés remarquables. Il s'agit d'une bijection, croissante pour l'inclusion, entre ordres héréditaires de A normalisés par $E^\times$ et ordres héréditaires de B, respectant les filtrations mises en jeu au sens où l'on a $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B = \mathfrak{K}(\mathfrak{A} \cap B)$ et $\mathrm{U}^i(\mathfrak{A}) \cap B = \mathrm{U}^i(\mathfrak{A} \cap B)$, pour tout entier $i \geqslant 0$.

Dans le cas général, un point fondamental de la méthode, le théorème d'approximation, a été prouvé par Broussous et Grabitz (voir [BG00], (5.1)). Malgré cela, plusieurs phénomènes empêchent l'application *mutatis mutandis* des techniques employées dans [BK93]. De façon plus précise, l'application $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A} \cap B$ change radicalement de comportement.

1. En premier lieu, si elle est toujours surjective, elle n'est plus injective. Deux ordres héréditaires E-purs (c'est-à-dire normalisés par $E^{\times}$) de A, qu'ils soient ou non conjugués, peuvent avoir la même trace sur B.

2. En second lieu, les filtrations canoniques ne sont plus respectées. En d'autres termes, l'intersection $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B$ est en général strictement incluse dans $\mathfrak{K}(\mathfrak{A} \cap B)$, et l'intersection $\mathrm{U}^i(\mathfrak{A}) \cap B$, $i \geqslant 1$, peut ne coïncider avec aucun $\mathrm{U}^k(\mathfrak{A} \cap B)$, $k \geqslant 1$.

3. En dernier lieu, si cette application est toujours croissante, elle n'admet en général aucune section croissante, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de moyen d'associer à tout ordre héréditaire $\mathfrak{B}$ de B un ordre héréditaire E-pur $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ de A de telle façon que $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}'} \subset \mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ dès que $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$. L'obstruction à l'existence d'une telle section peut se résumer en affirmant qu'un ordre E-pur de A qui est maximal pour cette propriété a une trace sur B qui n'est pas nécessairement un ordre maximal de B (tandis que cette propriété devient vraie si l'on remplace *maximal* par *minimal*).

Ces deux premiers points soulèvent la question suivante : l'application $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A} \cap B$ admet-elle une section conservant les filtrations ? En d'autres termes, peut-on associer à tout ordre $\mathfrak{B}$ un ordre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ de telle sorte que $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}) \cap B = \mathfrak{K}(\mathfrak{B})$ et que $\mathrm{U}^k(\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}) \cap B = \mathrm{U}^k(\mathfrak{B})$, pour tout entier $k \geqslant 0$? En toute rigueur, pour des raisons de "ramification", on ne peut pas espérer obtenir cette dernière égalité pour tout entier $k \geqslant 2$ mais, à un facteur de renormalisation près, Grabitz (voir [Gra99]) répond à cette question par l'affirmative, et appelle un tel ordre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ un *prolongement* de $\mathfrak{B}$ à A. Ce résultat à l'appui, Grabitz [Gra00] construit des caractères simples pour les strates simples $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ dont l'ordre héréditaire sous-jacent est principal et constitue l'unique prolongement de $\mathfrak{A} \cap B$ à A. Une telle contrainte sur $\mathfrak{A}$ se révèle gênante aux étapes suivantes (voir article à suivre). Dans le présent article, nous ne faisons aucune hypothèse de ce type, c'est-à-dire que nous ne supposons pas que $\mathfrak{A}$ est principal, et nous ne supposons pas l'égalité entre $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B$ et $\mathfrak{K}(\mathfrak{A} \cap B)$.

Le second point amène également la remarque suivante : prendre la trace sur B de la filtration canonique du normalisateur d'un ordre héréditaire E-pur $\mathfrak{A}$ de A fait apparaître des filtrations non canoniques du normalisateur de l'ordre $\mathfrak{A} \cap B$. Broussous [Bro98b], [BL02] a montré que ces filtrations pouvaient s'interpréter *via* le formalisme des suites de réseaux, plus général que celui des ordres héréditaires et en rapport direct avec l'immeuble affine du groupe G. La totalité du formalisme des strates simples de Bushnell et Kutzko peut être retranscrite, et généralisée, dans le contexte des suites de réseaux, comme cela a été fait en partie dans dans [BK99] et [Ste01a], [Ste01b]. En ce qui nous concerne, toute la partie 2 de cet article, et en particulier l'ensemble des résultats obtenus concernant les strates simples, est rédigé en termes de suites de réseaux, et ce n'est que faute d'un théorème d'approximation pour les suites de réseaux dans le cas non déployé que nous revenons, à partir de la partie 3, au formalisme des ordres héréditaires.

Nous ne discuterons pas ici du troisième et dernier point, qui n'intervient pas dans la construction des caractères simples.

Pour aborder la construction des caractères simples dans $\mathrm{GL}(m, D)$, il semble naturel, partant d'une F-algèbre non déployée $A = \mathrm{End}_D(V)$ et d'une strate simple $\sigma = [\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ de A, de chercher à plonger A dans une algèbre déployée A', en lui attachant une strate simple $\sigma' = [\mathfrak{A}', n, 0, \beta]$ naturellement déduite de σ, de façon à pouvoir appliquer à σ' l'ensemble des résultats de [BK93], en espérant que ces résultats pourront se ramener à A. En l'occurrence, il existe deux moyens naturels de procéder : plonger A dans la F-algèbre centrale simple déployée $\bar{A} = \mathrm{End}_F(V)$, ou bien, une fois choisi un sous-corps maximal L de D non ramifié sur F, dans la L-algèbre centrale simple déployée $\boldsymbol{A} = \mathrm{End}_L(V)$. Ce point de vue peut d'ailleurs être adopté comme point de départ pour définir les strates simples de A (voir [Bro99], (1.1.6) *et seq.* et [Gra00], (3.1) (iii)), une strate $\sigma = [\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ de A étant dite simple si la strate $\bar{\sigma} = [\bar{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$ lui correspondant dans $\bar{A}$ l'est au sens de [BK93], (1.5.5). Nous prouvons, dans un contexte plus général, que cette définition est équivalente à celle que nous adoptons en (2.3), ce qui généralise [Gra00], (3.6).

Les preuves de certains résultats sont basées sur un principe de montée-descente en deux temps : dans un premier temps, montée de A à $\boldsymbol{A} = A \otimes_F \mathbf{F}$, qui s'identifie à $\mathrm{End}_{\mathbf{F}}(V \otimes_L \mathbf{F})$, par extension non ramifiée des scalaires (où $\mathbf{F}$ désigne une extension finie non ramifiée de F, voir § 2.2.1) ; dans un second temps, descente de $\boldsymbol{A}$ à $\bar{A}$, où les foncteurs d'extension non ramifiée sont remplacés par d'autres, liés au choix d'une $\mathbf{F}/F$-forme Z dans $\boldsymbol{V} = V \otimes_L \mathbf{F}$ (voir § 2.3.2). La possibilité du retour des informations de $\bar{A}$ à A est étudiée à la section 2.4 et, là encore, nous procédons en deux temps : retour à $\boldsymbol{A}$ par le biais de l'action par conjugaison du groupe cyclique $\boldsymbol{\mu}$ des racines de l'unité de $\mathbf{F}$ d'ordre premier à p, puis retour à A *via* l'action du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{F}/F)$. Ce procédé a été employé dans [Bro95], et en partie dans [BG00], [Gra00], pour ramener à A des suites exactes de $\mathfrak{o}_F$-réseaux, ou pour prouver l'existence de points F-rationnels dans certains espaces principaux homogènes. Notre apport est le suivant : exploitant une idée de Stevens [Ste01a] (où le groupe unitaire est vu comme le groupe des points de $\mathrm{GL}(n, F)$ fixes par une involution), nous prouvons des théorèmes d'existence de points fixes dans certains espaces homogènes non principaux.

Nous décrivons maintenant les moyens de construire des caractères simples. Dans [BK93], leur formation repose sur le choix d'un caractère additif non trivial ψ_F de F, ce qui revient à fixer un isomorphisme entre F et le groupe de ses caractères continus. Ce faisant, à toute strate simple σ de A correspond le caractère

$$\psi_\beta : x \mapsto \psi_F \circ \mathrm{tr}_{A/F}(\beta(x-1)) \ , \tag{0.1}$$

du groupe $\mathrm{U}^{[n/2]+1}(\mathfrak{A})$, et la première qualité d'un caractère simple attaché à σ doit être de prolonger le caractère ψ_β. Parallèlement à l'ensemble $\mathscr{C}(\sigma)$ des caractères simples relatifs à σ sont construits, également par récurrence, deux sous-groupes ouvert compacts $J^1(\sigma)$ et $H^1(\sigma)$ de $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$. Tout élément $\theta \in \mathscr{C}(\sigma)$ est défini sur $H^1(\sigma)$, et compte les propriétés fondamentales suivantes :

1. Son entrelacement est $J^1(\sigma)B^\times J^1(\sigma)$, et son normalisateur est $\mathfrak{K}(\mathfrak{B})J^1(\sigma)$.

2. Il lui correspond une unique représentation irréductible de $J^1(\sigma)$, appelée sa représentation de Heisenberg, dont la restriction à $H^1(\sigma)$ contient θ.

Ceci étant dit, il peut sembler naturel de chercher à définir $\mathscr{C}(\sigma)$, dans le cas non déployé, par restriction à G des éléments de $\mathscr{C}(\bar\sigma)$. Ce procédé est d'autant plus séduisant que les groupes $J^1(\sigma)$ et $H^1(\sigma)$ se définissent sans difficulté comme la trace sur G des groupes $J^1(\bar\sigma)$ et $H^1(\bar\sigma)$, et qu'il a déjà été utilisé dans [BH96], dans une certaine mesure, pour définir le changement de base modéré. Il existe malheureusement une obstruction immédiate à cela : la restriction à $\mathrm{U}^{[n/2]+1}(\mathfrak{A})$ du caractère $\bar\psi_\beta$ (associé *via* (0.1) à la strate $\bar\sigma$) n'est pas égale à ψ_β, mais à sa d-ième puissance $\bar\psi_\beta^d$, et ceci pose un réel problème dans le cas où p divise d (voir § 3.2.3).

L'alternative employée par Broussous (voir [Bro95], (7.2.2) et (7.2.4)) puis Grabitz (voir [Gra00], (5.1) et (5.3)) est de définir $\mathscr{C}(\sigma)$ par récurrence sur l'exposant critique k_0, en suivant étape par étape la méthode employée dans [BK93]. Grabitz mentionne également, dans la situation très particulière où l'extension E/F est totalement ramifiée (ce qui assure que $\mathbf{F}[\beta]$ est un corps, et donc que la strate $\boldsymbol{\sigma}$ est simple), le lien avec l'ensemble $\mathscr{C}(\boldsymbol{\sigma})$ défini relativement à un caractère non trivial $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}$ du groupe additif $\mathbf{F}$ dont la restriction à F est ψ_F (voir [Gra00], (6.3)).

En ce qui nous concerne, nous procédons en quelque sorte dans la direction opposée à celle de [Gra00], dans le sens où nous commençons par définir un ensemble $\mathscr{C}(\boldsymbol{\sigma})$ de caractères, relativement à la strate $\boldsymbol{\sigma}$ et à un caractère non trivial $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}$ de $\mathbf{F}$ prolongeant ψ_F, de façon à définir $\mathscr{C}(\sigma)$ par restriction à G des éléments de $\mathscr{C}(\boldsymbol{\sigma})$. La principale difficulté provient du fait que, en général, la strate $\boldsymbol{\sigma}$ n'est pas simple, l'élément β n'engendrant pas sur $\mathbf{F}$ un corps, mais une $\mathbf{F}$-algèbre commutative se décomposant en une somme de $r > 1$ corps. Pour construire $\mathscr{C}(\boldsymbol{\sigma})$, nous n'avons pas pu éviter le recours à la construction par récurrence de [BK93], que nous suivons de très près, tout en la généralisant à notre cadre "quasi-simple" où β n'engendre pas un corps. Ces caractères de $\mathscr{C}(\boldsymbol{\sigma})$, précisément qualifiés de *quasi-simples*, jouissent cependant de toutes les propriétés caractéristiques d'un caractère simple. Nous déterminons en particulier leur entrelacement. Ces caractères quasi-simples se comportent en outre remarquablement bien vis-à-vis de la décomposition de $\mathbf{F}[\beta]$, c'est-à-dire qu'ils définissent une famille $\boldsymbol{\theta}^i$, $1 \leqslant i \leqslant r$ de caractères simples d'un groupe $\mathrm{GL}(md/r, \mathbf{F})$ déployé sur $\mathbf{F}$, et cette famille les caractérise entièrement. Cependant, ces caractères simples $\boldsymbol{\theta}^i$ sont attachés à des strates simples définies non plus relativement à un ordre héréditaire mais, comme dans [BK99], relativement à une suite de réseaux. Dans ce cas-là, on ne dispose que d'un minorant de l'entrelacement et d'une application de transfert surjective (voir *ibid.*, (5.5)). Nous déterminons la valeur exacte de l'entrelacement, et nous prouvons l'injectivité de l'application de transfert sus-mentionnée. Ceci nous permet notamment d'étendre le principe de transfert (voir [BK93], (3.6)) aux caractères quasi-simples.

Ceci étant fait, nous pouvons définir les caractères simples attachés à σ par restriction à G des éléments de $\mathscr{C}(\boldsymbol{\sigma})$. De façon analogue au cas des caractères quasi-simples, les propriétés caractéristiques d'un caractère simple sont démontrées à l'aide d'un théorème de descente galoisienne. Nous établissons également un transfert avec les caractères simples des groupes déployés, ce qui justifie l'introduction de l'extension $\mathbf{F}$ (qui doit déployer chacun des groupes mis en jeu par le transfert).

La première partie est constituée de rappels concernant les suites de réseaux et les ordres héréditaires relatifs à une F-algèbre centrale simple.

La seconde partie concerne les strates simples. La section 2.1 est formée de rappels concernant les strates simples dans une F-algèbre centrale simple. La section 2.2 étudie le comportement d'une strate simple par un processus de montée externe liée à un changement de base non ramifié. Dans la section 2.3, cette étude est raffinée et accompagnée de celle du comportement d'une strate simple par montée interne. On y décrit le processus de relèvement des strates simples par changement de base non ramifié. Dans la section 2.4, on établit des théorèmes de points fixes permettant de ramener à A certaines informations obtenues dans $\bar{A}$ et dans $\boldsymbol{A}$.

La troisème partie concerne les caractères simples. Dans la section 3.1, on étudie les caractères simples attachés à une suite de réseaux relative à une algèbre déployée. Dans la section 3.2, on construit les caractères quasi-simples. Dans la section 3.3, on construit les caractères simples.

Avant de clore cette introduction, je souhaite remercier Guy Henniart, pour le soutien constant qu'il m'a apporté, et pour m'avoir initié à la théorie des types. Merci également à Paul Broussous et Shaun Stevens, pour les idées et suggestions fructueuses qu'ils ont apportées à ce travail.

Notations

Soit p un nombre premier, et soit F un corps local commutatif non archimédien de caractéristique résiduelle p. Par *F-algèbre* on entendra F-algèbre unitaire de dimension finie. Par *F-algèbre à division* on entendra F-algèbre de centre F, et qui est un corps. Par *extension de F* on entendra corps commutatif contenant F.

Si K est une extension finie de F, ou bien une F-algèbre à division, on note $\mathfrak{o}_K$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_K$ son idéal maximal, $k_K = \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}_K$ son corps résiduel, ϖ_K un générateur de $\mathfrak{p}_K$ et υ_K la valuation normalisée par $\upsilon_K(\varpi_K) = 1$. On note $\mathrm{U}_K = \mathrm{U}_K^0 = \mathfrak{o}_K^\times$ le groupe des unités de $\mathfrak{o}_K$ et, pour tout $i \geqslant 1$, on note $\mathrm{U}_K^i = 1+\mathfrak{p}_K^i$ son i-ème sous-groupe de congruence. On note respectivement $e_{K/F}$ et $f_{K/F}$ l'indice de ramification et le degré résiduel de K/F, de sorte que le produit $e_{K/F}f_{K/F}$ est égal à $[K:F]$, le degré de K sur F. Si K est une F-algèbre à division, la dimension de K sur F est le carré d'un entier noté $d = d_{K/F}$, qui porte le nom de *degré réduit* de K sur F. On a alors $d_{K/F} = e_{K/F} = f_{K/F}$.

On appelle *caractère* d'un groupe topologique G un homomorphisme continu de groupes de G dans $\mathbb{C}^{\times}$. Si G est commutatif, on appelle *dual* de G le groupe de ses caractères, que nous notons $\widehat{G}$. Soient H un sous-groupe de G et θ un caractère de H. Pour tous $x \in G$ et $h \in H$, on note $h^x = x^{-1}hx$, ainsi que θ^x le caractère de $H^x = x^{-1}Hx$ défini par $\theta^x(h^x) = \theta(h)$, pour tout $h \in H$. On appelle *entrelacement de θ dans G* l'ensemble des $g \in G$ pour lesquels les caractères θ et θ^g coïncident sur le sous-groupe $H \cap H^g$. On le note $I_G(\theta)$. Notons que si g entrelace θ, il en est de même de hgh' pour tous $h, h' \in H$. Autrement dit, l'ensemble $I_G(\theta)$ est une réunion de doubles classes de la forme $HgH, g \in G$. En outre, $g \in I_G(\theta)$ est équivalent à $g^{-1} \in I_G(\theta)$, de sorte que l'ensemble $I_G(\theta)$ est stable par inversion.

Si S est une partie de G, on appelle *entrelacement formel de S dans G* l'ensemble des $g \in G$ tels que $g^{-1}Sg \cap S$ est non vide. On le note $I_G(S)$.

Dans tout ce qui suit, on fixe un caractère additif $\psi_F : F \to \mathbb{C}^{\times}$ trivial sur $\mathfrak{p}_F$ mais pas sur $\mathfrak{o}_F$, et une uniformisante ϖ_F de F. Le choix de ψ_F permet d'identifier F à son dual $\widehat{F}$, en associant à $a \in F$ le caractère $\psi_F^a : x \mapsto \psi_F(ax)$.

1 Préliminaires

Soit A une F-algèbre centrale simple, c'est-à-dire une F-algèbre de centre F et ne possédant pour idéaux bilatères que (0) et A elle-même. Il n'existe, à isomorphisme près, qu'un seul A-module à gauche simple, que nous désignerons par V. L'algèbre $\mathrm{End}_A(V)$ est une algèbre à division sur F, de degré réduit noté d, dont l'algèbre opposée est notée D. Aussi V est-il un D-espace vectoriel à droite, de dimension notée m, ce qui fournit un isomorphisme canonique de F-algèbres

$$A \simeq \mathrm{End}_D(V) \ . \tag{1.1}$$

En outre, à tout choix d'une D-base de V correspond un unique isomorphisme de F-algèbres

$$A \simeq \mathrm{M}(m, D) \ , \tag{1.2}$$

où $\mathrm{M}(m, D)$ désigne l'algèbre des matrices de taille m à coefficients dans D. On note $\mathrm{N}_{A/F}$ et $\mathrm{tr}_{A/F}$ respectivement la norme et la trace réduites sur A. On note $G = A^{\times}$ le groupe multiplicatif de A. La restriction de (1.2) à G induit un isomorphisme de groupes entre G et $\mathrm{GL}(m, D)$. Le but de cette partie préliminaire est de définir les sous-groupes parahoriques de G et certaines filtrations de ces sous-groupes. Ceci est lié à la notion de suite de réseaux.

1.1 Suites de réseaux

Soit D une F-algèbre à division, de degré réduit $d = d_{D/F}$. Soit V un D-espace vectoriel à droite de dimension finie. Un *réseau* de V est un sous-groupe ouvert compact de V, et un $\mathfrak{o}_D$-*réseau* de V est un réseau de V muni d'une structure de sous-$\mathfrak{o}_D$-module de V, c'est-à-dire un sous-$\mathfrak{o}_D$-module de type fini de V contenant une D-base de V.

Définition 1.1 *Une* $\mathfrak{o}_D$-suite *de V est une suite décroissante $\Lambda = (\Lambda_k \mid k \in \mathbb{Z})$ de $\mathfrak{o}_D$-réseaux de V pour laquelle il existe un entier $e \geqslant 1$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on ait $\Lambda_{k+e} = \Lambda_k \mathfrak{p}_D$.*

L'entier e, unique, est la *période de* Λ *sur* D et nous le noterons $e_D(\Lambda)$. Désignons par $\mathscr{S}_D(V)$ l'ensemble des $\mathfrak{o}_D$-suites de V. Celui-ci est naturellement muni de deux actions, l'une de $\mathrm{Aut}_D(V)$ et l'autre de $\mathbb{Z}$. Si $\Lambda \in \mathscr{S}_D(V)$ et si $g \in \mathrm{Aut}_D(V)$, on définit une suite $g \cdot \Lambda$ en posant $(g \cdot \Lambda)_k = g(\Lambda_k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{Z}$, on définit une suite $\Lambda + n$ en posant $(\Lambda + n)_k = \Lambda_{k+n}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Mentionnons que la période $e_D(\Lambda)$ est invariante par chacune de ces deux actions.

Le groupe $\mathrm{Aut}_D(V)$ opère également sur les classes de translation de suites, et nous dirons qu'un élément de $\mathrm{Aut}_D(V)$ est un D-*automorphisme* de Λ s'il laisse invariant la classe de translation de Λ. En d'autres termes, il s'agit d'un élément $g \in \mathrm{Aut}_D(V)$ pour lequel il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g \cdot \Lambda = \Lambda + n$. Cet entier n, que nous désignerons par $\upsilon_\Lambda(g)$, est unique, et porte le nom de Λ-*valuation de* g. L'ensemble $\mathfrak{K}(\Lambda)$ de ces automorphismes est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_D(V)$, et l'application $g \mapsto \upsilon_\Lambda(g)$ est un morphisme de groupes de $\mathfrak{K}(\Lambda)$ vers $\mathbb{Z}$. Compte tenu de la définition (1.1), tout élément $x \in D^\times$ définit un D-automorphisme $\Pi_x : v \mapsto vx$ de la $\mathfrak{o}_D$-suite Λ, et υ_Λ induit un morphisme surjectif de $D^\times$ sur $e_D(\Lambda)\mathbb{Z}$, de noyau égal à U_D^0. En particulier, la période $e_D(\Lambda)$ de Λ sur D est égale à la Λ-valuation de n'importe quelle uniformisante de D. Nous appellerons *sous-groupe parahorique* de G un sous-groupe de la forme $\mathfrak{K}(\Lambda)$, pour $\Lambda \in \mathscr{S}_D(V)$.

Si K est un sous-corps de D contenant F, une $\mathfrak{o}_D$-suite de V est *a fortiori* une $\mathfrak{o}_K$-suite de V, ce qui définit une application de $\mathscr{S}_D(V)$ vers $\mathscr{S}_K(V)$ notée $\mathrm{Res}_{D/K}$, et on a $e_K(\Lambda) = e_{D/K} e_D(\Lambda)$.

Voyons maintenant comment une suite Λ définit une filtration du sous-groupe parahorique $\mathfrak{K}(\Lambda)$ qui lui est attaché. Pour obtenir plus de détails concernant ce qui suit, on pourra consulter [Bro98a] ou [BK99]. Nous désignons par A la F-algèbre $\mathrm{End}_D(V)$. Soit $\Lambda \in \mathscr{S}_D(V)$ une $\mathfrak{o}_D$-suite de V. Nous posons, pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathfrak{P}_i(\Lambda) = \{a \in A \mid a\Lambda_k \subset \Lambda_{k+i}, \forall\, k \in \mathbb{Z}\} . \tag{1.3}$$

Les $\mathfrak{P}_i(\Lambda), i \in \mathbb{Z}$, forment une famille décroissante de $\mathfrak{o}_F$-réseaux de A et, pour tous entiers $i, j \in \mathbb{Z}$, le produit $\mathfrak{P}_i(\Lambda)\mathfrak{P}_j(\Lambda)$ est inclus dans $\mathfrak{P}_{i+j}(\Lambda)$, ce qui fait de cette famille une filtration de A. Puisque $\upsilon_D(\varpi_F) = d$, les réseaux $\Lambda_k \varpi_F$ et Λ_{k+ed} sont égaux pour tout $k \in \mathbb{Z}$, de sorte que $\mathfrak{P}_{i+ed}(\Lambda) = \mathfrak{P}_i(\Lambda)\mathfrak{p}_F$. En d'autres termes, l'application $i \mapsto \mathfrak{P}_i(\Lambda)$ constitue une $\mathfrak{o}_F$-suite du F-espace vectoriel A. Ceci définit une application de $\mathscr{S}_D(V)$ vers $\mathscr{S}_F(\mathrm{End}_D(V))$ et, selon [Bro98a], (I.4), deux $\mathfrak{o}_D$-suites de V définissant la même filtration de A sont translatées l'une de l'autre. Désignons par $\mathrm{U}_0(\Lambda) = \mathrm{U}(\Lambda)$ le noyau du morphisme de Λ-valuation $\upsilon_\Lambda : \mathfrak{K}(\Lambda) \to \mathbb{Z}$ et, pour tout $i \geqslant 1$, posons $\mathrm{U}_i(\Lambda) = 1 + \mathfrak{P}_i(\Lambda)$. Ce sont des sous-groupes ouverts compacts distingués de $\mathfrak{K}(\Lambda)$, formant une filtration

$$\mathfrak{K}(\Lambda) \supset \mathrm{U}(\Lambda) \supset \mathrm{U}_1(\Lambda) \supset \cdots \supset \mathrm{U}_i(\Lambda) \supset \cdots \tag{1.4}$$

Mentionnons que deux $\mathfrak{o}_D$-suites peuvent définir le même sous-groupe parahorique, mais en définissent des filtrations différentes dès lors qu'elles ne sont pas translatées l'une de l'autre. Etudions les quotients de la filtration (1.4). Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'application naturelle

$$\mathfrak{P}_i(\Lambda)/\mathfrak{P}_{i+1}(\Lambda) \longrightarrow \prod_{k=0}^{e-1} \mathrm{Hom}_{k_D}(\Lambda_k/\Lambda_{k+1}, \Lambda_{k+i}/\Lambda_{k+i+1}) \tag{1.5}$$

est un isomorphisme de k_D-espaces vectoriels, de sorte que, en particulier, ces quotients sont des p-groupes abéliens finis. Pour $i \geqslant 1$, le quotient $\mathrm{U}_i(\Lambda)/\mathrm{U}_{i+1}(\Lambda)$ est, via l'application $1+x \mapsto x$, isomorphe à $\mathfrak{P}_i(\Lambda)/\mathfrak{P}_{i+1}(\Lambda)$ en tant que groupe abélien, et (1.5) décrit sa structure. Les entiers $n_k = n_k(\Lambda) = \dim_{k_D} \Lambda_{k-1}/\Lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}$, sont appelés les *invariants* de Λ. Si $n \in \mathbb{Z}$, on a $n_k(\Lambda + n) = n_{k+n}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Le quotient $\mathrm{U}(\Lambda)/\mathrm{U}_1(\Lambda)$ sera décrit au paragraphe suivant.

Exemple 1.2 Si V est de dimension 1 sur D, et si $\mathbf{e}$ désigne un vecteur non nul de V, les $\mathfrak{o}_D$-suites de V sont toutes de la forme $\Lambda : k \mapsto \mathbf{e}\mathfrak{p}_D^{[(k-a)/e]}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $e \geqslant 1$, et où $[u]$ désigne la partie entière d'un nombre réel u. En particulier, il n'existe qu'une seule classe de translation de $\mathfrak{o}_D$-suites. Le groupe $\mathfrak{K}(\Lambda)$ s'identifie à $D^\times$ tout entier, et la valuation υ_Λ s'identifie à υ_D. Enfin, pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, le réseau $\mathfrak{P}_i(\Lambda)$ s'identifie à $\mathfrak{p}_D^{-[-i/e]}$.

La trace réduite $\mathrm{tr}_{A/F}$ définit une application bilinéaire non dégénérée $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}_{A/F}(xy)$ de $A \times A$ dans F, de sorte que le caractère additif $\psi = \psi_A = \psi_F \circ \mathrm{tr}_{A/F}$ permet d'identifier le groupe abélien A à son dual en associant à $a \in A$ le caractère $\psi^a = \psi_A^a : x \mapsto \psi(ax)$. Pour toute partie S de A, on note

$$S^* = \{a \in A \mid \psi(as) = 1, \forall\, s \in S\}$$

l'orthogonal de S relativement à ψ. Le caractère ψ est trivial sur $\mathfrak{P}_1(\Lambda)$ mais pas sur $\mathfrak{P}_0(\Lambda)$, et on a (voir [Bro98a], (I.6.5) et [BF85], (2.1))

$$\mathfrak{P}_i(\Lambda)^* = \mathfrak{P}_{1-i}(\Lambda)\ , \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}\ . \tag{1.6}$$

Etant donnés deux entiers positifs i et j tels que $[j/2] \leqslant i \leqslant j$, l'application $x \mapsto 1+x$ induit un isomorphisme de groupes entre $\mathfrak{P}_{i+1}(\Lambda)/\mathfrak{P}_{j+1}(\Lambda)$ et $\mathrm{U}_{i+1}(\Lambda)/\mathrm{U}_{j+1}(\Lambda)$. En particulier, ce dernier est abélien et, par le biais de la dualité, son dual s'identifie à

$\mathfrak{P}_{-j}(\Lambda)/\mathfrak{P}_{-i}(\Lambda)$, en associant à $a + \mathfrak{P}_{-i}(\Lambda)$ le caractère ψ_a défini par $\psi_a(1+x) = \psi^a(x)$. Nous obtenons donc un isomorphisme de groupes finis

$$\mathfrak{P}_{-j}(\Lambda)/\mathfrak{P}_{-i}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{U}_{i+1}\widehat{(\Lambda)/\mathrm{U}}_{j+1}(\Lambda)\ . \tag{1.7}$$

Si, en outre, k est un entier tel que $i \leqslant k \leqslant j$, la restriction des caractères à $\mathrm{U}_{k+1}(\Lambda)$ correspond par dualité à la réduction modulo $\mathfrak{P}_{-k}(\Lambda)$.

1.2 Ordres héréditaires

Soit A une F-algèbre centrale simple. Soient V un A-module à gauche simple et D l'algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$, et identifions *via* (1.1) la F-algèbre A avec $\mathrm{End}_D(V)$.

Définition 1.3 *Une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre $\mathfrak{A}$ de A est un* ordre héréditaire *de A s'il existe une suite $\Lambda \in \mathscr{S}_D(V)$ pour laquelle $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_0(\Lambda)$.*

Cette définition n'est pas la définition conventionnelle (voir [Rei75]), mais elle lui est équivalente et a l'avantage de faire directement le lien avec la notion de suite de réseaux.

Une $\mathfrak{o}_D$-*chaîne* de V est une $\mathfrak{o}_D$-suite de V strictement décroissante. A toute $\mathfrak{o}_D$-suite Λ correspond naturellement la $\mathfrak{o}_D$-chaîne $\mathscr{L}_\Lambda = \{\Lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, obtenue à partir de Λ en supprimant les multiplicités, et on voit que $\mathfrak{P}_0(\Lambda) = \mathfrak{P}_0(\mathscr{L}_\Lambda)$. En d'autres termes, une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre $\mathfrak{A}$ de A est un ordre héréditaire de A s'il existe une chaîne $\mathscr{L} \in \mathscr{S}_D(V)$ pour laquelle $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_0(\mathscr{L})$. Plus précisément (voir [BF85], (1.2.8)), l'application

$$\mathscr{L} \mapsto \mathfrak{P}_0(\mathscr{L})$$

définit une bijection entre classes de translation de $\mathfrak{o}_D$-chaînes de V et ordres héréditaires de A. On appellera *période* d'un ordre héréditaire celle d'une chaîne le définissant, et *invariants* la classe de translation de la suite $n_k, k \in \mathbb{Z}$ des invariants d'une chaîne le définissant.

Soit $\mathfrak{A}$ un ordre héréditaire de A défini par la chaîne $\mathscr{L}$, et désignons par $\mathfrak{P}$ son radical (de Jacobson), c'est-à-dire le plus petit idéal bilatère de $\mathfrak{A}$ pour lequel $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ est semi-simple. Alors $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1(\mathscr{L})$, et $\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}_{-1}(\mathscr{L})$ est un sous-$\mathfrak{o}_F$-réseau de A tel que $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$, appelé l'*inverse* de $\mathfrak{P}$. Plus généralement, pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{P}_i(\mathscr{L})$ est égal à $\mathfrak{P}^i$ (égal à la i-ième puissance de $\mathfrak{P}$ lorsque $i \geqslant 0$ et à la $-i$-ième puissance de $\mathfrak{P}^{-1}$ sinon). On voit donc que la simple connaissance de $\mathfrak{A}$ permet de reconstituer toute la filtration de A définie par $\mathscr{L}$. On note $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ le normalisateur de la chaîne $\mathscr{L}$, on note $\mathrm{U}(\mathfrak{A}) = \mathrm{U}^0(\mathfrak{A})$ le groupe multiplicatif de $\mathfrak{A}$ et, pour $i \geqslant 1$, on note $\mathrm{U}^i(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{P}^i = \mathrm{U}_i(\mathscr{L})$. Le groupe $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ est le normalisateur de $\mathfrak{A}$ dans G et, d'après [BF85], (1.1.2), est également celui de $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$.

Si $\Lambda \in \mathscr{S}_D(V)$, désignons par $\mathfrak{A}$ l'ordre $\mathfrak{P}_0(\mathscr{L}_\Lambda)$ et par $\mathfrak{P}$ son radical. On a alors $\mathfrak{P}_0(\Lambda) = \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{P}_1(\Lambda) = \mathfrak{P}$, et en conséquence on a $\mathrm{U}(\Lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{A})$ et $\mathrm{U}_1(\Lambda) = \mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$.

De ce fait, le groupe $\mathfrak{K}(\Lambda)$ est compris entre $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ et $F^\times \mathrm{U}(\mathfrak{A})$. Par contre, les $\mathfrak{o}_F$-réseaux $\mathfrak{P}_k(\Lambda)$ et $\mathfrak{P}^k$ sont en général différents pour d'autres valeurs de $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Pureté

Les notations du paragraphe 1.1 sont en vigueur. Pour plus de détails concernant ce qui suit, on pourra consulter [Bro98b]. Soit E une extension de F incluse dans A, et notons B le commutant de E dans A. C'est une E-algèbre centrale simple (voir par exemple [Zin99]). Le choix de E munit automatiquement le D-espace vectoriel à droite V d'une structure de E-espace vectoriel compatible à sa D-structure, c'est-à-dire d'une structure de (E, D)-bimodule.

Définition 1.4 *Soit $\Lambda \in \mathscr{S}_D(V)$. Nous dirons que Λ est E-*pure *si $E^\times \subset \mathfrak{K}(\Lambda)$.*

Avant de poursuivre, précisons quelques points de terminologie. Un couple (E, Λ), constitué d'une extension E de F incluse dans A et de $\Lambda \in \mathscr{S}_D(V)$ est dit *pur* si Λ est E-pure, auquel cas le corps E est dit Λ-*pur*. Un élément $\beta \in A$ est dit Λ-*pur* si la F-algèbre $F[\beta]$ est un corps Λ-pur, auquel cas Λ est dite β-pure. Si Λ est une chaîne, et si $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_0(\Lambda)$, on emploiera indifféremment les qualificatifs Λ-*pur* et $\mathfrak{A}$-*pur*. Un ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ sera dit E-*pur* si toute chaîne le définissant est E-pure ou, de façon équivalente, si $E^\times \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$. Si Λ est une suite E-pure, il en est ainsi de toutes ses translatées. Une telle suite est munie d'une structure de $\mathfrak{o}_E$-suite de V, et on a

$$e_E(\Lambda) e_{E/F} = e_D(\Lambda) d \; . \tag{1.8}$$

Proposition 1.5 (Broussous, [Bro98b]) *Si $\mathfrak{A}$ est un ordre héréditaire E-pur de radical $\mathfrak{P}$, l'intersection $\mathfrak{A} \cap B$ est un ordre héréditaire de B de radical $\mathfrak{P} \cap B$.*

Exemple 1.6 Supposons que $m = 1$. Dans ce cas, D est lui-même un D-module à gauche simple, et son unique ordre héréditaire est $\mathfrak{o}_D$, qui est attaché à la chaîne $\{\mathfrak{p}_D^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Il est E-pur pour toute extension E de F incluse dans D et, si l'on note D_E le commutant de E dans D, on a $\mathfrak{o}_D \cap D_E = \mathfrak{o}_{D_E}$, ordre héréditaire attaché à la chaîne $\{\mathfrak{p}_{D_E}^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ du D_E-module à gauche simple D_E.

Remarque 1.7 Dans le cas où $d = 1$, c'est-à-dire si la F-algèbre A est déployée, l'application $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A} \cap B$ définit une bijection entre ordres héréditaires E-purs de A et ordres héréditaires de B, possédant deux qualités importantes :

(i) elle respecte les filtrations afférentes aux ordres héréditaires, au sens où l'on a $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B = \mathfrak{K}(\mathfrak{B})$ et $\mathfrak{P}^k \cap B = \mathfrak{Q}^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$;

(ii) sa réciproque est une application croissante.

Dans le cadre général, lorsque $d > 1$, le comportement de l'application $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A} \cap B$ est nettement différent de celui observé dans le cas déployé. En premier lieu, cette application, même si elle reste surjective, n'est pas toujours injective. En second lieu, cette application ne respecte pas les filtrations : l'intersection $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times$ est en général strictement incluse dans $\mathfrak{K}(\mathfrak{B})$, et l'intersection $\mathfrak{P}^k \cap B$ est non seulement différente de $\mathfrak{Q}^k$, mais n'est même pas nécessairement égale à une puissance de $\mathfrak{Q}$. En dernier lieu, cette application n'admet en général aucune section croissante mais, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, ceci n'a pas de conséquence pour la construction des caractères simples. Nous renvoyons donc à un article ultérieur concernant les β-extensions.

Exemple 1.8 Supposons que $m = 2$. Choisissons une extension non ramifiée $\mathbf{F}/F$ de degré multiple de d, et fixons un isomorphisme de $\mathbf{F}$-algèbres entre $D \otimes_F \mathbf{F}$ et $\mathrm{M}(d, \mathbf{F})$. Posons maintenant

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_D & \mathfrak{p}_D^{-1} \\ \mathfrak{p}_D & \mathfrak{o}_D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}'' = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_D & \mathfrak{o}_D \\ \mathfrak{p}_D & \mathfrak{o}_D \end{pmatrix} .$$

Ce sont des ordres héréditaires de A, le premier étant maximal et le second minimal. Choisissons une extension quadratique non ramifiée E de F incluse dans D, que nous plongeons dans A via le plongement diagonal de D dans A. Son commutant B dans A est égal à $\mathrm{M}(2, D_E)$, où D_E est le commutant de E dans D, les ordres $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}''$ sont tous les deux E-purs, et leur trace sur B est égale au même ordre minimal.

2 Strates simples

On désigne par A une F-algèbre centrale simple, par V un A-module à gauche simple et par D l'algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$, de sorte que A s'identifie, via (1.1), à $\mathrm{End}_D(V)$. On note d le degré réduit de D sur F et m la dimension de V sur D.

2.1 Strates dans une algèbre simple

Les notions présentées dans ce paragraphe ont été introduites dans [BK93], [BK99], puis généralisées au cas non déployé dans [Bro99], [BG00].

Définition 2.1 *Une* strate *de A est un quadruplet $[\Lambda, n, r, \beta]$ constitué d'une $\mathfrak{o}_D$-suite Λ de V, de deux entiers $r < n$ et d'un élément $\beta \in \mathfrak{P}_{-n}(\Lambda)$. Deux strates $[\Lambda, n, r, \beta_i]$, $i \in \{1, 2\}$, sont dites* équivalentes *si $\beta_2 - \beta_1 \in \mathfrak{P}_{-r}(\Lambda)$.*

Remarque 2.2 Supposons que $0 \leqslant [n/2] \leqslant r < n$. D'après le paragraphe 1.1, un caractère du groupe abélien $\mathrm{U}_{r+1}(\Lambda)/\mathrm{U}_{n+1}(\Lambda)$ correspond, par le biais de la dualité, à un élément $\beta \in \mathfrak{P}_{-n}(\Lambda)/\mathfrak{P}_{-r}(\Lambda)$. Ainsi, dans ce cas, une classe d'équivalence de strates $[\Lambda, n, r, \beta]$ correspond à un caractère de $\mathrm{U}_{r+1}(\Lambda)$ trivial sur $\mathrm{U}_{n+1}(\Lambda)$.

Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate de A. On désigne par $\mathfrak{A}$ l'ordre héréditaire $\mathfrak{P}_0(\Lambda)$, par $\mathfrak{P}$ son radical, par B le commutant de β dans A et par $\mathfrak{B}$ l'ordre héréditaire $\mathfrak{A} \cap B$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_k(\Lambda)$. On pose alors

$$\mathfrak{N}_k(\beta, \Lambda) = \{x \in \mathfrak{A} \mid \beta x - x\beta \in \mathfrak{P}_k\} . \tag{2.1}$$

Puisque β appartient à $\mathfrak{P}_{-n}$, nous avons $\mathfrak{P}_{n+k} \subset \mathfrak{N}_k(\beta, \Lambda)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui fait de $\mathfrak{N}_k(\beta, \Lambda)$ un $\mathfrak{o}_F$-réseau. On désigne par $k_0(\beta, \Lambda)$ le plus petit entier k pour lequel $\mathfrak{N}_{k+1}(\beta, \Lambda) \subseteq \mathfrak{B} + \mathfrak{P}$, notamment égal à $-\infty$ si $\beta \in F$. Cet entier $k_0(\beta, \Lambda)$ est appelé *l'exposant critique* de la strate $[\Lambda, n, r, \beta]$. Si β normalise Λ, on a $\beta x - x\beta \in \mathfrak{P}_{\upsilon_\Lambda(\beta)}$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$, de sorte que, quel que soit $k \leqslant \upsilon_\Lambda(\beta)$, on a l'égalité $\mathfrak{N}_k(\beta, \Lambda) = \mathfrak{A}$. Par conséquent, si $\beta \notin F$, l'exposant critique est fini et vérifie $\upsilon_\Lambda(\beta) \leqslant k_0(\beta, \Lambda)$.

Définition 2.3 *Une strate* $[\Lambda, n, r, \beta]$ *de* A *est dite* pure *si l'élément* β *est* Λ*-pur et si* $\upsilon_\Lambda(\beta) = -n$. *Elle est dite* simple *si elle est pure et si* $r < -k_0(\beta, \Lambda)$.

Les constructions de la partie 3 relatives à une strate simple reposent toutes sur un principe de récurrence sur l'exposant critique, lui-même s'appuyant sur la notion d'*approximation* d'une strate pure.

Définition 2.4 *Soit* $[\Lambda, n, r, \beta]$ *une strate pure de* A. *Une* approximation *de cette strate est une strate simple* $[\Lambda, n, r, \gamma]$ *qui lui est équivalente.*

Soit β un élément Λ-pur, et posons $q = -k_0(\beta, \Lambda)$ et $n = -\upsilon_\Lambda(\beta)$. A partir de maintenant, la lettre q sera réservée pour désigner l'entier $-k_0(\beta, \Lambda)$. Nous dirons que γ est une *approximation de* β *relativement à* Λ si la strate $[\Lambda, n, q, \gamma]$ est une approximation de $[\Lambda, n, q, \beta]$. Si $q < n$, l'élément β admet une approximation γ relativement à Λ au moins dans les deux cas de figure suivants :
- lorsque A est déployée sur F (voir [BK99], (5.3)) ;
- lorsque Λ est une chaîne, auquel cas il est même possible de choisir γ de façon que la sous-extension non ramifiée maximale de $F[\gamma]/F$ soit incluse dans E (voir [BG00], (5.1)).

Remarque 2.5 Ce résultat ne nécessite très vraisemblablement pas l'hypothèse $d = 1$, mais n'a pas été prouvé pour d'autres cas, raison pour laquelle, à partir de la partie 3, nous nous restreignons au cas où Λ est une chaîne.

Le schéma classique de démonstration par récurrence d'une propriété dépendant d'une strate simple $[\Lambda, n, r, \beta]$ est le suivant : on prouve d'abord la propriété lorsque $q = n$, puis on la prouve pour $q < n$, c'est-à-dire pour β non minimal, en la supposant vraie pour toutes les approximations de β relativement à Λ.

2.2 Changement de base non ramifié

Dans cette section, nous étudions le comportement d'une strate simple d'une F-algèbre centrale simple par changement de base non ramifié, c'est-à-dire lorsque nous remplaçons le corps de base F par une extension finie non ramifiée.

2.2.1 Préliminaires à la montée externe non ramifiée

Soit $\mathbf{F}$ une extension finie non ramifiée de F. On note $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{F}/F)$ son groupe de Galois et $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$ son anneau d'entiers. Pour tout entier $r \geqslant 1$ divisant $[\mathbf{F} : F]$, le degré de $\mathbf{F}$ sur F, on désigne par Γ_r l'unique sous-groupe de Γ d'indice r et par $\mathbf{F}_r$ le sous-corps des Γ_r-invariants de $\mathbf{F}$. Si M est un Γ-module, c'est-à-dire un module sur l'algèbre $\mathbb{Z}\Gamma$ du groupe Γ, on désigne, pour tout $i \geqslant 0$, par $\mathrm{H}^i(\Gamma, M)$ le i-ième groupe de cohomologie de Γ à valeurs dans M. Si U est un Γ-groupe, c'est-à-dire un groupe muni d'un homomorphisme $\Gamma \to \mathrm{Aut}(U)$, on désigne par $\mathrm{H}^0(\Gamma, U) = U^\Gamma$ le groupe des Γ-invariants de U et par $\mathrm{H}^1(\Gamma, U)$ son premier ensemble de cohomologie (non abélienne).

Soit W un F-espace vectoriel de dimension finie. Désignons par $\boldsymbol{W}$ le $\mathbf{F}$-espace vectoriel $\boldsymbol{W} = W \otimes_F \mathbf{F}$, muni d'une action F-linéaire de Γ définie, pour tous $\sigma \in \Gamma, w \in W, x \in \mathbf{F}$, par $\sigma(w \otimes x) = w \otimes \sigma(x)$, et identifions W à un sous-F-espace de $\boldsymbol{W}$ via l'application $w \mapsto w \otimes 1$. Le foncteur $- \otimes_F \mathbf{F}$, que nous qualifierons de $\mathbf{F}/F$*-montée*, établit une bijection entre sous-F-espaces vectoriels de W et sous-$\mathbf{F}$-espaces vectoriels Γ-stables de $\boldsymbol{W}$. La bijection réciproque est donnée par le foncteur des points fixes $\mathrm{H}^0(\Gamma, -)$, que nous qualifierons aussi de foncteur de *descente* (*galoisienne*). Notons que, si $\boldsymbol{S}$ désigne une partie Γ-stable quelconque de $\boldsymbol{W}$, on a $\boldsymbol{S}^\Gamma = \boldsymbol{S} \cap W$.

Intéressons-nous maintenant aux $\mathfrak{o}_F$-réseaux du F-espace W. D'après [BT84], (4.3), le foncteur $- \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$, que nous qualifierons de $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}/\mathfrak{o}_F$*-montée*, établit une bijection entre $\mathfrak{o}_F$-réseaux de W et $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseaux Γ-stables de $\boldsymbol{W}$. Ici encore, la bijection réciproque est donnée par le foncteur des points fixes $\mathrm{H}^0(\Gamma, -)$. Puisque $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$ est plat sur $\mathfrak{o}_F$, le foncteur de $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}/\mathfrak{o}_F$-montée est exact sur les $\mathfrak{o}_F$-réseaux. Inversement, soit $\boldsymbol{M}$ un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau Γ-stable de $\boldsymbol{W}$, que nous écrivons sous la forme $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^\Gamma \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$. Puisque $\boldsymbol{M}^\Gamma$ est libre sur $\mathfrak{o}_F$, c'est-à-dire isomorphe à une puissance $\mathfrak{o}_F^n$ de $\mathfrak{o}_F$, et puisque $\mathrm{H}^i(\Gamma, \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}) = 0$ pour tout entier $i \geqslant 1$, nous avons

$$\mathrm{H}^i(\Gamma, \boldsymbol{M}) = 0 \ , \quad \forall\, i \geqslant 1 \ , \tag{2.2}$$

de sorte que le foncteur de descente est exact sur les $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseaux Γ-stables. Si M est un sous-$\mathfrak{o}_F$-module de W, nous désignerons parfois par $M_{\mathbf{F}}$ le sous-$\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-module Γ-stable $M \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$ de $\boldsymbol{W}$. Ainsi, si M, N sont deux sous-$\mathfrak{o}_F$-modules de W, on a l'égalité $(M+N)_{\mathbf{F}} = M_{\mathbf{F}} + N_{\mathbf{F}}$. Inversement, si $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ sont deux sous-$\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseaux Γ-stables de $\boldsymbol{W}$, alors

$$(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N})^\Gamma = \boldsymbol{M}^\Gamma + \boldsymbol{N}^\Gamma \ , \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N})^\Gamma = \boldsymbol{M}^\Gamma \cap \boldsymbol{N}^\Gamma \ . \tag{2.3}$$

En effet, puisque $\boldsymbol{M}^\Gamma = \boldsymbol{M} \cap W$ et $\boldsymbol{N}^\Gamma = \boldsymbol{N} \cap W$, on obtient immédiatement la seconde égalité. Pour démontrer la première, remarquons que nous avons $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{M}^\Gamma)_{\mathbf{F}}$ et $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{N}^\Gamma)_{\mathbf{F}}$. On en déduit $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} = (\boldsymbol{M}^\Gamma + \boldsymbol{N}^\Gamma)_{\mathbf{F}}$, de sorte que l'on a $(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N})^\Gamma = \boldsymbol{M}^\Gamma + \boldsymbol{N}^\Gamma$.

2.2.2 Montée externe non ramifiée

Soit A une F-algèbre centrale simple, soit V un A-module à gauche simple et soit D l'algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$. On note d le degré réduit de D/F et m la dimension de V sur D. Selon [Wei74], (I.4.5), les sous-corps commutatifs maximaux de D sont les extensions de F de degré d incluses dans D. En particulier, il existe dans D un sous-corps maximal L non ramifié sur F. Notre but est d'appliquer au F-espace vectoriel $W = A$ les considérations du paragraphe 2.2.1.

Dans toute la suite de cette section, nous fixons une extension finie non ramifiée $\mathbf{F}$ de F, de degré multiple de d, et nous posons

$$\boldsymbol{A} = A \otimes_F \mathbf{F} \ . \tag{2.4}$$

C'est une $\mathbf{F}$-algèbre centrale simple déployée, isomorphe à $\mathrm{M}(md, \mathbf{F})$, munie d'une action F-linéaire de Γ définie, pour tous $\sigma \in \Gamma, a \in A, x \in \mathbf{F}$, par $\sigma(a \otimes x) = a \otimes \sigma(x)$. Ainsi A sera identifiée à la sous-F-algèbre $\boldsymbol{A}^\Gamma = A \otimes_F 1$ de $\boldsymbol{A}$, via l'application $a \mapsto a \otimes 1$. Identifions maintenant la sous-extension $\mathbf{F}_d/F$ à un sous-corps maximal L de D, au moyen d'un F-isomorphisme $\varphi : \mathbf{F}_d \to L$, et désignons par $\boldsymbol{V}$ le $\mathbf{F}$-espace vectoriel $\boldsymbol{V} = V \otimes_L \mathbf{F}$. La structure de $(A, \mathbf{F})$-bimodule dont est munie $\boldsymbol{V}$ induit naturellement un isomorphisme de $\mathbf{F}$-algèbres

$$\boldsymbol{A} \simeq \mathrm{End}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{V}) \tag{2.5}$$

qui prolonge l'isomorphisme canonique de F-algèbres (1.1) entre A et $\mathrm{End}_D(V)$. Soit maintenant $\Lambda = (\Lambda_k \mid k \in \mathbb{Z})$ une $\mathfrak{o}_D$-suite de V de période e, et notons $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_k(\Lambda)$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$. Cette suite est *a fortiori* une $\mathfrak{o}_L$-suite de V et, compte tenu de l'isomorphisme (2.4) et du fait que $\mathbf{F}/F$ est non ramifiée, on définit une $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-suite de $\boldsymbol{V}$ de période ed, notée $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda \otimes_{\mathfrak{o}_L} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$, en posant

$$\boldsymbol{\Lambda}_k = \Lambda_k \otimes_{\mathfrak{o}_L} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}} \ , \quad \forall\ k \in \mathbb{Z} \ . \tag{2.6}$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, le $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau $\boldsymbol{\mathfrak{P}}_k = \mathfrak{P}_k(\boldsymbol{\Lambda})$ est Γ-stable et, puisque $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$ est plat sur $\mathfrak{o}_L$, on a $\boldsymbol{\mathfrak{P}}_k^\Gamma = \mathfrak{P}_k$ (voir [BL02], (I.5.3)). On a ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'égalité

$$\boldsymbol{\mathfrak{P}}_k = \mathfrak{P}_k \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}} \ . \tag{2.7}$$

Choisissons maintenant un caractère additif $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}} : \mathbf{F} \to \mathbb{C}^\times$, trivial sur $\mathfrak{p}_{\mathbf{F}}$ mais pas sur $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$, et prolongeant le caractère ψ_F (on se référera à [Gra00], (1.9) pour l'existence d'un tel caractère). On pose $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}} \circ \mathrm{tr}_{\boldsymbol{A}/\mathbf{F}}$, de sorte que la restriction de $\boldsymbol{\psi}$ à A est $\psi = \psi_A$. Enfin, étant donnée une partie S de $\boldsymbol{A}$, on désignera par S^* le dual de S dans $\boldsymbol{A}$ relativement à $\boldsymbol{\psi}$.

Remarque 2.6 Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, et qui sont essentiellement dues au cas où p divise d, nous ne pouvons pas choisir sur $\mathbf{F}$ le caractère Γ-équivariant $\psi_F \circ \mathrm{tr}_{\mathbf{F}/F}$. Signalons brièvement que, si l'on désigne par n la dimension de $\mathbf{F}$ sur F, la restriction à F de ce caractère, égale à ψ_F^n, est triviale sur $\mathfrak{o}_F$ lorsque p divise d.

Exemple 2.7 Reprenons l'exemple 1.8. Notons $\mathfrak{D}$ l'ordre héréditaire $\mathfrak{o}_D \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$ de $\mathrm{M}(d, \mathbf{F})$ et $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ son radical. Il est de période d, donc minimal, et nous obtenons les égalités

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-1} \\ \boldsymbol{\mathcal{R}} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}'' = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ \boldsymbol{\mathcal{R}} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} .$$

Ce sont des ordres héréditaires de $\boldsymbol{A}$, le premier de période d, et le second de période $2d$, c'est-à-dire minimal. Signalons enfin que, désignant respectivement par $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ le radical de $\mathfrak{A}'$ et celui de $\mathfrak{A}''$, on a pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ les égalités

$$\mathfrak{P}'^k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{R}}^k & \boldsymbol{\mathcal{R}}^{k-1} \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}^{k+1} & \boldsymbol{\mathcal{R}}^k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}''^k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{R}}^{[(k+1)/2]} & \boldsymbol{\mathcal{R}}^{[k/2]} \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}^{[k/2]+1} & \boldsymbol{\mathcal{R}}^{[(k+1)/2]} \end{pmatrix} .$$

Le processus $[\Lambda, n, r, \beta] \mapsto [\boldsymbol{\Lambda}, n, r, \beta]$ que nous venons de décrire porte le nom de $\mathbf{F}/F$-*montée* (externe) des strates de A à $\boldsymbol{A}$. Nous étudions maintenant la structure de l'algèbre $\mathbf{F}[\beta]$ engendrée par β sur $\mathbf{F}$. Notons E la F-algèbre $F[\beta]$, et posons $\mathbf{E} = E \otimes_F \mathbf{F}$. Puisque $\mathbf{F}/F$ est séparable, c'est une $\mathbf{F}$-algèbre commutative semi-simple, qui se décompose en une somme directe

$$\mathbf{E} = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathbf{E}^i \tag{2.8}$$

de $r = r(\mathbf{E}) = (f_{E/F}, [\mathbf{F} : F])$ corps, où $f_{E/F}$ est le degré résiduel de E/F, et où les $\mathbf{E}^i, 1 \leqslant i \leqslant r$, peuvent être vus soit comme des extensions non ramifiées de E, soit comme des extensions de $\mathbf{F}$, chacune de degré sur $\mathbf{F}$ égal à $[E : F]/r$. Cette décomposition est l'unique décomposition de $\mathbf{E}$ en somme d'idéaux minimaux. Tout sous-$\mathbf{E}$-module et tout $\mathbf{E}$-module quotient de $\mathbf{E}$ est isomorphe à une somme de la forme $\bigoplus_{j \in J} \mathbf{E}^j$, où J est une partie finie de $\{1, 2, \dots, r\}$. La $\mathbf{F}$-algèbre $\mathbf{E}$ possède un unique ordre maximal $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}}$, égal à $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}} = \mathfrak{o}_E \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}} = \mathfrak{o}_{\mathbf{E}^1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{o}_{\mathbf{E}^r}$, et son radical est $\mathfrak{p}_{\mathbf{E}} = \mathfrak{p}_E \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}} = \mathfrak{p}_{\mathbf{E}^1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_{\mathbf{E}^r}$. Notons que l'algèbre $\mathbf{E}$ est naturellement munie d'une action de Γ, issue de l'action de Γ sur $\boldsymbol{A}$, qui permute transitivement les $\mathbf{E}^i, 1 \leqslant i \leqslant r$. Le stabilisateur de chacun de ces facteurs est Γ_r. Nous voyons que la strate $[\boldsymbol{\Lambda}, n, q, \beta]$ de $\boldsymbol{A}$ obtenue par $\mathbf{F}/F$-montée n'est pas nécessairement pure, puisque $\mathbf{F}[\beta]$ n'est pas toujours un corps.

Exemple 2.8 Si l'extension E/F est totalement ramifiée, c'est-à-dire si $f_{E/F} = 1$, l'algèbre $\mathbf{E}$ est un corps, et l'extension $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ est totalement ramifiée. A l'autre extrême, si l'extension E/F est non ramifiée, et si nous choisissons $\mathbf{F}$ de sorte que $f_{E/F} = [E : F]$ divise $[\mathbf{F} : F]$, l'algèbre $\mathbf{E}$ est déployée sur $\mathbf{F}$, c'est-à-dire un produit de copies de $\mathbf{F}$.

Notons B le commutant de E dans A et $\boldsymbol{B}$ celui de $\mathbf{E}$ dans $\boldsymbol{A}$. Puisque E et $\mathbf{F}$ commutent, on peut également voir B comme l'ensemble des points Γ-invariants de $\boldsymbol{B}$, de sorte que $\boldsymbol{B}$ s'identifie à $B \otimes_F \mathbf{F}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, désignons par $\mathbf{1}^i$ l'unité de l'anneau $\mathbf{E}^i$. Les éléments $\mathbf{1}^1, \dots, \mathbf{1}^r$ sont les idempotents indécomposables de $\mathbf{E}$, et on a $\mathbf{1}^i\mathbf{E} = \mathbf{E}^i$. L'ordre maximal de $\mathbf{E}^i$ est $\mathbf{1}^i\mathfrak{o}_{\mathbf{E}} = \mathfrak{o}_{\mathbf{E}^i}$, et son radical est $\mathbf{1}^i\mathfrak{p}_{\mathbf{E}} = \mathfrak{p}_{\mathbf{E}^i}$.

Ces idempotents appartenant au centre $\mathbf{E}$ de $\boldsymbol{B}$, la décomposition par blocs de $\boldsymbol{B}$ en somme directe des $\mathbf{1}^i\boldsymbol{B}\mathbf{1}^j$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$, est diagonale, puisque $\mathbf{1}^i\boldsymbol{B}\mathbf{1}^j = (0)$ si $i \neq j$. On a donc l'identité

$$\boldsymbol{B} = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r} \boldsymbol{B}^i \ , \tag{2.9}$$

et le facteur $\boldsymbol{B}^i$ est une $\mathbf{E}^i$-algèbre centrale simple déployée. Ecrivant $\mathbf{E}$ sous la forme $\mathbf{E} = E \otimes_F \mathbf{F}$ et $\boldsymbol{B}$ sous la forme $B \otimes_F \mathbf{F}$, on voit que $\boldsymbol{B} = B \otimes_F \mathbf{F} = B \otimes_E E \otimes_F \mathbf{F} = B \otimes_E \mathbf{E}$, de sorte que $\boldsymbol{B}$ s'identifie au produit tensoriel $B \otimes_E \mathbf{E}$. Compte tenu de la décomposition (2.8), on obtient la décomposition $\boldsymbol{B} = \bigoplus_i B \otimes_E \mathbf{E}^i$. On voit ainsi que les $\mathbf{E}^i$-algèbres $\boldsymbol{B}^i$ et $B \otimes_E \mathbf{E}^i$ sont isomorphes. Regardant $\mathbf{E}^i$ comme une extension non ramifiée de E, et puisque la $\mathbf{F}$-algèbre $\boldsymbol{B}^i$ est déployée, on voit que $\boldsymbol{B}^i$ se déduit de B par un changement de base non ramifié relativement à l'extension $\mathbf{E}^i/E$. Le facteur $\boldsymbol{B}^i$ de $\boldsymbol{B}$ est stable par le sous-groupe Γ_r de Γ, et ce groupe s'identifie au groupe $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}^i/E)$.

Exemple 2.9 Reprenons les exemples 1.8 et 2.7. La $\mathbf{F}$-algèbre $\mathbf{E}$ s'identifie à $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}$ et, si l'on désigne par $\boldsymbol{\mathfrak{Q}}$ le radical de $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$, on constate que $\boldsymbol{\mathfrak{P}}'^k \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mathfrak{Q}}^k$, tandis que $\boldsymbol{\mathfrak{P}}''^k \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mathfrak{Q}}^{[(k+1)/2]}$, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$.

Nous fixons maintenant une strate pure $[\Lambda, n, r, \beta]$, et nous étudions le comportement de $k_0(\beta, \Lambda)$ par montée à $\boldsymbol{A}$. Nous commençons pour cela par étudier celui des réseaux $\mathfrak{N}_k(\beta, \Lambda), k \in \mathbb{Z}$. Désignons par $\mathfrak{A}$ l'ordre héréditaire de A défini par Λ et par $\mathfrak{B}$ l'ordre héréditaire $\mathfrak{A} \cap B$ de B. Notons également $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ la trace de $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ sur $\boldsymbol{B}$, de sorte qu'on a

$$\boldsymbol{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}} \ . \tag{2.10}$$

Pour des raisons de commodité dans les raisonnements, nous introduisons l'endomorphisme $\mathbf{F}$-linéaire $a_\beta(x) = \beta x - x\beta$ de $\boldsymbol{A}$, qui induit, par restriction à A, un endomorphisme F-linéaire de A. Notons que, puisque β est Γ-invariant, l'endomorphisme a_β est Γ-équivariant, c'est-à-dire qu'il commute à l'action de Γ.

Proposition 2.10 *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k(\beta, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathfrak{N}_k(\beta, \Lambda) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$.*

Preuve : Fixons tout d'abord quelques notations. Posons $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_0(\Lambda)$ (resp. $\boldsymbol{\mathfrak{A}} = \mathfrak{P}_0(\boldsymbol{\Lambda})$) et $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_k(\Lambda)$ (resp. $\boldsymbol{\mathfrak{P}}_k = \boldsymbol{\mathfrak{P}}_k(\boldsymbol{\Lambda})$), ainsi que $\mathfrak{N}_k$ (resp. $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k$) le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{N}_k(\beta, \Lambda)$ (resp. le $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau $\mathfrak{N}_k(\beta, \boldsymbol{\Lambda})$). Par définition, nous avons $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k = \boldsymbol{\mathfrak{A}} \cap a_\beta^{-1}(\boldsymbol{\mathfrak{P}}_k)$. En passant aux Γ-invariants, on obtient, compte tenu de la proposition 2.3, l'égalité $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k^\Gamma = \mathfrak{A} \cap a_\beta^{-1}(\mathfrak{P}_k) = \mathfrak{N}_k$, ce qui prouve la première égalité. Puis, par $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-montée, on obtient, compte tenu du fait que $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k$ est un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau Γ-stable, l'égalité $\mathfrak{N}_k \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\mathfrak{N}}_k^\Gamma \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\mathfrak{N}}_k$. □

Corollaire 2.11 *On a $k_0(\beta, \Lambda) = k_0(\beta, \boldsymbol{\Lambda})$.*

Preuve : Il suffit de prouver que $\mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{B} + \mathfrak{P}$ si, et seulement si $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k \subset \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{P}}$. Si $\mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{B} + \mathfrak{P}$, on obtient par $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-montée, compte tenu de (2.10) et de (2.10), l'inclusion $\mathfrak{N}_k \subset \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{P}}$. Inversement, si l'on part de cette inclusion, on obtient en passant aux Γ-invariants l'inclusion $\mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{B} + \mathfrak{P}$. □

Corollaire 2.12 *Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate de A telle que $\mathbf{F}[\beta]$ soit un corps $\boldsymbol{\Lambda}$-pur. Alors $[\Lambda, n, r, \beta]$ est simple si et seulement si $[\boldsymbol{\Lambda}, n, r, \beta]$ est simple. En outre, toute approximation de β relativement à Λ l'est également relativement à $\boldsymbol{\Lambda}$.*

2.3 Relèvement des strates simples

2.3.1 Décompositions

On pourra se référer à [BL02], [BH96]. Dans ce paragraphe, les notations habituelles sont employées. Soit A une F-algèbre centrale simple, soit V un A-module à gauche simple et soit D l'algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$. On note d le degré réduit de D sur F et m la dimension de V sur D. On appelle *décomposition* de A une famille $\mathrm{e} = (\mathrm{e}^i \mid 1 \leqslant i \leqslant r)$ d'idempotents non nuls de A tels que

$$1 = \mathrm{e}^1 + \cdots + \mathrm{e}^r \ , \quad \mathrm{e}^i\mathrm{e}^j = 0 \ \text{ si } \ i \neq j \ . \tag{2.11}$$

La donnée d'une décomposition de A est, une fois identifiées les F-algèbres A et $\mathrm{End}_D(V)$, équivalente à celle d'une décomposition de V en somme directe de sous-D-espaces non nuls $V^i, 1 \leqslant i \leqslant r$, par le biais des égalités $\mathrm{Im}\ \mathrm{e}^i = V^i$ et $\mathrm{Ker}\ \mathrm{e}^i = \bigoplus_{j\neq i} V^j$. Pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant r$, nous posons $A^{ij} = \mathrm{e}^i A \mathrm{e}^j = \mathrm{Hom}_D(V^j, V^i)$, ainsi que $A^i = A^{ii}$, et on a la décomposition de A par blocs

$$A = \coprod_{1\leqslant i,j\leqslant r} A^{ij} \ .$$

Ainsi, étant donné un élément $a \in A$ et deux entiers $1 \leqslant i, j \leqslant r$, sauf mention expresse du contraire, nous noterons $a_{ij} = \mathrm{e}^i a \mathrm{e}^j$, et $a_i = a_{ii}$. Remarquons que A^i, qui s'identifie à $\mathrm{End}_D(V^i)$, est une F-algèbre centrale simple, dont le groupe multiplicatif sera noté G^i. Une décomposition $\mathrm{e}' = (\mathrm{e}'^i \mid 1 \leqslant i \leqslant r')$ sera dite *plus fine* que e s'il existe une partition $(\mathrm{I}_j \mid 1 \leqslant j \leqslant r)$ de $\{1, 2, \ldots, r'\}$ telle que, pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, la famille $\mathrm{e}'|\mathrm{I}_j = (\mathrm{e}'^i \mid i \in \mathrm{I}_j)$ est une décomposition de A^j. Il s'agit d'une relation d'ordre sur les décompositions de A. Relativement à la décomposition e, notons

$$M = \prod_{1\leqslant i\leqslant r} G^i \ , \quad U = 1 + \coprod_{1\leqslant i<j\leqslant r} A^{ij} \ , \quad U^- = 1 + \coprod_{1\leqslant j<i\leqslant r} A^{ij} \ , \tag{2.12}$$

ainsi que $P = MU$ et $P^- = MU^-$. Le groupe P est un sous-groupe parabolique de G, de facteur de Levi M et de radical unipotent U. Le groupe P^- est le sous-groupe parabolique de G opposé à P. Son facteur de Levi est M, tandis que son radical unipotent est U^-. Compte tenu de cette notation, et conformément à la terminologie de [BH96], (10), nous dirons qu'un sous-groupe $\mathcal{G}$ de G admet une *décomposition d'Iwahori* relativement à e si

$$\mathcal{G} = \mathcal{G} \cap U^- \cdot \mathcal{G} \cap M \cdot \mathcal{G} \cap U \quad \text{et} \quad \mathcal{G} \cap M = \prod_{1\leqslant i\leqslant r} \mathcal{G} \cap G^i \ , \tag{2.13}$$

où la première égalité signifie que tout élément $g \in \mathcal{G}$ s'écrit sous la forme $g = u^- m u$, avec $u^- \in U^-, m \in M, u \in U$ (et ce, nécessairement, de façon unique). Soit maintenant Λ une $\mathfrak{o}_D$-suite de V, et notons $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_k(\Lambda)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, désignons par Λ^i la suite définie, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, par $\Lambda^i_k = \Lambda_k \cap V^i$. C'est une $\mathfrak{o}_D$-suite de V^i dont la période sur D est égale à celle de Λ et, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant r$ et $k \in \mathbb{Z}$, posons $\mathfrak{P}^{ij}_k = \{a \in A^{ij} \mid a\Lambda^i_v \subset \Lambda^j_{v+k}, \forall\, v \in \mathbb{Z}\}$, et $\mathfrak{P}^i_k = \mathfrak{P}^{ii}_k$. Conformément à [BH96], (10.5), nous dirons que la décomposition e est *conforme* à Λ si les idempotents $\mathrm{e}^i, 1 \leqslant i \leqslant r$, appartiennent à $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_0(\Lambda)$, ou encore, de façon équivalente, si on a l'égalité

$$\Lambda_k = \Lambda^1_k \oplus \cdots \oplus \Lambda^r_k\ , \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Plus généralement, si K est une extension Λ-pure de F incluse dans A, nous dirons que cette décomposition est *conforme à Λ sur K* si elle est conforme à Λ et si les idempotents $\mathrm{e}^i, 1 \leqslant i \leqslant r$, commutent à K. **Jusqu'à la fin de ce paragraphe, nous supposerons que** e **est une décomposition conforme à** Λ. Dans ce cas, on a $\Lambda^i = \mathrm{e}^i\Lambda$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ et, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant r$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathfrak{P}^{ij}_k = \mathfrak{P}_k \cap A^{ij} = \mathrm{e}^i\mathfrak{P}_k\mathrm{e}^j$. En particulier, nous avons $\mathfrak{P}^i_k = \mathfrak{P}_k(\Lambda^i)$.

Exemple 2.13 Supposons que $\dim_D V = 2$. Fixons une base (e_1, e_2) de V sur D, et notons $\mathrm{e} = (\mathrm{e}^1, \mathrm{e}^2)$ la décomposition de V naturellement définie par cette base. Désignons par Λ le $\mathfrak{o}_D$-réseau $\Lambda = e_1\mathfrak{p}_D \oplus (e_1+e_2)\mathfrak{o}_D$. Bien entendu, la décomposition définie par la base $(e_1, e_1 + e_2)$ est conforme à Λ, mais la décomposition e ne l'est pas, compte tenu du fait que $\Lambda \cap e_iD = e_i\mathfrak{p}_D$ et $\mathrm{e}^i\Lambda = e_i\mathfrak{o}_D$, pour tout $i \in \{1, 2\}$.

Proposition 2.14 *Pour tout $k \geqslant 1$, le groupe $\mathrm{U}_k(\Lambda)$ admet une décomposition d'Iwahori relativement à* e *et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on a $\mathrm{U}_k(\Lambda) \cap G^i = \mathrm{U}_k(\Lambda^i)$ et $\mathfrak{K}(\Lambda) \cap G^i = \mathfrak{K}(\Lambda^i)$.*

Preuve : Compte tenu du fait que $\mathrm{e}^i\mathfrak{P}^k\mathrm{e}^j \subset \mathfrak{P}^k$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant r$, et raisonnant comme dans [BH96], (10.4), on voit que $\mathrm{U}_k(\Lambda)$ admet une décomposition d'Iwahori. Ensuite, l'intersection $\mathrm{U}_k(\Lambda) \cap G^i$ est égale à $\mathrm{e}^i + \mathfrak{P}_k(\Lambda) \cap A^i$. Puisque $\mathfrak{P}_k \cap A^i = \mathfrak{P}_k(\Lambda^i)$, ce groupe est égal à $\mathrm{U}_k(\Lambda^i)$. Enfin, si g est un élément de $\mathfrak{K}(\Lambda) \cap G^i$ de valuation n, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$ l'égalité $g \cdot \Lambda_k = \Lambda_{k+n}$ et, en projetant sur V^i, on obtient $g \cdot \Lambda^i_k = \Lambda^i_{k+n}$, de sorte que $g \in \mathfrak{K}(\Lambda^i)$. □

Soit maintenant E une extension de F incluse dans A, et faisons l'hypothèse supplémentaire que chacun des idempotents $\mathrm{e}^i, 1 \leqslant i \leqslant r$ de notre décomposition commute à E, c'est-à-dire que e est conforme à Λ sur E. Dans ces conditions, la famille e définit une décomposition du commutant B de E dans A, pour laquelle les notations précédentes sont valables : pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant r$ on pose $B^{ij} = \mathrm{e}^iB\mathrm{e}^j$ et $B^i = B^{ii}$, qui est le commutant de $\mathrm{e}^iE = F[\mathrm{e}^i\beta]$ dans A^i. Notons $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$, qui est un ordre héréditaire de B. Ainsi, si R est un sous-$(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$-bimodule de A, nous aurons $R \cap A^{ij} = \mathrm{e}^iR\mathrm{e}^j$, et ce pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

Proposition 2.15 *Soit* $[\Lambda, n, q, \beta]$ *une strate pure de* A*, et soit* e *une décomposition de* A *conforme à* Λ *sur* E*. Alors, pour tout entier* $1 \leqslant i \leqslant r$*, la strate* $[\Lambda^i, n, q, \mathrm{e}^i\beta]$ *est une strate pure de* A^i*.*

Preuve : Soit $x \in E^\times$, et soit υ sa Λ-valuation. Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant r$, puisque e^i commute à E, nous pouvons écrire

$$\mathrm{e}^i x \cdot \Lambda_k^i = \mathrm{e}^i(x \cdot \Lambda_k) = \Lambda_{k+\upsilon}^i \ , \quad \forall\ k \in \mathbb{Z} \ ,$$

ce qui prouve d'une part que le corps $\mathrm{e}^i E$ est Λ^i-pur, d'autre part que la Λ^i-valuation de $\mathrm{e}^i\beta$ est égale à $-n$. En d'autres termes, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, la strate $[\Lambda^i, n, q, \mathrm{e}^i\beta]$ est une strate pure de A^i. □

2.3.2 Montée interne non ramifiée

Le processus de montée décrit dans le paragraphe 2.2.2 est dit externe, au sens où il passe d'une algèbre à une algèbre plus grosse, et par opposition au processus de montée interne que nous décrivons maintenant. Les notations du paragraphe 2.2.2 sont en vigueur, et nous posons

$$\bar{A} = \mathrm{End}_F(\boldsymbol{V}) \ . \tag{2.14}$$

C'est une F-algèbre centrale simple déployée, isomorphe à $\mathrm{M}(md[\mathbf{F} : F], F)$, dans laquelle $\boldsymbol{A}$ est le commutant de $\mathbf{F}$. Soit $\Lambda = (\Lambda_k \mid k \in \mathbb{Z})$ une $\mathfrak{o}_D$-suite de V de période e, et soit $\boldsymbol{\Lambda}$ sa $\mathfrak{o}_\mathbf{F}$-montée. Rappelons que $\boldsymbol{\Lambda}$ est une $\mathfrak{o}_\mathbf{F}$-suite de $\boldsymbol{V}$ de période ed. C'est donc *a fortiori* une F-suite de $\boldsymbol{V}$ et, lorsqu'on la considérera pour cette structure, on la notera $\bar{\Lambda} = \mathrm{Res}_{\mathbf{F}/F}(\boldsymbol{\Lambda})$. Puisque $\mathbf{F}/F$ est non ramifiée, la période de $\bar{\Lambda}$ est encore ed. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, désignons par $\bar{\mathfrak{P}}_k$ le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{P}_k(\bar{\Lambda})$. On a ainsi les égalités

$$\mathfrak{K}(\bar{\Lambda}) \cap \boldsymbol{G} = \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\boldsymbol{\Lambda}) \quad \text{et} \quad \bar{\mathfrak{P}}_k \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\mathfrak{P}}_k \ , \quad \forall\ k \in \mathbb{Z} \ . \tag{2.15}$$

Par descente galoisienne, on déduit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\bar{\mathfrak{P}}_k \cap A = \mathfrak{P}_k$. Pour ce qui est du normalisateur, remarquons que, puisque $\mathfrak{o}_\mathbf{F}$ est plat sur $\mathfrak{o}_L$, la condition $g \cdot \Lambda_k = \Lambda_{k+n}$ est, étant donné $g \in G$ et pour tous $k, n \in \mathbb{Z}$, une égalité entre $\mathfrak{o}_F$-réseaux de A équivalente à $g \cdot \boldsymbol{\Lambda}_k = \boldsymbol{\Lambda}_{k+n}$, ce dont on déduit l'égalité entre $\boldsymbol{\mathfrak{K}}(\boldsymbol{\Lambda}) \cap G$ et $\mathfrak{K}(\Lambda)$. Par conséquent, on a $\mathfrak{K}(\bar{\Lambda}) \cap G = \mathfrak{K}(\Lambda)$.

Remarque 2.16 De façon analogue à [Bro98a], où est introduite la F-algèbre déployée $D \otimes_F D^{\mathrm{o}}$, il serait agréable de déployer l'algèbre A de façon entièrement intrinsèque, ne nécessitant le choix ni de V ni de L. Ceci est possible : il suffit de plonger A dans son algèbre enveloppante $A^{\mathrm{e}} = A \otimes_F A^{\mathrm{o}}$, où A^{o} désigne la F-algèbre opposée à A. Dans ce cas, l'algèbre A pour sa structure de (A, A)-bimodule est un A^{e}-module à gauche simple, de sorte que A^{e} s'identifie naturellement à $\mathrm{End}_F(A)$. A une $\mathfrak{o}_D$-suite Λ de V correspond alors naturellement la $\mathfrak{o}_F$-suite $k \mapsto \mathfrak{P}_k(\Lambda)$ de A. Nous n'avons pas étudié ce point de vue, mais il est à craindre que l'algèbre A^{e}

soit trop grande pour permettre un retour aisé à la F-algèbre A. Signalons que, lorsque $[\mathbf{F}:F]$ est égal à d, la F-algèbre $\bar{A}$ introduite dans ce paragraphe s'identifie à $A\otimes_F D^{\mathrm{o}}=A\otimes_F \mathrm{End}_A(V)$.

Nous étudions maintenant l'analogue interne des foncteurs de montée, que nous obtenons à l'aide d'un processus analogue à celui des "(W,E)-décompositions" décrit en [BK93], (1.2). Nous désignons par $A(\mathbf{F})$ la F-algèbre $\mathrm{End}_F(\mathbf{F})$, et nous choisissons un sous-F-espace vectoriel Z de $\boldsymbol{V}$ engendré sur F par une $\mathbf{F}$-base de $\boldsymbol{V}$, de sorte que l'application canonique de $\mathbf{F}\otimes_F Z$ sur $\boldsymbol{V}$ soit un isomorphisme de $\mathbf{F}$-espaces vectoriels. Un tel choix définit naturellement un isomorphisme de F-algèbres entre $\bar{A}$ et $A(\mathbf{F})\otimes_F \mathrm{End}_F(Z)$, et nous désignerons par ι_Z le plongement de F-algèbres $A(\mathbf{F})\to\bar{A}$ qui en résulte. On obtient un isomorphisme de $\mathbf{F}$-algèbres entre $\boldsymbol{A}$ et $\mathbf{F}\otimes_F\mathrm{End}_F(Z)$, c'est-à-dire que la F-algèbre $\mathrm{End}_F(Z)$ est une *$\mathbf{F}/F$-forme (déployée)* de $\bar{A}$. On appelle *$(Z,\mathbf{F})$-décomposition de $\bar{A}$* l'isomorphisme de $(A(\mathbf{F}),\mathbf{F})$-bimodules

$$A(\mathbf{F})\otimes_{\mathbf{F}}\boldsymbol{A}\simeq\bar{A} \tag{2.16}$$

défini par $(f,c)\mapsto\iota_Z(f)c$ et, par extension, on dira qu'un sous-$(A(\mathbf{F}),\mathbf{F})$-bimodule U de $\bar{A}$ admet une *$(Z,\mathbf{F})$-décomposition* si (2.16) induit par restriction un isomorphisme de $(A(\mathbf{F}),\mathbf{F})$-bimodules entre U et $A(\mathbf{F})\otimes_{\mathbf{F}}(\mathrm{U}\cap\boldsymbol{A})$.

Nous désignons maintenant par $\mathfrak{A}(\mathbf{F})$ l'unique ordre héréditaire $\mathbf{F}$-pur de $A(\mathbf{F})$, c'est-à-dire l'ordre principal de $A(\mathbf{F})$ défini par la $\mathfrak{o}_F$-chaîne $\{\mathfrak{p}_{\mathbf{F}}^i\mid i\in\mathbb{Z}\}$. Puisque $\mathbf{F}/F$ est non ramifiée, remarquons que $\mathfrak{A}(\mathbf{F})=\mathrm{End}_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{o}_{\mathbf{F}})$. Une fois choisi un sous-F-espace Z de $\boldsymbol{V}$ engendré sur F par une $\mathbf{F}$-base de $\boldsymbol{V}$ décomposant $\boldsymbol{\Lambda}$, nous pouvons appliquer [BK99], lemme (5.3), de façon à obtenir, pour tout entier $k\in\mathbb{Z}$, un isomorphisme

$$\mathfrak{A}(\mathbf{F})\otimes_{\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}}\boldsymbol{\mathfrak{P}}_k\simeq\bar{\mathfrak{P}}_k \tag{2.17}$$

de $(\mathfrak{A}(\mathbf{F}),\mathfrak{o}_{\mathbf{F}})$-bimodules, induit par restriction par (2.16), qui prend le nom de *$(Z,\mathbf{F})$-décomposition de* $\mathfrak{P}_k(\Lambda)$. Par extension, on dira qu'un sous-$(\mathfrak{A}(\mathbf{F}),\mathfrak{o}_{\mathbf{F}})$-bimodule $\mathscr{M}$ de A admet une $(Z,\mathbf{F})$-décomposition si (2.16) induit par restriction un isomorphisme de $(\mathfrak{A}(\mathbf{F}),\mathfrak{o}_{\mathbf{F}})$-bimodules entre $\mathscr{M}$ et $\mathfrak{A}(\mathbf{F})\otimes_{\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}}(\mathscr{M}\cap\boldsymbol{A})$.

Pour déterminer le comportement de $k_0(\beta,\bar{\Lambda})$ par montée interne, nous avons également besoin de $(Z,\mathbf{F})$-décompositions de $\bar{\mathfrak{B}}$. Pour cela, il est nécessaire que Z soit un sous-E-espace vectoriel de $\boldsymbol{V}$. Nous allons prouver qu'il est effectivement possible de choisir Z ainsi. Rappelons que $(\mathbf{1}^i\mid 1\leqslant i\leqslant r)$ désigne la famille des idempotents indécomposables de $\mathbf{E}$. Il s'agit, au sens du paragraphe 2.3.1, d'une décomposition de $\boldsymbol{A}$. Puisque $\boldsymbol{\Lambda}$ est à la fois E-pure et $\mathbf{F}$-pure, et puisque les $\mathbf{1}^i$ appartiennent à l'ordre $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}}$, cette décomposition est conforme à $\boldsymbol{\Lambda}$. Pour tout entier $1\leqslant i\leqslant r$, on pose $\boldsymbol{V}^i=\mathbf{1}^i\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{\Lambda}^i=\mathbf{1}^i\boldsymbol{\Lambda}$, et la $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-suite $\boldsymbol{\Lambda}^i$ est $\mathbf{E}^i$-pure. Fixons un générateur σ de Γ, et numérotons les idempotents $\mathbf{1}^i$ de telle sorte qu'on ait $\sigma\mathbf{1}^i=\mathbf{1}^{i-1}$ pour tout $i\in\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. Rappelons que le quotient Γ/Γ_r opère librement et transitivement sur l'ensemble des idempotents indécomposables, de sorte qu'on a

$$\boldsymbol{V} = \bigoplus_{0 \leqslant k < r} \sigma^k \boldsymbol{V} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \bigoplus_{0 \leqslant k < r} \sigma^k \boldsymbol{\Lambda} \ . \tag{2.18}$$

Lemme 2.17 *Le* $\mathbf{E}$*-module* $\boldsymbol{V}$ *est libre, et il en existe une* $\mathbf{E}$*-base* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_t)$ *décomposant* $\boldsymbol{\Lambda}$*. En outre, si l'on identifie* $\mathbf{E}x_j$ *à* $\mathbf{E}$*, la* $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$*-suite* $k \mapsto \boldsymbol{\Lambda}_k \cap \mathbf{E}x_j$ *s'identifie à une* $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$*-suite de* $\mathbf{E}$ *dont la chaîne associée est* $\{\mathfrak{p}_{\mathbf{E}}^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$*.*

Preuve : Puisque $\boldsymbol{\Lambda}^1$ est une $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}^1}$-suite de $\boldsymbol{V}^1$, il existe une $\mathbf{E}^1$-base de $\boldsymbol{V}^1$ qui la décompose. Notons $\mathbf{x^1} = (x_j^1 \mid 1 \leqslant j \leqslant t)$ une telle base, et identifions $\mathbf{E}^1 x_j^1$ à $\mathbf{E}^1$, de sorte que la $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}^1}$-suite $k \mapsto \boldsymbol{\Lambda}_k^1 \cap \mathbf{E}^1 x_j^1$ s'identifie à une $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}^1}$-suite de $\mathbf{E}^1$. Celle-ci est donc de la forme $k \mapsto \mathfrak{p}_{\mathbf{E}^1}^{k-k_0}$, où k_0 désigne un entier fixé. Désignons par x_j la somme des $\sigma^k(x_j^1)$, $0 \leqslant k < r$. Compte tenu de (2.18), la famille $\mathbf{x} = (x_j \mid 1 \leqslant j \leqslant t)$ est une $\mathbf{E}$-base de $\boldsymbol{V}$ répondant à la question. Plus précisément, la $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-suite $k \mapsto \boldsymbol{\Lambda}_k \cap \mathbf{E}x_j$ s'identifie à la $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-suite $k \mapsto \mathfrak{p}_{\mathbf{E}}^{k-k_0}$. □

Corollaire 2.18 *Il existe un sous-E-espace vectoriel* Z *de* $\boldsymbol{V}$ *engendré sur* F *par une* $\mathbf{F}$*-base de* $\boldsymbol{V}$ *décomposant* $\boldsymbol{\Lambda}$*.*

Preuve : Soit $\mathbf{x} = (x_j \mid 1 \leqslant j \leqslant t)$ une $\mathbf{E}$-base de $\boldsymbol{V}$ comme au lemme 2.17, et procédons aux identifications mentionnées. De cette façon, nous nous ramenons à chercher une F-base de E qui soit également une $\mathbf{F}$-base de $\mathbf{E}$ décomposant la chaîne $\{\mathfrak{p}_{\mathbf{E}}^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Désignons par z_l, $1 \leqslant l \leqslant f_{E/F}$, des éléments de $\mathfrak{o}_E$ tels que les $z_l + \mathfrak{p}_E$, $1 \leqslant l \leqslant f_{E/F}$, constituent une k_F-base de k_E, et fixons une uniformisante ϖ_E de E. De cette façon, les éléments $\varpi_E^k z_l$, $0 \leqslant k < e_{E/F}$, $1 \leqslant l \leqslant f_{E/F}$, constituent une base de $\mathfrak{o}_E$ sur $\mathfrak{o}_F$ (voir par exemple [Koc97], chapitre I, proposition 1.76). Ecrivant $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}}$ sous la forme $\mathfrak{o}_E \otimes \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$, on voit que $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}} = \bigoplus_{k,l} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}} \varpi_E^k z_l$ et, multipliant cette égalité par ϖ_E^i pour n'importe quel $i \in \mathbb{Z}$, on voit que les éléments $\varpi_E^k z_l$, $0 \leqslant k < e_{E/F}$, $1 \leqslant l \leqslant f_{E/F}$, constituent une $\mathbf{F}$-base de $\mathbf{E}$ décomposant la chaîne $\{\mathfrak{p}_{\mathbf{E}}^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. □

Ainsi le corps E se plonge dans $\mathrm{End}_F(Z)$ et l'isomorphisme de F-algèbres $\bar{A} \simeq A(\mathbf{F}) \otimes_F \mathrm{End}_F(Z)$ montre que l'action de $A(\mathbf{F})$ sur $\boldsymbol{V}$ commute à celle de E, c'est-à-dire que $\iota_Z(A(\mathbf{F}))$ est inclus dans le commutant de E dans $\bar{A}$, que nous notons $\bar{B}$. Puisque l'intersection $\bar{B} \cap \boldsymbol{A}$ est égale au commutant $\boldsymbol{B}$ de $\mathbf{E}$ dans $\bar{A}$, qui est également le commutant de $\mathbf{F}$ dans $\bar{B}$, le produit tensoriel $A(\mathbf{F}) \otimes_{\mathbf{F}} \boldsymbol{B}$ est le commutant de E dans $A(\mathbf{F}) \otimes_{\mathbf{F}} \boldsymbol{A}$ qui, selon (2.16), s'identifie au commutant de E dans $\bar{A}$, c'est-à-dire à $\bar{B}$. En d'autres termes, la E-algèbre $\bar{B}$ admet une $(Z, \mathbf{F})$-décomposition $A(\mathbf{F}) \otimes_{\mathbf{F}} \boldsymbol{B} \simeq \bar{B}$. Nous déduisons de (2.17) pour $k = 0$, qui est le seul cas dont nous aurons besoin, la $(Z, \mathbf{F})$-décomposition

$$\mathfrak{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}} \boldsymbol{\mathfrak{B}} \simeq \bar{\mathfrak{B}} \ . \tag{2.19}$$

Nous aurons également besoin, dans la partie 3, de "(W, E)-décompositions" dans le sens de [BK93], (1.2). Désignant par $A(E)$ la F-algèbre $\mathrm{End}_F(E)$, la donnée d'un sous-F-espace vectoriel W de $\boldsymbol{V}$ engendré sur F par une E-base de $\boldsymbol{V}$ définit un isomorphisme de $(A(E),E)$-bimodules

$$A(E)\otimes_E \bar{B}\simeq \bar{A}\ , \tag{2.20}$$

appelé une (W,E)-*décomposition* de $\bar{A}$. Si l'on désigne par $\mathfrak{A}(E)=\mathfrak{P}_0(\{\mathfrak{p}_E^i \mid i\in\mathbb{Z}\})$ l'unique ordre E-pur de $A(E)$, et si l'on choisit W de sorte qu'il soit engendré sur F par une E-base de $\boldsymbol{V}$ décomposant $\bar{\Lambda}$, on obtient par restriction de (2.20) un isomorphisme de $(\mathfrak{A}(E),\mathfrak{o}_E)$-bimodules entre $\mathfrak{A}(E)\otimes_{\mathfrak{o}_E}\bar{\mathfrak{B}}$ et $\bar{\mathfrak{A}}$. Pour obtenir une (W,E)-décomposition de $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, il nous faut prouver le lemme suivant.

Lemme 2.19 *Il existe dans $\boldsymbol{V}$ un sous-$\mathbf{F}$-espace vectoriel W engendré sur F par une E-base de $\boldsymbol{V}$ décomposant $\boldsymbol{\Lambda}$.*

Preuve : De façon similaire au corollaire 2.18, on peut, à l'aide du lemme 2.17, se ramener à chercher une F-base de $\mathbf{F}$ qui soit également une E-base de $\mathbf{E}$ décomposant la chaîne $\{\mathfrak{p}_{\mathbf{E}}^i \mid i\in\mathbb{Z}\}$. La preuve est similaire : il suffit de choisir des éléments z_l, $1\leqslant l\leqslant[\mathbf{F}:F]$ de $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$ tels que les $z_l+\mathfrak{p}_{\mathbf{F}}$, $1\leqslant l\leqslant[\mathbf{F}:F]$, constituent une k_F-base de $k_{\mathbf{F}}$. Ils constituent du même coup une base de $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$ sur $\mathfrak{o}_F$ et, en tant que E-base de $\mathbf{E}$, décomposent la chaîne $\{\mathfrak{p}_{\mathbf{E}}^i \mid i\in\mathbb{Z}\}$. $\square$

Choisissant W de cette façon, nous obtenons pour $\boldsymbol{A}$ une (W,E)-décomposition, qui est un isomorphisme de $(\mathfrak{A}(E),\mathfrak{o}_E)$-bimodules entre $\mathfrak{A}(E)\otimes_E\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ et $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$.

Pour clore cette section, il nous reste à étudier les liens unissant les réseaux $\mathfrak{N}_k(\beta,\boldsymbol{\Lambda})$ et $\mathfrak{N}_k(\beta,\bar{\Lambda})$, pour en déduire le résultat principal de ce paragraphe. Nous désignons par a_β l'endomorphisme $\mathbf{F}$-linéaire $a_\beta(x)=\beta x-x\beta$ de $\bar{A}$.

Proposition 2.20 *Pour tout entier $k\in\mathbb{Z}$, l'isomorphisme (2.17) induit par restriction un isomorphisme de $(\mathfrak{A}(\mathbf{F}),\mathfrak{o}_{\mathbf{F}})$-bimodules*

$$\mathfrak{N}_k(\beta,\bar{\Lambda})\simeq\mathfrak{A}(\mathbf{F})\otimes_{\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}}\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k(\beta,\boldsymbol{\Lambda})\ .$$

Preuve : Nous désignerons par $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k$ (resp. par $\bar{\mathfrak{N}}_k$) le $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k(\beta,\boldsymbol{\Lambda})$ (resp. le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{N}_k(\beta,\bar{\Lambda})$). Par définition, nous avons $\bar{\mathfrak{N}}_k=\bar{\mathfrak{A}}\cap a_\beta^{-1}(\bar{\mathfrak{P}}_k)$. Compte tenu de la décomposition (2.17) et du fait que β commute à $\mathfrak{A}(\mathbf{F})$, nous avons $a_\beta^{-1}(\bar{\mathfrak{P}}_k)\simeq\mathfrak{A}(\mathbf{F})\otimes_{\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}}a_\beta^{-1}(\boldsymbol{\mathfrak{P}}_k)$. Combinant ceci avec la décomposition (2.17) pour $k=0$, on obtient le résultat cherché. $\square$

Corollaire 2.21 *On a $k_0(\beta,\boldsymbol{\Lambda})=k_0(\beta,\bar{\Lambda})$.*

Preuve : Il suffit de prouver que $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k\subset\mathfrak{B}+\mathfrak{P}$ si, et seulement si $\bar{\mathfrak{N}}_k\subset\bar{\mathfrak{B}}+\bar{\mathfrak{P}}$, et le résultat suivra du corollaire 2.11. Si $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k\subset\boldsymbol{\mathfrak{B}}+\boldsymbol{\mathfrak{P}}$, on obtient, compte tenu de la proposition 2.20 et de (2.19), l'inclusion $\bar{\mathfrak{N}}_k\subset\bar{\mathfrak{B}}+\bar{\mathfrak{P}}$. Inversement, partant de cette inclusion, l'intersection avec $\boldsymbol{A}$ donne l'inclusion $\boldsymbol{\mathfrak{N}}_k\subset\boldsymbol{\mathfrak{B}}+\boldsymbol{\mathfrak{P}}$. $\square$

Remarque 2.22 Supposons que β engendre sur F une extension non ramifiée, et choisissons $\mathbf{F}$ de sorte qu'elle contienne β. La contradiction entre le résultat ci-dessus et [BH96], (2.9) n'est qu'apparente, compte tenu du fait que le centre de $\boldsymbol{A}$ est $1 \otimes_F \mathbf{F}$, tandis que $\beta \in \mathbf{F} \otimes_F 1$.

Nous pouvons maintenant énoncer une autre définition des strates simples, équivalente à la définition 2.3 donnée dans la section 2.1. Si $\sigma = [\Lambda, n, r, \beta]$ est une strate de A, nous dirons que $\bar{\sigma} = [\bar{\Lambda}, n, r, \beta]$ est la strate de $\bar{A}$ *obtenue par déploiement* à partir de σ.

Théorème 2.23 *Une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ de A est simple si, et seulement si, la strate $[\bar{\Lambda}, n, r, \beta]$ est simple dans $\bar{A}$. En outre, toute approximation de β relativement à Λ l'est également relativement à $\bar{\Lambda}$.*

Preuve : Puisque $\mathfrak{K}(\bar{\Lambda}) \cap G = \mathfrak{K}(\Lambda)$, il ne fait aucun doute que $[\Lambda, n, r, \beta]$ est pure si et seulement si $[\bar{\Lambda}, n, r, \beta]$ est pure. Compte tenu des corollaires 2.11 et 2.21, elles sont donc simultanément simples ou non simples. Si γ est une approximation de β relativement à Λ, et si l'on pose $q = -k_0(\beta, \Lambda)$, la strate $[\Lambda, n, q, \gamma]$ est simple et équivalente à $[\Lambda, n, q, \beta]$, de sorte que $[\bar{\Lambda}, n, q, \gamma]$ est simple et équivalente à $[\bar{\Lambda}, n, q, \beta]$. Puisque $q = -k_0(\beta, \bar{\Lambda})$, il s'agit d'une approximation de β relative à $\bar{\Lambda}$. $\square$

2.3.3 Paires simples et réalisations

On pourra également consulter [BH96]. Désignons par $\overline{F}$ une clôture algébrique de F, fixée une fois pour toutes. Etant donné $\beta \in \overline{F}$, notons $E = F[\beta]$ l'extension finie engendrée par β sur F et $n_F(\beta) = -v_E(\beta)$. Il lui correspond d'une part la F-algèbre déployée $A(E) = \mathrm{End}_F(E)$, dans laquelle E se plonge naturellement, d'autre part le $\mathfrak{o}_F$-ordre E-pur $\mathfrak{A}(E)$. On peut ainsi définir son exposant critique relativement à cet ordre, que l'on note $k_F(\beta)$. Rappelons que, si $E \neq F$, nous avons toujours l'inégalité $-n_F(\beta) \leqslant k_F(\beta)$.

Définition 2.24 *Une* paire simple sur F *est une paire $[r, \beta]$ constituée d'un entier r et d'un élément $\beta \in \overline{F}$ pour lequel $r < -k_F(\beta)$.*

En d'autres termes, une paire $[r, \beta]$ est simple sur F si la strate $[\mathfrak{A}(E), n_F(\beta), r, \beta]$ de $A(E)$ qu'elle définit est simple. On désigne par $\mathrm{SP}(F)$ l'ensemble des paires simples sur F. Notons, même si nous n'en tiendrons pas compte, que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ opère naturellement sur $\mathrm{SP}(F)$. La question est de savoir dans quelle mesure un élément de $\mathrm{SP}(F)$ définit des strates simples dans d'autres F-algèbres centrales simples que $A(E)$.

Soit $[r, \beta] \in \mathrm{SP}(F)$ une paire simple sur F, et soit $E = F[\beta]$. Soit A une F-algèbre centrale simple, soit V un A-module à gauche simple et soit D l'algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$. Nous dirons que cette algèbre est *admissible* relativement à la paire simple $[r, \beta]$ s'il existe un plongement de F-algèbres ι de E dans A, c'est-à-dire si V peut être muni d'une structure de E-espace vectoriel de façon compatible avec sa D-structure. Si Λ est une $\mathfrak{o}_D$-suite de V, le couple (A, Λ) sera dit *admissible* relativement à $[r, \beta]$ s'il existe un plongement de F-algèbres ι de E dans A dont l'image est Λ-pure. Choisissons donc un couple admissible (A, Λ) et un plongement $\iota : E \to A$, posons $n_\Lambda = -\upsilon_\Lambda(\iota\beta)$, et choisissons un entier r_Λ pour lequel

$$\left[\frac{r_\Lambda}{e_E(\Lambda)}\right] = r \ .$$

De cette façon, nous obtenons une strate simple $[\Lambda, n_\Lambda, r_\Lambda, \iota\beta]$ de A, appelée une *réalisation* de la paire simple $[r, \beta]$ sur le triplet (A, Λ, ι). Nous dirons que la paire simple $[r, \beta]$ est *minimale sur* F si $-n_F(\beta) \geqslant k_F(\beta)$, c'est-à-dire si $\beta \in F$ ou si $k_F(\beta) = -n_F(\beta)$.

Proposition 2.25 *Soit* $[r, \beta]$ *une paire simple sur* F*, et soit* $[\Lambda, n_\Lambda, r_\Lambda, \iota\beta]$ *une réalisation de cette paire. Alors* $k_0(\iota\beta, \Lambda) = e_E(\Lambda)k_F(\beta)$.

Preuve : D'après [Ste01a], (4), l'exposant $k_0(\iota\beta, \bar{\Lambda})$ est égal à $e_E(\bar{\Lambda})k_F(\beta)$. D'après les corollaires 2.11 et 2.21, et puisque $e_E(\bar{\Lambda}) = e_E(\Lambda)$, on obtient l'égalité voulue. $\square$

Corollaire 2.26 *Soit* $\beta \in \overline{F}\backslash F$*. La paire simple* $[r, \beta]$ *est minimale sur* F *si et seulement si, pour l'une au moins de ses réalisations, ou de façon équivalente pour chacune d'entre elles, on a* $k_0(\iota\beta, \Lambda) = -n_\Lambda$.

Corollaire 2.27 *Soit* $\mathbf{F}$ *une extension finie non ramifiée de* F*, et soit* $[r, \beta]$ *une paire simple sur* $\mathbf{F}$*. C'est également une paire simple sur* F*, et elle est minimale sur* $\mathbf{F}$ *si et seulement si elle l'est sur* F*.*

Preuve : Puisque $\mathbf{F}/F$ est non ramifiée, on a $n_{\mathbf{F}}(\beta) = n_F(\beta)$. Notons $\mathbf{E} = \mathbf{F}[\beta]$, qu'on identifie en tant que $\mathbf{F}$-espace vectoriel à $E \otimes_F \mathbf{F}$. Nous sommes ainsi dans la situation du paragraphe 2.2.2, et la strate $[\mathfrak{A}(\mathbf{E}), n_{\mathbf{F}}(\beta), r, \beta]$ de $A(\mathbf{E})$ définie par $[r, \beta]$ sur $\mathbf{F}$ est la $\mathbf{F}/F$-montée de la strate $[\mathfrak{A}(E), n_F(\beta), r, \beta]$. D'après le corollaire (2.11), on a donc $k_{\mathbf{F}}(\beta) = k_F(\beta)$, et le résultat s'ensuit. $\square$

Proposition 2.28 *Soit* A *une* F*-algèbre centrale simple. Soit* $[\Lambda, n, q, \beta]$ *une strate pure de* A*, et soit* e *une décomposition de* A *conforme à* Λ *sur* E*. Alors, pour tout entier* $1 \leqslant i \leqslant r$*, la strate* $[\Lambda^i, n, q, \mathrm{e}^i\beta]$ *est une strate pure de* A^i*, et* $k_0(\mathrm{e}^i\beta, \Lambda^i) = k_0(\beta, \Lambda)$.

Preuve : La première affirmation provient de la proposition 2.15. Ensuite, d'après la proposition 2.25, on a les égalités $k_0(\mathrm{e}^i\beta, \Lambda^i) = e_E(\Lambda^i)k_F(\beta)$ et $k_0(\beta, \Lambda) = e_E(\Lambda)k_F(\beta)$. Puisque les $\mathfrak{o}_F$-suites Λ^i et Λ ont la même période, les entiers $e_E(\Lambda^i)$ et $e_E(\Lambda)$ sont égaux, de sorte qu'on a l'égalité entre $k_0(\mathrm{e}^i\beta, \Lambda^i)$ et $k_0(\beta, \Lambda)$. $\square$

2.3.4 Décomposition d'une strate simple

Dans ce paragraphe, on fixe une strate simple $[\Lambda, n, q, \beta]$ de A, à laquelle, suivant (2.23), il correspond la strate simple $[\bar{\Lambda}, n, q, \beta]$ de $\bar{A}$. Nous fixons en outre une décomposition $\mathrm{e} = (\mathrm{e}^i \mid 1 \leqslant i \leqslant r)$ de $\bar{A}$ conforme à $\bar{\Lambda}$ sur E, pour laquelle les notations du paragraphe précédent sont en vigueur, et nous notons $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{P}_0(\bar{\Lambda})$. Comme conséquence immédiate de la proposition 2.28, chacune des strates $[\bar{\Lambda}^i, n, q, \mathrm{e}^i\beta]$, $1 \leqslant i \leqslant r$, est simple.

Conformément au paragraphe 2.3.2, nous plongeons $\mathbf{F}$ dans $\bar{A} = \mathrm{End}_F(\boldsymbol{V})$ en le faisant opérer sur $\boldsymbol{V} = V \otimes_L \mathbf{F}$ par multiplication scalaire à droite, et nous désignons par $\boldsymbol{A}$ le commutant de $\mathbf{F}$ dans $\bar{A}$. Nous supposons que chacun des éléments de la décomposition e commute à $\mathbf{F}$. La famille e définit ainsi une décomposition de $\boldsymbol{A}$, et lorsque nous considérerons e comme une décomposition de $\boldsymbol{A}$ plutôt que de $\bar{A}$, nous la noterons $\mathbf{e} = (\mathbf{e}^i \mid 1 \leqslant i \leqslant r)$. Pour cette décomposition, les notations du paragraphe 2.3.1 sont en vigueur.

Définition 2.29 *Soit* $\mathbf{K}$ *une* $\mathbf{F}$*-algèbre commutative incluse dans* $\boldsymbol{A}$*. La décomposition* $\mathbf{e}$ *sera dite* conforme à $\boldsymbol{\Lambda}$ sur $\mathbf{K}$ *si elle est conforme à* $\boldsymbol{\Lambda}$ *et si, pour tout* $1 \leqslant i \leqslant r$*, l'idempotent* $\mathbf{e}^i$ *commute à* $\mathbf{K}$ *et* $\mathbf{e}^i\mathbf{K}$ *est un corps.*

Remarquons que, si $\mathbf{K}$ est un corps, la définition ci-dessus coïncide avec celle donné au paragraphe 2.3.1. Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on suppose que $\mathbf{e}$ est une décomposition de $\boldsymbol{A}$ conforme à $\boldsymbol{\Lambda}$ sur $\mathbf{E}$. Fixons un entier $1 \leqslant i \leqslant r$. La $\mathbf{F}$-algèbre $\boldsymbol{A}^i = \mathbf{e}^i\boldsymbol{A}\mathbf{e}^i$ peut être regardée comme le commutant de $\mathbf{F}$ dans $\bar{A}^i$. On pose $\boldsymbol{\Lambda}^i = \mathbf{e}^i\bar{\Lambda}^i$, de sorte que $\mathrm{Res}_{\mathbf{F}/F}\boldsymbol{\Lambda}^i$ est égal à $\bar{\Lambda}^i$. Compte tenu de la définition 2.29, la strate $[\boldsymbol{\Lambda}^i, n, q, \mathbf{e}^i\beta]$ est une strate pure de $\boldsymbol{A}^i$.

Théorème 2.30 *Pour tout* $1 \leqslant i \leqslant r$*, la strate* $[\boldsymbol{\Lambda}^i, n, q, \mathbf{e}^i\beta]$ *est simple.*

Preuve : Fixons un entier $1 \leqslant i \leqslant r$. Selon le corollaire 2.21, nous avons l'égalité $k_0(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i) = k_0(\mathrm{e}^i\beta, \bar{\Lambda}^i)$. Appliquant maintenant la proposition 2.28 à la strate pure $[\bar{\Lambda}^i, n, q, \mathrm{e}^i\beta]$, nous obtenons $k_0(\mathrm{e}^i\beta, \bar{\Lambda}^i) = k_0(\beta, \bar{\Lambda})$, qui est strictement inférieur à $-q$ puisque $[\bar{\Lambda}, n, q, \beta]$ est simple. □

Nous nous intéressons maintenant à la famille $(\mathbf{1}^i \mid 1 \leqslant i \leqslant r = r(\mathbf{E}))$, qui constitue une décomposition de l'algèbre $\boldsymbol{A}$ conforme à $\boldsymbol{\Lambda}$ sur $\mathbf{E}$, que l'on qualifiera de $\mathbf{E}$-*canonique*, correspondant à la décomposition de $\boldsymbol{V}$ en somme des $\mathbf{F}$-espaces vectoriels $\boldsymbol{V}^i = \mathbf{1}^i\boldsymbol{V}, 1 \leqslant i \leqslant r$. Nous appellerons $\mathbf{F}/F$*-relèvements* de β les éléments $\boldsymbol{\beta}^i = \mathbf{1}^i\beta$, $1 \leqslant i \leqslant r$, et $\mathbf{F}/F$*-relèvements* de $[\boldsymbol{\Lambda}, n, q, \beta]$ les strates simples $[\boldsymbol{\Lambda}^i, n, q, \boldsymbol{\beta}^i]$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Nous allons mettre en évidence une structure particulière sur $\boldsymbol{B}$, à savoir une structure de Γ-module induit. Celle-ci a été exploitée notamment dans [Bro98b].

Proposition 2.31 *Le* Γ*-module* $\boldsymbol{B}$ *est induit à partir du* Γ_r*-module* $\boldsymbol{B}^1$*.*

Preuve : Fixons un générateur σ de Γ, et numérotons les facteurs $\mathbf{E}^i$ de telle sorte qu'on ait $\sigma\mathbf{E}^i = \mathbf{E}^{i-1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. Désignons par $\mathbf{I}$ le Γ-module induit à partir du Γ_r-module $\boldsymbol{B}^1$, c'est-à-dire l'ensemble des r-uplets $x = (x_1, \ldots, x_r)$, avec $x_i \in \boldsymbol{B}^1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, muni de l'action de Γ définie par $\sigma \cdot x = (x_2, \ldots, x_r, \sigma^r(x_1))$. Soit $b \in \boldsymbol{B}$, et notons comme d'habitude $b_i = \mathbf{1}^i b, 1 \leqslant i \leqslant r$. Puisque $\sigma^{i-1}(\boldsymbol{B}^i) = \boldsymbol{B}^1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on lui associe un élément b^* de $\mathbf{I}$ en posant

$$b^* = (b_1, \sigma(b_2), \ldots, \sigma^{r-1}(b_r)) \ .$$

On vérifie immédiatement, compte tenu de (2.9), que l'application $b \mapsto b^*$ définit un isomorphisme Γ-équivariant de $\boldsymbol{B}$ dans $\mathbf{I}$. □

Corollaire 2.32 *Soit* $\mathbf{U}$ *un sous-groupe* Γ*-stable de* $\boldsymbol{B}^\times$ *égal au produit des* $\mathbf{U} \cap \boldsymbol{G}^i$*,* $1 \leqslant i \leqslant r$*. Alors* $\mathbf{U}$ *est induit à partir du* Γ_r*-groupe* $\mathbf{U} \cap \boldsymbol{G}^1$*.*

Preuve : Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, posons $\mathbf{U}^i = \mathbf{U} \cap \boldsymbol{G}^i$, de sorte que le produit $\mathbf{U}^1 \times \cdots \times \mathbf{U}^r$ est isomorphe à $\mathbf{U}$, et désignons par $\mathbf{I}(\mathbf{U})$ le groupe induit dont il est question. L'isomorphisme $b \mapsto b^*$ construit à la proposition 2.31 se restreint à $\mathbf{U}$ en un morphisme injectif Γ-équivariant de $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{I}(\mathbf{U})$. La décomposition d'Iwahori de $\mathbf{U}$ assure qu'il est surjectif. □

Exemple 2.33 Ceci s'applique en particulier aux sous-groupes $\mathbf{U}_k(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times$, $k \geqslant 1$. Plus généralement, posons $\mathbf{U} = \mathbf{U}_k(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times$ et, étant donné un élément $b \in B^\times$, considérons le sous-groupe $\mathbf{U}_b = b^{-1}\mathbf{U}b \cap \mathbf{U}$. Puisque b est Γ-invariant, c'est un sous-groupe Γ-stable de $\boldsymbol{B}^\times$, qui se décompose naturellement sous la forme du produit des $b_i^{-1}\mathbf{U}^i b_i \cap \mathbf{U}^i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Le Γ-groupe $\mathbf{U}_b$ s'identifie donc à un groupe induit.

2.4 Théorèmes de points fixes

Dans cette section, nous cherchons à savoir dans quelle mesure les informations obtenues sur $\bar{A}$ à partir de la strate simple $[\bar{\Lambda}, n, q, \beta]$ se ramènent à A. Comme nous l'avons déjà suggéré dans l'introduction, ce processus comporte deux étapes.

Dans un premier temps, nous introduisons le groupe cyclique $\boldsymbol{\mu} = \mu'_{\mathbf{F}}$ des racines de l'unité de $\mathbf{F}$ d'ordre premier à p, qui opère sur $\bar{A}$ par conjugaison. Puisque $\mathbf{F}$ est non ramifiée sur F, on a $\mathbf{F} = F[\boldsymbol{\mu}]$, de sorte que l'algèbre $\bar{A}^{\boldsymbol{\mu}}$ des $\boldsymbol{\mu}$-invariants de $\bar{A}$ est égale à $\boldsymbol{A}$. Si S désigne une partie $\boldsymbol{\mu}$-stable quelconque de $\bar{A}$, on a $\mathrm{S}^{\boldsymbol{\mu}} = \mathrm{S} \cap \boldsymbol{A}$. Pour les questions qui nous concernent, la cohomologie du groupe $\boldsymbol{\mu}$ est très simple. Puisque c'est un groupe fini d'ordre premier à p, le groupe $\mathrm{H}^1(\boldsymbol{\mu}, \mathrm{M})$ est trivial pour tout $\mathfrak{o}_F$-module $\boldsymbol{\mu}$-stable M de $\bar{A}$, et l'ensemble $\mathrm{H}^1(\boldsymbol{\mu}, \mathrm{U})$ est trivial pour tout pro-p-sous-groupe ouvert $\boldsymbol{\mu}$-stable U de $\bar{G}$.

Dans un second temps, nous descendons de $\boldsymbol{A}$ à A par le biais de l'action du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{F}/F)$. Nous avons déjà observé que sa cohomologie à valeurs dans les $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseaux ($\Gamma$-stables) de $\boldsymbol{A}$ est triviale. C'est également le cas pour certains sous-groupes de $\boldsymbol{G}$ qui nous concernent, mais pour des raisons moins immédiates. Nous en discutons au paragraphe 2.4.2.

2.4.1 Descente abstraite

Dans ce paragraphe, nous souhaitons formuler, dans un cadre le plus général possible, des théorèmes de points fixes. Nous désignons par G un groupe topologique localement profini. Soit Δ un groupe fini opérant continûment sur G par automorphismes, soit U un sous-groupe ouvert compact Δ-stable de G, et soit B un sous-groupe fermé Δ-stable de G. Nous appellerons *conditions de descente* les trois conditions suivantes, portant sur le triplet $(\Delta, \mathrm{B}, \mathrm{U})$:

($\mathbf{C_1}$) L'ensemble $\mathrm{H}^1(\Delta, b^{-1}\mathrm{U}b \cap \mathrm{U})$ est trivial pour tout $b \in \mathrm{B}^\Delta$.

($\mathbf{C_2}$) Si $(\mathrm{U} \cap \mathrm{B})b(\mathrm{U} \cap \mathrm{B})$ est Δ-stable, elle contient un point Δ-invariant.

($\mathbf{C_3}$) L'intersection $\mathrm{U}b\mathrm{U} \cap \mathrm{B}$ est égale à $(\mathrm{U} \cap \mathrm{B})b(\mathrm{U} \cap \mathrm{B})$, pour tout $b \in \mathrm{B}$.

La condition ($\mathbf{C_3}$) est un peu à l'écart des deux premières, dans la mesure où elle ne concerne pas le groupe Δ. Nous avons en tête deux types d'applications : d'une part le cas où $\Delta = \Gamma$, d'autre part le cas où Δ est un groupe cyclique d'ordre premier à p. Bien entendu, ce dernier cas concerne le groupe $\boldsymbol{\mu}$, mais également un autre groupe, qui sera introduit au début de la partie suivante. Le lemme qui suit n'est rien d'autre que [Ste01a], (1.1).

Lemme 2.34 *Supposons que la condition* ($\mathbf{C_1}$) *est vérifiée. Alors, pour tout* $x \in \mathrm{B}^\Delta$, *on a* $\mathrm{U}x\mathrm{U} \cap \mathrm{G}^\Delta = (\mathrm{U} \cap \mathrm{G}^\Delta)x(\mathrm{U} \cap \mathrm{G}^\Delta)$.

Il s'agit maintenant de déterminer l'ensemble des points fixes de UBU. Le lemme qui suit, ainsi que sa preuve, est adapté de [Ste01a], (1.3).

Lemme 2.35 *Supposons que les conditions de descente* ($\mathbf{C_1}$), ($\mathbf{C_2}$) *et* ($\mathbf{C_3}$) *sont vérifiées. Alors* $\mathrm{UBU} \cap \mathrm{G}^\Delta = (\mathrm{U} \cap \mathrm{G}^\Delta)(\mathrm{B} \cap \mathrm{G}^\Delta)(\mathrm{U} \cap \mathrm{G}^\Delta)$.

Preuve : Soit b un élément de B tel que la double classe $\mathrm{U}b\mathrm{U}$ contienne un Δ-invariant. L'intersection $\mathrm{U}b\mathrm{U} \cap \mathrm{B}$, égale à $(\mathrm{U} \cap \mathrm{B})b(\mathrm{U} \cap \mathrm{B})$ d'après ($\mathbf{C_3}$), est donc Δ-stable, de sorte que, selon ($\mathbf{C_2}$), elle contient un point Δ-invariant b'. Par conséquent, on a $(\mathrm{U}b\mathrm{U})^\Delta = (\mathrm{U}b'\mathrm{U})^\Delta$, égal à $\mathrm{U}^\Delta b' \mathrm{U}^\Delta$ d'après ($\mathbf{C_1}$) et le lemme 2.34.
□

Dans ce qui suit, et ce jusqu'à la fin de ce paragraphe, nous supposons que Δ est cyclique d'ordre premier à p, et que U est un pro-p-sous-groupe Δ-stable de G. Nous prouvons que les conditions de descente ($\mathbf{C_1}$) et ($\mathbf{C_2}$) sont automatiquement vérifiées dans ce cas.

Proposition 2.36 *On suppose que* Δ *est cyclique d'ordre premier à* p, *et que* U *est un pro-*p*-sous-groupe* Δ*-stable de* G. *Alors les conditions de descente* ($\mathbf{C_1}$) *et* ($\mathbf{C_2}$) *sont vérifiées quelque soit* B.

Preuve : Puisque, pour tout $x \in \mathrm{G}^\Delta$, l'intersection $\mathrm{U}_x = x^{-1}\mathrm{U}x \cap \mathrm{U}$ est un pro-p-groupe, le premier ensemble de cohomologie de Δ à valeurs dans U_x est trivial, c'est-à-dire que la condition $(\mathbf{C_1})$ est toujours vérifiée. Soit B un sous-groupe fermé Δ-stable de G, et soit $b \in \mathrm{B}$. Il s'agit de prouver que la double classe $(\mathrm{U}\cap\mathrm{B})b(\mathrm{U}\cap\mathrm{B})$ contient un Δ-invariant si et seulement si elle est Δ-stable. Posons $\mathrm{U}' = \mathrm{U} \cap \mathrm{B}$. L'une des affirmations est immédiate. Si $\mathrm{U}'b\mathrm{U}'$ contient un Δ-invariant b', alors $\mathrm{U}'b\mathrm{U}'$ est égal à $\mathrm{U}'b'\mathrm{U}'$. Comme U' est Δ-stable, le résultat s'ensuit. Inversement, nous supposons que la double classe $\mathrm{U}'b\mathrm{U}'$ est Δ-stable, ce qui revient à dire que, une fois fixé un générateur δ de Δ, il existe deux éléments $u, v \in \mathrm{U}'$ vérifiant

$$\delta^{-1}(b) = ubv^{-1} \ .$$

Soit V' un sous-groupe ouvert distingué Δ-stable de U', et désignons par U'' le quotient de U' par V'. C'est un p-groupe fini, d'ordre noté m, sur lequel opère Δ.

Lemme 2.37 *Il existe deux éléments $\alpha \in \mathrm{U}''$ et $u' \in \mathrm{H}^0(\Delta, \mathrm{U}'')$ tels que*

$$u \equiv \delta^{-1}(\alpha)u'\alpha^{-1} \pmod{\mathrm{V}'} \ .$$

Preuve : Notons n l'ordre de Δ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, désignons par $\delta^k \ltimes \mathrm{U}''$ la classe de δ^k modulo U'' dans le produit semi-direct $\Delta \ltimes \mathrm{U}''$. Notons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'élément $(\delta u)^k$ appartient à $\delta^k \ltimes \mathrm{U}''$. En particulier, l'ordre r de δu dans $\Delta \ltimes \mathrm{U}''$ est multiple de n. Ecrivons-le sous la forme $r = nr'$, où r' est une puissance de p, et écrivons $1 = an + br'$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Posons alors $\gamma = (\delta u)^{an}$ et $\beta = (\delta u)^{br'}$, de sorte que $\delta u = \gamma\beta$. Puisque δ est d'ordre n, l'élément γ appartient à U'' et, puisque br' est congru à 1 modulo n, l'élément β appartient à la classe $\delta \ltimes \mathrm{U}''$. Ecrivons-le $\beta = \delta a$, avec $a \in \mathrm{U}''$. Comme $\beta^n = 1$, l'élément a définit un 1-cocycle de Δ à valeurs dans U''. Les entiers n et m étant premiers entre eux, l'ensemble de cohomologie $\mathrm{H}^1(\Delta, \mathrm{U}'')$ est trivial, en conséquence de quoi il existe un élément $\alpha \in \mathrm{U}''$ pour lequel $\beta = \alpha^{-1}\delta\alpha$. Posons maintenant $u' = \delta^{-1}(\alpha)u\alpha^{-1}$, de sorte qu'il nous reste

$$u' = (\delta u')^{an} \ .$$

Il reste à voir que $\delta^{-1}u'\delta = (u'\delta)^{an}$ est égal à $u'(\delta u')^{an}u'^{-1} = u'$, c'est-à-dire que l'élément u' est invariant par Δ. $\square$

Ecrivons également v sous la forme $v \equiv \delta(\beta)^{-1}v'\beta \pmod{\mathrm{V}'}$, avec $\beta \in \mathrm{U}''$. Posons alors $c = \alpha b\beta^{-1}$, de façon à obtenir (modulo V')

$$\delta^{-1}(c) = u'cv'^{-1} \ . \tag{2.21}$$

Puisque u' et v' sont Δ-invariants, on en déduit que $c = u'^n cv'^{-n}$, ou encore que $v'^n = (c^{-1}u'c)^n$. Puisque n est inversible modulo l'ordre de U'', il existe deux entiers a et b tels que $v' = v'^{an}$ et $c^{-1}u'c = (c^{-1}u'c)^{bn}$, de sorte que $v' = c^{-1}u'c$. Ceci donne, conjointement à (2.21), l'égalité $\delta(c) = c$.

Puisque U' est un pro-p-groupe, filtrons-le par une famille strictement décroissante $(\mathrm{U}'_i)_{i\geqslant 1}$ de sous-groupes ouverts distingués Δ-stables dont l'intersection est réduite à $\{1\}$. Au vu de ce qui précède, nous pouvons choisir, pour tout entier $i \geqslant 1$, un élément c_i de $\mathrm{U}'b\mathrm{U}'$ tel que $c_i^{-1}\delta(c_i) \in \mathrm{U}'_i$. Puisque $\mathrm{U}'b\mathrm{U}'$ est compact, la suite $(c_i)_{i\geqslant 1}$ admet une valeur d'adhérence $c \in \mathrm{U}'b\mathrm{U}'$, et celle-ci vérifie $c^{-1}\delta(c) = 1$, ce qui prouve que $\mathrm{U}'b\mathrm{U}'$ contient un point Δ-invariant. □

2.4.2 Cohomologie galoisienne

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans la même situation que celle de 2.2.2. Soit A une F-algèbre centrale simple, soit V un A-module à gauche simple et soit D l'algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$. On note d le degré réduit de D/F et m la dimension de V sur D. On fixe une strate pure $[\Lambda, n, q, \beta]$ de A, à laquelle correspond par $\mathbf{F}/F$-montée externe la strate $[\boldsymbol{\Lambda}, n, q, \beta]$ de $\boldsymbol{A} = A \otimes_F \mathbf{F}$. La $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-suite $\boldsymbol{\Lambda}$ munit l'algèbre $\boldsymbol{A}$ de la filtration $\boldsymbol{\mathfrak{P}}_k = \mathfrak{P}_k(\boldsymbol{\Lambda})$, ce qui permet de filtrer les $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseaux de $\boldsymbol{A}$. Nous allons étudier la cohomologie de Γ à valeurs dans certains sous-groupes Γ-stables des groupes $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^\times$ et $\boldsymbol{B}^\times$.

Proposition 2.38 *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau Γ-stable de $\boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{U} = 1 + \boldsymbol{M}$ soit un sous-groupe de $\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\Lambda})$. Alors $\mathrm{H}^1(\Gamma, \boldsymbol{U})$ est trivial.*

Preuve : Filtrons le $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau $\boldsymbol{M}$ par les $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseaux $\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{\mathfrak{P}}_i$, $i \geqslant 1$, et le groupe $\boldsymbol{U}$ par les sous-groupes $\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{U} \cap \mathrm{U}_i(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) = 1 + \boldsymbol{M}_i$, $i \geqslant 1$. Puisque, pour tout $i \geqslant 1$, les $\boldsymbol{\mathfrak{P}}_i$ sont Γ-stables, il en est de même de $\boldsymbol{M}_i$ et de $\boldsymbol{U}_i$. On vérifie immédiatement que l'isomorphisme de groupes abéliens

$$\boldsymbol{\mathfrak{P}}_i/\boldsymbol{\mathfrak{P}}_{i+1} \simeq \mathbf{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})/\mathbf{U}_{i+1}(\boldsymbol{\Lambda}) \tag{2.22}$$

défini par $x \mapsto 1 + x$ induit un isomorphisme Γ-équivariant de groupes abéliens entre $\boldsymbol{M}_i/\boldsymbol{M}_{i+1}$ et $\boldsymbol{U}_i/\boldsymbol{U}_{i+1}$, en conséquence de quoi, selon (2.2), le premier groupe de cohomogie de $\boldsymbol{U}_i/\boldsymbol{U}_{i+1}$ est trivial. Il reste à appliquer un analogue non abélien de [Ser68], (XII.3), lemme 3. Ceci termine la démonstration de la proposition 2.38. □

Nous aurons besoin par la suite de connaître également la cohomologie de Γ à valeurs dans certains sous-groupes de $\boldsymbol{B}^\times$. L'algèbre $\boldsymbol{B}$ n'étant pas centrale simple en général, nous ne pouvons pas directement avoir recours à la proposition 2.38, même si les arguments utilisés dans la preuve que nous en donnons sont encore valables. Nous avons préféré procéder comme suit.

Proposition 2.39 *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}}$-réseau Γ-stable de $\boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{U} = 1 + \boldsymbol{M}$ soit un sous-groupe de $\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\Lambda})$ admettant une décomposition d'Iwahori. Alors $\mathrm{H}^1(\Gamma, \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{B}^\times)$ est trivial.*

Preuve : On identifie $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}^1/E)$ au sous-groupe Γ_r de Γ. D'après le corollaire 2.32, le Γ-groupe $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{B}^\times$ est induit à partir du Γ_r-groupe $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{B}^{1\times}$, de sorte que, selon [Ser94], (5.8) *b*), l'ensemble de cohomologie $\mathrm{H}^1(\Gamma, \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{B}^\times)$ est égal à

$\mathrm{H}^1(\Gamma_r, \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{B}^{1\times})$. Désignons par $\mathfrak{A}$ l'ordre héréditaire de $\boldsymbol{A}$ défini par $\boldsymbol{\Lambda}$, et par $\mathfrak{B}^1$ l'intersection $\mathfrak{A} \cap \boldsymbol{B}^1$, qui est un ordre héréditaire de la $\mathbf{E}^1$-algèbre centrale simple $\boldsymbol{B}^1$. Puisque $\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{B}^1$ est un $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}^1}$-réseau Γ_r-stable de $\boldsymbol{B}^1$, et que $1+\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{B}^1 = \boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{B}^{1\times}$ est un sous-groupe de $\mathbf{U}^1(\mathfrak{A}) \cap \boldsymbol{B}^{1\times} = \mathrm{U}^1(\mathfrak{B}^1)$, on peut appliquer la proposition 2.38. □

2.4.3 Descente galoisienne

Dans ce paragraphe, nous examinons la validité des conditions de descente $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{C_2})$ relativement au triplet $(\Gamma, \boldsymbol{B}^\times, \boldsymbol{U})$, où $\boldsymbol{U}$ est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\Lambda})$ de la forme $1 + \boldsymbol{M}$, avec $\boldsymbol{M}$ un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau Γ-stable de $\boldsymbol{A}$.

Proposition 2.40 *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau Γ-stable de $\boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{U} = 1 + \boldsymbol{M}$ soit un sous-groupe de $\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\Lambda})$. Alors les conditions de descente $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{C_2})$ sont automatiquement vérifiées pour le triplet $(\Gamma, \boldsymbol{B}^\times, \boldsymbol{U})$.*

Preuve : Soit $x \in G$ un point Γ-invariant, et soit $\boldsymbol{M}$ un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau Γ-stable de $\boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{U} = 1+\boldsymbol{M}$ soit un sous-groupe de $\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\Lambda})$. En appliquant la proposition 2.38 au $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau $x^{-1}\boldsymbol{M}x \cap \boldsymbol{M}$, qui est Γ-stable puisque l'action de x par conjugaison commute à celle de Γ, on voit que l'ensemble de cohomologie $\mathrm{H}^1(\Gamma, x^{-1}\boldsymbol{U}x \cap \boldsymbol{U})$ est trivial. En d'autres termes, la condition $(\mathbf{C_1})$ est vérifiée. La condition $(\mathbf{C_2})$ est nettement plus délicate à prouver.

Proposition 2.41 *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-***module** *$\Gamma$-stable de $\boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{U} = 1 + \boldsymbol{M}$ soit un sous-groupe de $\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\Lambda})$. Soit en outre $g \in \boldsymbol{G}$. Alors la double classe $\boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$ contient un Γ-invariant si et seulement si elle est stable par Γ.*

Preuve : L'une des affirmations est immédiate. Si $\boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$ contient un Γ-invariant γ, alors $\boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$ est égal à $\boldsymbol{U}\gamma\boldsymbol{U}$. Comme $\boldsymbol{M}$, et donc $\boldsymbol{U}$, est Γ-stable, le résultat s'ensuit. Avant d'établir l'affirmation réciproque, nous commençons par remarquer que, $1 + \boldsymbol{M}$ étant un sous-groupe, le module $\boldsymbol{M}$ est stable par multiplication, puis nous démontrons le lemme suivant.

Lemme 2.42 *Soient $\gamma \in G$ et $m, n \in \boldsymbol{M}$. On note t le plus grand entier tel que $\gamma \in \mathfrak{P}_t$, et $j \geqslant 1$ un entier tel que $m\gamma + \gamma n + m\gamma n \in \mathfrak{P}_{t+j}$. Alors*

$$m\gamma + \gamma n + m\gamma n \in \boldsymbol{M}\gamma + \gamma\boldsymbol{M} + \mathfrak{P}_{t+j+1} \ . \qquad (2.23)$$

Preuve : Nous allons prouver par récurrence sur l'entier r que l'on a

$$m\gamma + \gamma n + m\gamma n \equiv m\gamma + \gamma(n - n^2 - \cdots - (-n)^r) \pmod{\mathfrak{P}_{t+r}} \ , \qquad (2.24)$$

pour tout $1 \leqslant r \leqslant j + 1$. Pour $r = 1$, le résultat est immédiat. Supposons donc l'égalité (2.24) vraie pour un entier $1 \leqslant r \leqslant j$. Puisque $r \leqslant j$, on a $m\gamma+\gamma n+m\gamma n \in \mathfrak{P}_{t+j} \subset \mathfrak{P}_{t+r}$, de sorte que l'on a, par hypothèse de récurrence, $m\gamma + \gamma(n - n^2 - \cdots - (-n)^r) \in \mathfrak{P}_{t+r}$. En multipliant ceci par n à droite, on en déduit que

$$m\gamma n \equiv -\gamma n^2 + \gamma n^3 + \cdots - \gamma(-n)^{r+1} \pmod{\mathfrak{P}_{t+r+1}} \ . \qquad (2.25)$$

On obtient donc (2.24) au rang $r+1$. En choisissant $r=j$, et compte tenu du fait que $n-n^2-\cdots-(-n)^{j+1}$ appartient à $\boldsymbol{M}$ (puisque celui-ci est stable par multiplication), on obtient le lemme 2.42. $\square$

Supposons donc que la double classe $\boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$ est Γ-stable, et notons t le plus grand entier tel que $g \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}_t$.

Lemme 2.43 *Pour tout entier $j \geqslant 1$, il existe deux éléments $g_j \in \boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$ et $\gamma_j \in G$ tels que $g_j \equiv \gamma_j \pmod{\boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j}}$.*

Preuve : Nous procédons par récurrence sur l'entier j. Puisque $\boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$ est Γ-stable, il existe $m, n \in \boldsymbol{M}$ tels que l'on a $\sigma(g) = (1+m)g(1+n)$, ou encore

$$\sigma(g) - g = mg + gn + mgn \ . \tag{2.26}$$

Etant donné que $\boldsymbol{M}$ est inclus dans $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$, l'égalité (2.26) définit un cocycle à valeurs dans $\boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+1}$, qui, d'après (2.2), est cohomologiquement trivial. Par conséquent, il existe $y_1 \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+1}$ tel que $\sigma(g) - g = \sigma(y_1) - y_1$, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma_1 \in A$ tel que $g = y_1 + \gamma_1$. Par densité de G dans A, quitte à modifier y_1, on peut supposer que $\gamma_1 \in G$. Par conséquent, en posant $g_1 = g$, on a démontré le lemme 2.43 pour $j = 1$.

Nous supposons maintenant que le lemme 2.43 est vrai pour un entier $j \geqslant 1$. Il existe donc $g_j \in \boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}, \gamma_j \in G$ et $y_j \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j}$ tels que $g_j = \gamma_j + y_j$. De façon analogue à (2.26), la double classe $\boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$ étant Γ-stable, il existe $m, n \in \boldsymbol{M}$ tels que l'on ait

$$\sigma(g_j) - g_j = mg_j + g_jn + mg_jn \ , \tag{2.27}$$

c'est-à-dire

$$\sigma(y_j) - y_j \equiv m\gamma_j + \gamma_j n + m\gamma_j n \pmod{\boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j+1}} \ , \tag{2.28}$$

puisque la quantité $my_j + y_jn + my_jn$ appartient à $\boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j+1}$. D'autre part, y_j appartient au réseau Γ-stable $\boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j}$, et donc la différence $\sigma(y_j) - y_j$ aussi. On peut appliquer à $\gamma = \gamma_j$ le lemme 2.42, dont on déduit que (2.28) définit un cocycle à valeurs dans le $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau

$$\mathfrak{r}_j = \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j} \cap (\boldsymbol{M}\gamma_j + \gamma_j\boldsymbol{M} + \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j+1}) \ , \tag{2.29}$$

qui est bien un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau, et qui est manifestement Γ-stable, donc cohomologiquement trivial d'après (2.2). Par conséquent, il existe un élément $z \in \mathfrak{r}_j$ tel que $\sigma(y_j) - y_j = \sigma(z) - z$, élément que l'on peut écrire sous la forme $z = \gamma_j a + b\gamma_j + c$, avec

$$a, b \in \boldsymbol{M} \ , \quad c \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j+1} \ , \quad \gamma_j a + b\gamma_j \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j} \ ,$$

la dernière appartenance provenant du fait que $z \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j}$ et $c \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}_{t+j+1}$. Ainsi il existe $\delta \in \mathfrak{P}_{t+j}$ tel que $y_j = z + \delta$ et, quitte à modifier z, on peut supposer que l'élément $\gamma_{j+1} = \gamma_j + \delta$ est inversible, c'est-à-dire appartient à G. Posons maintenant

$$g_{j+1} = (1-b)g_j(1+a)^{-1} \ , \tag{2.30}$$

quantité qui appartient bien à $\boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$. Puisque $g_j = \gamma_{j+1} + z$, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} g_{j+1} &= (1-b)(\gamma_{j+1} + \gamma_j a + b\gamma_j + c)(1+a)^{-1} \\ &= (1-b)(\gamma_{j+1} + \gamma_{j+1} a + b\gamma_{j+1} + c - \delta a - b\delta)(1+a)^{-1} \\ &\equiv (1-b)(\gamma_{j+1} + \gamma_{j+1} a + b\gamma_{j+1})(1+a)^{-1} \pmod{\mathfrak{P}_{t+j+1}} \end{aligned}$$

car la quantité $c - \delta a - b\delta$ appartient à $\mathfrak{P}_{t+j+1}$. Puis, compte tenu du fait que $-b(\gamma_j a + b\gamma_j) \in \mathfrak{P}_{t+j+1}$, on trouve

$$\begin{aligned} g_{j+1} &\equiv (\gamma_{j+1} + \gamma_{j+1} a - b(\gamma_j a + b\gamma_j))(1+a)^{-1} \pmod{\mathfrak{P}_{t+j+1}} , \\ &\equiv (\gamma_{j+1} + \gamma_{j+1} a)(1+a)^{-1} \pmod{\mathfrak{P}_{t+j+1}} \\ &\equiv \gamma_{j+1} \pmod{\mathfrak{P}_{t+j+1}} , \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme 2.43. □

Nous disposons donc de deux suites $(g_j)_{j\geqslant 1}$ et $(\gamma_j)_{j\geqslant 1}$, et la première appartient au compact $\boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$, de sorte qu'on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $\boldsymbol{U}g\boldsymbol{U}$, vers une limite notée x. Etant donné que $g_j - \gamma_j \in \mathfrak{P}_{t+j}$, on en déduit qu'une sous-suite de $(\gamma_j)_{j\geqslant 1}$ converge elle aussi vers x, de sorte que x est Γ-invariant. La démonstration de la proposition 2.41 est terminée. □

Nous terminons maintenant la preuve de la proposition 2.40. Soit $b \in \boldsymbol{B}^\times$ tel que la double classe $(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{B}^\times)b(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{B}^\times)$ soit Γ-stable. Pour prouver qu'elle admet un point Γ-invariant, il suffit d'appliquer la proposition 2.41 au sous-$\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-module $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{A}$. □

Nous terminons ce paragraphe par le lemme suivant, qui décrit le comportement de la dualité vis-à-vis de la descente galoisienne. Rappelons que, pour tout sous-$\mathfrak{o}_F$-module M de A, on note $M_{\mathbf{F}} = M \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$.

Lemme 2.44 *Soit M un sous-$\mathfrak{o}_F$-module de A. On a $\mathrm{H}^0(\Gamma, M_{\mathbf{F}}^*) = M^*$.*

Preuve : Soit $x \in M^*$. Pour montrer que $x \in M_{\mathbf{F}}^*$, il suffit de montrer que $\boldsymbol{\psi}(x\boldsymbol{y}) = 1$ pour tout $\boldsymbol{y} \in M_{\mathbf{F}}$ de la forme $\boldsymbol{y} = y \otimes \lambda$, avec $y \in M$ et $\lambda \in \mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$. Soit donc $\boldsymbol{y} = y \otimes \lambda$ comme indiqué. On a, par $\mathbf{F}$-linéarité de la trace sur $\boldsymbol{A}$,

$$\mathrm{tr}_{\boldsymbol{A}/\mathbf{F}}(x\boldsymbol{y}) = \mathrm{tr}_{\boldsymbol{A}/\mathbf{F}}(xy \otimes \lambda) = \mathrm{tr}_{A/F}(xy)\lambda \ .$$

Puisque M est un $\mathfrak{o}_F$-module, l'ensemble $\mathrm{tr}_{A/F}(xM)$ des $\mathrm{tr}_{A/F}(xy)$ lorsque y décrit M est un sous-$\mathfrak{o}_F$-module de F, c'est-à-dire une puissance de $\mathfrak{p}_F$. Puisque, par hypothèse sur x, on a $\mathrm{tr}_{A/F}(xM) \subset \mathrm{Ker}\ \psi_F$, il vient

$$\mathrm{tr}_{A/F}(xM) \subset \mathfrak{p}_F \ ,$$

compte tenu du fait que $\mathfrak{p}_F$ est le plus grand sous-$\mathfrak{o}_F$-module de F inclus dans $\mathrm{Ker}\ \psi_F$. Ainsi, le $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-module $\mathrm{tr}_{A/F}(xM)\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$ est inclus dans $\mathfrak{p}_{\mathbf{F}}$, lui-même inclus dans $\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}$, de sorte qu'on a bien $x \in M_{\mathbf{F}}^*$. L'inclusion contraire est immédiate. □

3 Caractères simples

3.1 Caractères simples attachés à une suite de réseaux

Dans toute cette section, nous adoptons les notations suivantes. Comme d'habitude, la lettre F désigne un corps local commutatif non archimédien. On désigne par E une extension finie de F, par β un élément de E tel que $F[\beta] = E$, par V^0 un E-espace vectoriel de dimension finie et par Λ^0 une $\mathfrak{o}_E$-suite de V^0, de période notée e. De cette façon, on dispose sur la F-algèbre $A^0 = \mathrm{End}_F(V^0)$ d'une strate pure $[\Lambda^0, n, 0, \beta]$.

Le but de cette section est d'étendre au cas d'une suite de réseaux un certain nombre de résultats, relatifs à la strate $[\Lambda^0, n, 0, \beta]$, obtenus dans [BK93] lorsque Λ^0 est une chaîne. Le procédé que nous utilisons pour nous ramener à une chaîne, en se plaçant dans une algèbre plus grosse, est dû à [BK99]. Ceci évite d'avoir à reprendre *in extenso* toutes les démonstrations de [BK93] pour les généraliser à une suite de réseaux.

3.1.1 Préliminaires

On désigne par V^1 un E-espace vectoriel de dimension finie et par Λ^1 une $\mathfrak{o}_E$-chaîne de période e de V^1, de sorte que $[\Lambda^1, n, 0, \beta]$ est une strate pure de $A^1 = \mathrm{End}_F(V^1)$. On note $V = V^0 \oplus V^1$ ainsi que $\Lambda = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1$, qui est une $\mathfrak{o}_E$-chaîne de V, et $A = \mathrm{End}_F(V)$. Dans toute cette section, on suppose que la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ de A est simple, de sorte que les strates $[\Lambda^0, n, 0, \beta]$ et $[\Lambda^1, n, 0, \beta]$ sont elles-mêmes simples, et on pose $q = -k_0(\beta, \Lambda)$. Nous notons $\psi = \psi_F \circ \mathrm{tr}_{A/F}$, ainsi que $\psi^0 = \psi_F \circ \mathrm{tr}_{A^0/F}$. Notons enfin $\mathbf{1}^0$ et $\mathbf{1}^1$ les idempotents de A attachés à la décomposition $V = V^0 \oplus V^1$, et adoptons les notations en vigueur au paragraphe 2.3.1. En particulier, si $a \in A$, nous notons $a_{ij} = \mathbf{1}^i a \mathbf{1}^j$ pour $i, j \in \{0, 1\}$, ainsi que $a_i = a_{ii}$, et nous notons M, U, U^- les sous-groupes de $G = \mathrm{Aut}_F(V)$ définis par (2.12).

Pour pouvoir passer de A à A^0, nous cherchons un contexte de descente qui rentrerait dans le cadre décrit au paragraphe 2.4.1. Pour cela, fixons une extension finie non ramifiée $\mathbf{F}/F$ non triviale, choisie de façon que $\mathbf{F}[\beta]$ soit un corps (il suffit que le degré de $\mathbf{F}/F$ soit premier à $f_{E/F}$). Posons $\boldsymbol{A} = A \otimes_F \mathbf{F}$ et notons $\boldsymbol{G}$ son groupe multiplicatif. Les idempotents $\mathbf{1}^0$ et $\mathbf{1}^1$ définissent une décomposition de $\boldsymbol{A}$ et, pour $i \in \{0, 1\}$, nous notons $\boldsymbol{A}^i = \mathbf{1}^i \boldsymbol{A} \mathbf{1}^i$, ainsi que $\boldsymbol{G}^i$ son groupe multiplicatif. La $\mathbf{F}$-algèbre $\boldsymbol{A}^i$ peut également être considérée comme étant la $\mathbf{F}/F$-montée de la F-algèbre A^i. Choisissons dans $\mathbf{F}$ une racine de l'unité ξ, **non triviale** et d'ordre premier à p, et désignons par Ξ le sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ engendré par $\xi \cdot \mathbf{1}^0 + \mathbf{1}^1$. La racine ξ étant non triviale, le centralisateur de Ξ dans $\boldsymbol{G}$ est égal au sous-groupe $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G}^0 \times \boldsymbol{G}^1$ défini en (2.12) par la décomposition $(\mathbf{1}^0, \mathbf{1}^1)$ de l'algèbre $\boldsymbol{A}$. Ce groupe est cyclique et d'ordre premier à p, ce qui nous place dans une situation étudiée au paragraphe 2.4.1.

Remarque 3.1 Tant que le corps résiduel k_F a au moins trois éléments, on peut se contenter de choisir $\mathbf{F} = F$ dans ce qui précède. Ce n'est plus possible si $k_F = \mathbb{F}_2$ puisque, dans ce cas, F ne possède pas de racine de l'unité non triviale d'ordre impair.

Ceci étant dit, associons à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ sa montée externe $[\boldsymbol{\Lambda}, n, 0, \beta]$. Puisque $\mathbf{F}[\beta]$ est un corps, c'est une strate simple de $\boldsymbol{A}$. Fixons un entier $i \in \{0, 1\}$, et posons $\boldsymbol{\Lambda}^i = \mathbf{1}^i\boldsymbol{\Lambda}$. Alors la strate $[\boldsymbol{\Lambda}^i, n, 0, \beta]$ est une strate simple de $\boldsymbol{A}^i$, et peut être également considérée comme la montée externe de la strate simple $[\Lambda^i, n, 0, \beta]$. Pour $i \in \{0, 1\}$, nous désignons par B^i le commutant de E dans A^i, par B celui de E dans A, et les notations $\boldsymbol{B}^i$, $\boldsymbol{B}$ ont également leur signification habituelle.

Proposition 3.2 *Soit $x \in B^{0\times}$. Pour tout entier $i \geqslant 1$, on a*

$$\mathrm{U}_i(\Lambda^0)x\mathrm{U}_i(\Lambda^0) \cap B^{0\times} = \Big(\mathrm{U}_i(\Lambda^0) \cap B^{0\times}\Big)x\Big(\mathrm{U}_i(\Lambda^0) \cap B^{0\times}\Big) \ .$$

Preuve : Il s'agit de la propriété d'intersection simple, qui généralise [BK93], (1.6.1). Puisque $\boldsymbol{\Lambda}$ est une chaîne, nous pouvons appliquer *ibid.* à la strate simple $[\boldsymbol{\Lambda}, n, 0, \beta]$, de sorte que

$$\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})x\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times = (\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times)x(\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times) \ . \tag{3.1}$$

D'après la proposition 2.36 et le lemme 2.34, l'ensemble des points de $\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})x\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})$ fixes par Ξ est le sous-groupe $(\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0) \times \mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^1))x(\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0) \times \mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^1))$, dont la projection sur $\boldsymbol{G}^0$ est égale à $\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0)x(\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0)$. De ce fait, l'intersection avec $\boldsymbol{G}^0$ du membre de gauche de (3.1) est égale à $\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0)x(\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0) \cap \boldsymbol{B}^{0\times}$. Raisonnant de la même façon avec le membre de droite, on obtient l'égalité

$$\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0)x\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0) \cap \boldsymbol{B}^{0\times} = (\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0) \cap \boldsymbol{B}^{0\times})x(\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0) \cap \boldsymbol{B}^{0\times}) \ . \tag{3.2}$$

D'après la proposition 2.40 et le lemme 2.34, l'ensemble des points de $\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0)x\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}^0)$ fixes par le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}/F)$ est le sous-groupe $\mathrm{U}_i(\Lambda^0)x\mathrm{U}_i(\Lambda^0)$. D'autre part, d'après la proposition 2.39, l'ensemble des points $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}/F)$-fixes du membre de droite de (3.2) est $(\mathrm{U}_i(\Lambda^0) \cap B^{0\times})x(\mathrm{U}_i(\Lambda^0) \cap B^{0\times})$, de sorte qu'on obtient l'égalité voulue. □

Corollaire 3.3 *Soient A une F-algèbre centrale simple et $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate simple de A. Notons B le commutant de β dans A. Pour tout $x \in B^\times$ et pour tout entier $i \geqslant 1$, on a*

$$\mathrm{U}_i(\Lambda)x\mathrm{U}_i(\Lambda) \cap B^\times = \Big(\mathrm{U}_i(\Lambda) \cap B^\times\Big)x\Big(\mathrm{U}_i(\Lambda) \cap B^\times\Big) \ . \tag{3.3}$$

Preuve : Choisissons une extension finie non ramifiée $\mathbf{F}/F$ comme en 2.2.2, et appliquons la proposition 3.2 à la strate simple $[\bar{\Lambda}, n, 0, \beta]$ de la F-algèbre déployée $\bar{A}$ et à un élément $x \in \bar{B}^\times$ quelconque, de façon à obtenir l'égalité

$$\mathrm{U}_i(\bar{\Lambda})x\mathrm{U}_i(\bar{\Lambda}) \cap \bar{B}^\times = (\mathrm{U}_i(\bar{\Lambda}) \cap \bar{B}^\times)x(\mathrm{U}_i(\bar{\Lambda}) \cap \bar{B}^\times) \ . \tag{3.4}$$

Supposons maintenant que $x \in \boldsymbol{B}^\times$. D'après la proposition 2.36 et le lemme 2.34, l'ensemble des points $\boldsymbol{\mu}$-invariants de $\mathrm{U}_i(\bar{\Lambda})x\mathrm{U}_i(\bar{\Lambda})$ est le sous-groupe $\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})x\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})$. De ce fait, la trace sur $\boldsymbol{G}$ du membre de gauche de (3.4) vaut $\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})x(\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times$. Raisonnant de la même façon avec le membre de droite, on obtient l'égalité

$$\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})x\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times = (\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times)x(\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times) \ . \tag{3.5}$$

Supposons enfin que $x \in B^\times$. D'après la proposition 2.40 et le lemme 2.34, l'ensemble des points de $\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})x\mathrm{U}_i(\boldsymbol{\Lambda})$ fixes par Γ est le sous-groupe $\mathrm{U}_i(\Lambda)x\mathrm{U}_i(\Lambda)$. D'autre part, d'après la proposition 2.39, l'ensemble des points Γ-fixes du membre de droite de (3.5) est $(\mathrm{U}_i(\Lambda) \cap B^\times)x(\mathrm{U}_i(\Lambda) \cap B^\times)$, de sorte qu'on obtient l'égalité voulue. $\square$

3.1.2 Entrelacement des caractères simples

Commençons par nous occuper de la strate simple $[\Lambda, n, 0, \beta]$. Puisque Λ est une chaîne, nous noterons $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_0(\Lambda)$ l'ordre héréditaire qui lui est associé et $\mathfrak{P}$ son radical, et nous désignerons cette strate simple par $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$. Il lui correspond donc, suivant [BK93], (3.1.7), (3.1.8), et (3.2.3), d'une part deux familles de $\mathfrak{o}_F$-réseaux $\mathfrak{J}^k = \mathfrak{J}^k(\beta, \mathfrak{A})$ et $\mathfrak{H}^k = \mathfrak{H}^k(\beta, \mathfrak{A})$, $k \geqslant 0$, auxquels sont associés les sous-groupes ouverts compacts $J^k = \mathfrak{J}^k \cap \mathrm{U}^k(\mathfrak{A})$ et $H^k = \mathfrak{H}^k \cap \mathrm{U}^k(\mathfrak{A})$, $k \geqslant 0$, d'autre part, pour tout entier $0 \leqslant m < q$, un ensemble $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ de caractères du groupe H^{m+1}. Rappelons que, selon [BK93], (3.3.21), les morphismes de restriction $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A}) \to \mathscr{C}(\beta, m+1, \mathfrak{A})$ sont surjectifs. Désignons par $B = \mathrm{End}_E(V)$ le commutant de E dans A, et posons $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$. Puisque $\mathbf{1}^0$ et $\mathbf{1}^1$ appartiennent tous deux à $\mathfrak{B}$, ils définissent une décomposition conforme à $\mathfrak{A}$ sur E. Par conséquent, pour tout sous-$(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$-bimodule $\mathscr{M}$ de A, on a $\mathbf{1}^i \mathscr{M} \mathbf{1}^i = \mathscr{M} \cap A^i$, pour $i \in \{0, 1\}$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbf{1}^i \mathfrak{P}^k \mathbf{1}^i = \mathfrak{P}_k(\Lambda^i)$, et ceci s'applique aussi aux $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$-bimodules $\mathfrak{J}^k$ et $\mathfrak{H}^k$. En vertu de [BK99], (5.2) et (5.4), nous avons, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$\mathbf{1}^i \mathfrak{J}^k \mathbf{1}^i = \mathfrak{J}^k(\beta, \Lambda^i) \quad \text{et} \quad \mathbf{1}^i \mathfrak{H}^k \mathbf{1}^i = \mathfrak{H}^k(\beta, \Lambda^i) \ .$$

Nous associons à ces $\mathfrak{o}_F$-réseaux les sous-groupes ouverts compacts $J^k(\beta, \Lambda^i) = \mathfrak{J}^k(\beta, \Lambda^i) \cap \mathrm{U}_k(\Lambda^i)$ et $H^k(\beta, \Lambda^i) = \mathfrak{H}^k(\beta, \Lambda^i) \cap \mathrm{U}_k(\Lambda^i)$, $k \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$, si $x \in H^k$, on a $x_0 \in H^k(\beta, \Lambda^0)$ et $x_1 \in H^k(\beta, \Lambda^1)$.

Fixons un entier $0 \leqslant m < q$, ainsi que $i \in \{0, 1\}$. Suivant [BK99], (5.2) et (5.4), l'ensemble

$$\mathscr{C}(\beta, m, \Lambda^i) = \{\theta | H^{m+1}(\beta, \Lambda^i) \ ; \ \theta \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})\} \tag{3.6}$$

est l'ensemble des caractères simples de $H^{m+1}(\beta, \Lambda^i)$ attachés à la strate simple $[\Lambda^i, n, 0, \beta]$. On voit aisément que les morphismes de restriction de $\mathscr{C}(\beta, m, \Lambda^0)$ à $\mathscr{C}(\beta, m+1, \Lambda^0)$ sont également surjectifs. D'après *ibid.*, le groupe H^{m+1} admet une décomposition d'Iwahori relativement à $(\mathbf{1}^0, \mathbf{1}^1)$, et la restriction d'un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ aux sous-groupes $H^{m+1} \cap U$ et $H^{m+1} \cap U^-$ est triviale. On en déduit le lemme suivant.

Lemme 3.4 *Soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ et, pour $i \in \{0,1\}$, notons θ^i la restriction de θ à $H^{m+1}(\beta, \Lambda^i)$. Pour tout $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H^{m+1}$, on a*

$$\theta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \theta^0(a)\theta^1(d - ca^{-1}b) \ .$$

PREUVE : Puisque $a \in H^{m+1}(\beta, \Lambda^0)$ est inversible, nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

qui est l'unique décomposition de x relative à la décomposition d'Iwahori de H^{m+1}. Par conséquent, $d - ca^{-1}b$ appartient à $H^{m+1}(\beta, \Lambda^1)$, et le résultat s'ensuit. $\square$

Associons à l'entier q les deux entiers $r = [q/2] + 1$ et $s = [(q+1)/2]$. Rappelons que $-q$ est également l'exposant critique, selon la proposition 2.28, de chacune des strates simples $[\Lambda^0, n, 0, \beta]$ et $[\Lambda^1, n, 0, \beta]$, ainsi que, selon le corollaire 2.11 de $[\boldsymbol{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$, $[\boldsymbol{\Lambda}^0, n, 0, \beta]$ et $[\boldsymbol{\Lambda}^1, n, 0, \beta]$, où $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ désigne la $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-montée de $\mathfrak{A}$, de sorte que les quantités r et s sont les mêmes pour toutes ces strates. Pour tout $0 \leqslant m < q$, on désigne par $\mathfrak{M}^m(\beta, \mathfrak{A})$ le $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$-bimodule

$$\mathfrak{M}^m(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{P}^{q-m} \cap \mathfrak{N}_{-m}(\beta, \mathfrak{A}) + \mathfrak{J}^s(\beta, \mathfrak{A}) \ ,$$

et on pose $\mathfrak{M}^m(\beta, \Lambda^0) = \mathfrak{M}^m(\beta, \mathfrak{A}) \cap A^0$. C'est à la fois un $(\mathfrak{B}^0, \mathfrak{B}^0)$-bimodule et un $\mathfrak{o}_F$-réseau de A^0.

Lemme 3.5 *La condition de descente* $(\mathbf{C_3})$ *est vérifiée pour $B^{0\times}$ et $1 + \mathfrak{M}^m(\beta, \Lambda^0)$.*

PREUVE : Choisissons un élément $b \in B^{0\times}$, et désignons par m^* le plus grand des deux entiers $q-m$ et s. Notons que, compte tenu de la remarque au théorème [BK93], (3.3.2), le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{M}^m(\beta, \mathfrak{A})$ est compris entre $\mathfrak{P}^{m^*} \cap B$ et $\mathfrak{P}^{m^*}$. En projetant sur A^0, on en déduit que le groupe $T^0 = 1 + \mathfrak{M}^m(\beta, \Lambda^0)$ est compris entre $\mathrm{U}_{m^*}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}$ et $\mathrm{U}_{m^*}(\Lambda^0)$, de sorte que, d'après la proposition 3.2, l'inclusion

$$T^0 b T^0 \cap B^{0\times} \subset \mathrm{U}_{m^*}(\Lambda^0) b \mathrm{U}_{m^*}(\Lambda^0) \cap B^{0\times} = (\mathrm{U}_{m^*}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}) b (\mathrm{U}_{m^*}(\Lambda^0) \cap B^{0\times})$$

est une égalité, ce qui signifie que la condition de descente $(\mathbf{C_3})$ est vérifiée. Remarquons au passage que $T^0 \cap B^{0\times}$ est égal à $\mathrm{U}_{m^*}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}$. $\square$

Théorème 3.6 *Soit $0 \leqslant m < q$. Pour tout $\theta^0 \in \mathscr{C}(\beta, m, \Lambda^0)$, on a*

$$I_G(\theta^0 | H^{m+1}(\beta, \Lambda^0)) = \Big(1 + \mathfrak{M}^m(\beta, \Lambda^0)\Big) B^{0\times} \Big(1 + \mathfrak{M}^m(\beta, \Lambda^0)\Big) \ .$$

Preuve : Nous procédons en deux temps. Soit d'abord $x \in G^0$ un élément entrelaçant θ^0 sur $H^{m+1}(\beta,\Lambda^0)$, et soit h appartenant à l'intersection $x^{-1}H^{m+1}x \cap H^{m+1}$. Ecrivons h sous la forme

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \tag{3.7}$$

puis calculons la quantité $\theta(xhx^{-1})\theta(h)^{-1}$. Compte tenu du lemme 3.4, nous avons

$$\begin{aligned} \theta\begin{pmatrix} xax^{-1} & xb \\ cx^{-1} & d \end{pmatrix}\theta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \theta^0(xax^{-1})\theta^1(d-ca^{-1}b)\theta^0(a)^{-1}\theta^1(d-ca^{-1}b)^{-1} \\ &= \theta^0(xax^{-1})\theta^0(a)^{-1} , \end{aligned}$$

où a décrit l'intersection $x^{-1}H^{m+1}(\beta,\Lambda^0)x \cap H^{m+1}(\beta,\Lambda^0)$, en conséquence de quoi cette quantité vaut 1. Finalement, x entrelace θ sur H^{m+1}, de sorte que, d'après [BK93], (3.3.2), on a $x \in (1+\mathfrak{M}^m(\beta,\mathfrak{A}))B^\times(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\mathfrak{A}))$. Il nous faut prouver l'identité suivante.

Lemme 3.7 *On a l'égalité*

$$\begin{aligned} &\Big(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\mathfrak{A})\Big)B^\times\Big(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\mathfrak{A})\Big) \cap G^0 \\ &\qquad = \Big(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\Lambda^0)\Big)B^{0\times}\Big(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\Lambda^0)\Big) . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Preuve : Appliquons le lemme 3.5 à la strate simple $[\boldsymbol{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$. Conjointement à la proposition 2.36 on en déduit que le triplet $(\Xi, \boldsymbol{B}^\times, \boldsymbol{T})$, où $\boldsymbol{T} = 1+\mathfrak{M}^m(\beta,\boldsymbol{\mathfrak{A}})$, vérifie toutes les conditions de descente. On peut donc appliquer le lemme 2.35 puis projeter sur $\boldsymbol{G}^0$, de façon à obtenir l'égalité

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}^\times\boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{G}^0 = (1+\mathfrak{M}^m(\beta,\boldsymbol{\Lambda}^0))\boldsymbol{B}^{0\times}(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\boldsymbol{\Lambda}^0)) . \tag{3.9}$$

Conjointement à la proposition 2.40, on en déduit également que le triplet $(\Gamma, \boldsymbol{B}^\times, \boldsymbol{T})$ vérifie toutes les conditions de descente. On peut donc appliquer le lemme 2.35, de sorte que la trace sur G du membre de gauche de (3.9) est égale au membre de gauche de (3.8). Pour conclure la démonstration, il nous reste à prouver la condition $(\mathbf{C_3})$ pour $\boldsymbol{B}^{0\times}$ et $\boldsymbol{T}^0 = \boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{G}^0$. Pour cela, soit $x \in \boldsymbol{B}^{0\times}$ et écrivons l'égalité

$$\boldsymbol{T}x\boldsymbol{T} \cap \boldsymbol{B}^\times = (1+\mathfrak{M}^m(\beta,\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B})x(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B} .$$

Prenons les points Ξ-invariants et projetons sur $\boldsymbol{G}^0$. D'après la proposition 2.36 et le lemme 2.34, on obtient

$$\boldsymbol{T}^0x\boldsymbol{T}^0 \cap \boldsymbol{B}^{0\times} = (1+\mathfrak{M}^m(\beta,\boldsymbol{\Lambda}^0) \cap \boldsymbol{B}^0)x(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\boldsymbol{\Lambda}^0) \cap \boldsymbol{B}^0) ,$$

ce qui est bien la condition requise. Ceci termine la démonstration de (3.8). □

En conclusion, l'élément x appartient à $(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\Lambda^0))B^{0\times}(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\Lambda^0))$. Pour prouver l'égalité voulue, et compte tenu du fait que, d'après [BK99], (5.6), le groupe $1+\mathfrak{M}^m(\beta,\Lambda^0)$ normalise θ^0 sur $H^{m+1}(\beta,\Lambda^0)$, il reste à montrer que θ^0 est entrelacé par $B^{0\times}$ tout entier. Soit donc $x\in B^{0\times}$, et soit $h\in x^{-1}H^{m+1}(\beta,\Lambda^0)x\cap H^{m+1}(\beta,\Lambda^0)$. Voyant x dans $B^\times$ et h dans $x^{-1}H^{m+1}x\cap H^{m+1}$, nous pouvons écrire, compte tenu du fait que $B^\times$ entrelace θ sur H^{m+1},

$$\theta\begin{pmatrix} xhx^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \theta\begin{pmatrix} h & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} ,$$

ce qui devient l'égalité $\theta^0(xhx^{-1})=\theta^0(h)$ cherchée. $\square$

Proposition 3.8 *Soit* $0\leqslant m<q$. *Tout caractère* $\theta^0\in\mathscr{C}(\beta,m,\Lambda^0)$ *est normalisé par le groupe* $(\mathfrak{K}(\Lambda^0)\cap B^{0\times})(1+\mathfrak{M}^m(\beta,\Lambda^0))$.

Preuve : Soit $\theta\in\mathscr{C}(\beta,m,\mathfrak{A})$ prolongeant θ^0. Nous savons déjà, d'après [BK99], (5.6), que $1+\mathfrak{M}^m(\beta,\Lambda^0)$ normalise θ^0. Selon [BK93], (3.3.17), il en est de même de $\mathfrak{K}(\Lambda^0)\cap B^\times$, puisque celui-ci est inclus dans $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})\cap B^\times$, qui normalise θ. $\square$

Proposition 3.9 *Soit* $1\leqslant m\leqslant s$, *et soit* $\theta^0\in\mathscr{C}(\beta,m-1,\Lambda^0)$. *Le sous-groupe dérivé* $[J^m(\beta,\Lambda^0),J^m(\beta,\Lambda^0)]$ *est inclus dans* $H^m(\beta,\Lambda^0)$, *et l'application* $(x,y)\mapsto\theta^0([x,y])$ *définit une forme alternée non dégénérée*

$$J^m(\beta,\Lambda^0)/H^m(\beta,\Lambda^0)\times J^m(\beta,\Lambda^0)/H^m(\beta,\Lambda^0)\to\mathbb{C}^\times .$$

Preuve : Le sous-groupe dérivé $[J^m(\beta,\Lambda^0),J^m(\beta,\Lambda^0)]$ est inclus à la fois dans G^0 et dans $[J^m,J^m]$ donc, selon [BK93], (3.4.1), dans $H^m\cap G^0=H^m(\beta,\Lambda^0)$. Soit $x\in J^m(\beta,\Lambda^0)$ tel que $\theta^0([x,J^m(\beta,\Lambda^0)])=1$. Il s'agit de montrer que $x\in H^m(\beta,\Lambda^0)$. Supposons dans un premier temps que $m=s$. Appliquant [BK93], (3.2.12) avec $k=\ell=s$, on obtient l'égalité $\theta([x,y])=\psi_{x^{-1}\beta x-\beta}(y)$, pour tout $y\in J^s$. Nous allons prouver que x est orthogonal *dans* A à J^s tout entier. Soit donc $y\in\mathfrak{J}^s$, que nous écrivons sous la forme (3.7). Nous obtenons

$$\theta([x,1+y])=\psi\begin{pmatrix}(x^{-1}\beta x-\beta)a & (x^{-1}\beta x-\beta)b\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\psi^0_{x^{-1}\beta x-\beta}(1+a) ,$$

quantité qui, égale à $\theta^0([x,1+a])$, vaut 1 par hypothèse. De ceci on déduit que $\theta([x,J^s])=1$, c'est-à-dire que x appartient à la fois à $J^s(\beta,\Lambda^0)$ et à H^s puisque, selon [BK93], (3.4.1), la forme $(x,y)\mapsto\theta([x,y])$ est non dégénérée sur $J^s/H^s\times J^s/H^s$. En définitive, on a $x\in H^s(\beta,\Lambda^0)$, ce qui termine la démonstration pour $m=s$.

Supposons maintenant que $m<s$, et écrivons $x\in J^m(\beta,\Lambda^0)$ sous la forme $x=uz$, avec $u\in\mathrm{U}^m(\mathfrak{B}^0)$ et $z\in J^s(\beta,\Lambda^0)$. Ainsi, on a $\theta^0([x,J^m(\beta,\Lambda^0)])=1$ si et seulement si $\theta^0([z,J^m(\beta,\Lambda^0)])=1$, ce dont on déduit que $z\in H^s(\beta,\Lambda^0)$, c'est-à-dire que x appartient à $\mathrm{U}^m(\mathfrak{B}^0)H^s(\beta,\Lambda^0)=H^m(\beta,\Lambda^0)$. $\square$

3.1.3 Transfert des caractères simples

D'après [BK99], toutes les constructions qui précèdent sont indépendantes du choix de la chaîne Λ^1. Cependant, nous souhaitons obtenir une définition intrinsèque des ensembles de caractères $\mathscr{C}(\beta, m, \Lambda^0)$, qui ne fasse pas intervenir $[\Lambda^1, n, 0, \beta]$. Dans le but d'étendre le processus de transfert [BK93], (3.6) aux caractères simples attachés à des $\mathfrak{o}_F$-suites, nous démontrons que ceux-ci peuvent se définir de façon analogue à [BK93], (3.2.1) et (3.2.3), par récurrence sur q. Dans tout ce qui suit, si m est un entier, on désigne par m' le plus grand des deux entiers m et $[q/2]$. Nous commençons par prouver un lemme général, permettant de prolonger des caractères.

Lemme 3.10 *Soit G un groupe, et soient H, K deux sous-groupes de G. Soient θ et λ des caractères respectivement de H et de K, coïncidant sur $H \cap K$, et tels que H normalise λ sur K. Alors il existe un unique caractère de HK prolongeant à la fois θ et λ.*

Preuve : Définissons, sur le produit semi-direct $H \rtimes K$, une application Θ par $\Theta(h, k) = \theta(h)\lambda(k)$. Puisque H normalise λ sur K, cette application Θ est un caractère. Pour qu'il définisse un caractère sur le quotient HK, il faut, et il suffit, que Ker Θ contienne le noyau $\{(k, k^{-1}) \mid k \in H \cap K\}$ de la projection canonique $(h, k) \mapsto hk^{-1}$ de $H \rtimes K$ sur HK. C'est le cas, puisque λ et θ coïncident sur $H \cap K$. L'unicité est immédiate. $\square$

Proposition 3.11 *Soit $0 \leqslant m < q$ et soit θ^0 un caractère du groupe $H^{m+1}(\beta, \Lambda^0)$. Alors θ^0 est un caractère simple (défini par (3.6)) si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :*

1. *le caractère θ^0 est normalisé par $\mathfrak{K}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}$;*
2. *si $q = n$, alors $\theta^0 | \mathrm{U}_{m'+1}(\Lambda^0) = \psi^0_\beta$ et $\theta^0 | \mathrm{U}_{m+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}$ se factorise par la norme $\mathrm{N}_{B^0/E}$;*
3. *si $q < n$, et si γ est une approximation de β relative à Λ^0, alors il existe un caractère simple $\theta^0_\gamma \in \mathscr{C}(\gamma, m', \Lambda^0)$ tel que $\theta^0 | H^{m'+1}(\beta, \Lambda^0) = \psi^0_{\beta-\gamma}\theta^0_\gamma$ et $\theta^0 | \mathrm{U}_{m+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}$ se factorise par $\mathrm{N}_{B^0/E}$.*

Preuve : Nous commençons par la première affirmation : nous supposons que θ^0 est un caractère simple, et nous choisissons un caractère $\theta \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ prolongeant θ^0. Notons que, selon la proposition 3.8, le groupe $\mathfrak{K}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}$ normalise θ^0. Si $q = n$, alors θ est défini par

$$\theta | \mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) = \psi_\beta \quad \text{et} \quad \theta | \mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B}) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E} \ ,$$

où λ est un caractère de U^1_E. Par restriction, compte tenu du fait que $\psi | A^0 = \psi^0$ et que $\mathrm{N}_{B/E} | B^0 = \mathrm{N}_{B^0/E}$, le résultat s'ensuit. Supposons maintenant que $q < n$, et soit γ une approximation de β relative à Λ^0. C'est également une approximation de β relativement à $\mathfrak{A}$, de sorte que l'on peut écrire

$$\theta | H^{m'+1} = \psi_{\beta-\gamma}\theta_\gamma \quad \text{et} \quad \theta | \mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B}) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E} \ ,$$

où λ est un caractère de U_E^1 et θ_γ un caractère de $H^{m'+1}$ appartenant à $\mathscr{C}(\gamma, m', \mathfrak{A})$. Par restriction à $H^{m+1}(\beta, \Lambda^0)$, en notant θ_γ^0 la restriction de θ_γ à $H^{m'+1}(\beta, \Lambda^0)$, on obtient l'égalité voulue.

Prouvons maintenant l'affirmation réciproque : nous supposons que θ^0 est un caractère de $H^{m+1}(\beta, \Lambda^0)$ vérifiant les points $1, 2, 3$ de la proposition 3.11. Si $q = n$, nous avons donc

$$\theta^0 | \mathrm{U}_{m'+1}(\Lambda^0) = \psi_\beta^0 \quad \text{et} \quad \theta^0 | \mathrm{U}_{m+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times} = \lambda \circ \mathrm{N}_{B^0/E} \ , \tag{3.10}$$

où λ est un caractère de U_E^1. Puisque ψ_β et $\lambda \circ \mathrm{N}_{B^0/E}$ coïncident sur $\mathrm{U}_{m'+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}$, et que $\mathrm{U}_{m+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}$ normalise ψ_β, nous pouvons appliquer le lemme 3.10, de sorte que le caractère θ^0 peut être étendu en un caractère θ de $(\mathrm{U}_{m+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times})\mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$ en posant $\theta | \mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) = \psi_\beta$, qui est entrelacé par $B^\times$. De cette façon, d'après [Gra00], (1.10), le caractère $\theta | \mathrm{U}_{m'+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times}$ se factorise sous la forme $\lambda \circ \mathrm{N}_{B/E}$, où λ est le même caractère qu'en (3.10), car

$$\mathrm{N}_{B/E}(\mathrm{U}_{m'+1} \cap B^{0\times}) \subset \mathrm{N}_{B^0/E}(\mathrm{U}_{m+1} \cap B^{0\times}) \ . \tag{3.11}$$

On peut ainsi étendre θ à H^{m+1} en posant $\theta | \mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B}) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E}$. Si $x \in \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times$, alors x normalise chacun des groupes $\mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$ et $\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B})$. Si l'on écrit un élément $h \in H^{m+1}$ sous la forme $h = ba$, avec $b \in \mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B})$ et $a \in \mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$, alors

$$\theta^x(h) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E}(xbx^{-1})\psi_\beta(xax^{-1}) \ , \tag{3.12}$$

ce qui est égal à $\theta(h)$. Finalement, le caractère θ appartient à $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$, et sa restriction à H^{m+1} est égale à θ^0, ce qui prouve que θ^0 est un caractère simple.

Supposons maintenant que $q < n$. Choisissons comme dans [BK99], (5.3) un sous-F-espace W^i de V^i engendré sur F par une E-base de V^i décomposant Λ^i, et posons $W = W^0 \oplus W^1$. Suivant [BK99], corollaire (5.3), nous pouvons choisir une approximation γ de β relative à $\mathfrak{A}$, appartenant à la F-algèbre $\iota_W(A(E))$. Celle-ci commutant à $\mathrm{End}_F(W^0)$, qui contient les projecteurs $\mathbf{1}^0$ et $\mathbf{1}^1$, l'élément γ appartient à M, de sorte que son image $\mathbf{1}^0\gamma$ dans A^0, encore notée γ, est une approximation de β relative à Λ^0. Il s'ensuit que nous avons

$$\theta^0 | H^{m'+1}(\beta, \Lambda^0) = \psi_{\beta-\gamma}^0 \theta_\gamma^0 \quad \text{et} \quad \theta^0 | \mathrm{U}_{m+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times} = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E} \ ,$$

où λ est un caractère de U_E^1 et θ_γ^0 un caractère de $\mathscr{C}(\gamma, m', \Lambda^0)$ qui, par définition, est la restriction à $H^{m'+1}(\beta, \Lambda^0)$ d'un caractère θ_γ de $\mathscr{C}(\gamma, m', \mathfrak{A})$. Là encore, nous pouvons prolonger le caractère θ^0 en un caractère θ de $(\mathrm{U}_{m+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times})H^{m'+1}$ en posant $\theta | H^{m'+1} = \psi_{\beta-\gamma}\theta_\gamma$. Appliquant [BK93], (3.3.9) à θ_γ et à $x \in B^\times$, nous voyons que, pour tout $h \in x^{-1}H^{m'+1}x \cap H^{m'+1}$, les quantités $\theta_\gamma^x(h)\theta_\gamma^{-1}(h)$ et $\psi_{x^1\gamma x-\gamma}(h)$ sont égales. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \theta^x(h)\theta^{-1}(h) &= \theta_\gamma^x(h)\theta_\gamma^{-1}(h)\psi_{\beta-\gamma}^x(h)\psi_{\beta-\gamma}^{-1}(h) \\ &= \theta_\gamma^x(h)\theta_\gamma^{-1}(h)\psi_{x^{-1}\gamma x-\gamma}^{-1}(h)\psi_{x^{-1}\beta x-\beta}(h) \end{aligned}$$

qui est égal à $\psi_{x^{-1}\beta x-\beta}(h)$, ce qui vaut 1 puisque x commute à β. Ainsi $B^\times$ entrelace le caractère $\theta|H^{m'+1} \cap \mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B})$, de sorte que, d'après [Gra00], (1.10), on peut écrire $\theta|H^{m'+1} \cap \mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B}) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E}$. Ainsi on peut étendre θ à H^{m+1} en posant $\theta|\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B}) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E}$. Par construction, le caractère θ vérifie les égalités

$$\theta|H^{m'+1} = \psi_{\beta-\gamma}\theta_\gamma \quad \text{et} \quad \theta|\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B}) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E} \ .$$

Si $x \in \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times$, alors x normalise chacun des groupes $H^{m'+1}(\mathfrak{A})$ et $\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B})$. Si l'on écrit un élément $h \in H^{m+1}$ sous la forme $h = ba$, avec $b \in \mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B})$ et $a \in H^{m'+1}(\mathfrak{A})$, alors

$$\theta^x(h) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E}(xbx^{-1})\psi_{\beta-\gamma}(xax^{-1})\theta_\gamma(xax^{-1}) \ , \tag{3.13}$$

ce qui est égal à $\theta(h)$ d'après [BK93], (3.3.9) (c'est-à-dire l'égalité employée plus haut). Finalement, le caractère θ appartient à $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$, et sa restriction au sous-groupe $H^{m+1}(\beta, \Lambda^0)$ est égale à θ^0, ce qui prouve que θ^0 est un caractère simple. □

Théorème 3.12 *L'application $\theta \mapsto \theta^0$ établit pour tout entier $0 \leqslant m < q$ une bijection de $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ vers $\mathscr{C}(\beta, m, \Lambda^0)$.*

Preuve : Par définition, cette application est surjective. Soient donc θ et θ' deux caractères de $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ ayant même restriction à $H^{m+1}(\beta, \Lambda^0)$. Nous procédons par récurrence sur q. Supposons que $q = n$. Si $m \geqslant [n/2]$, alors $\theta = \theta'$ d'après [BK93], (3.2.4). Si $m < [n/2]$, ces caractères coïncident sur $\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{A})$ de sorte que, selon [BK93], (3.2.5), on peut écrire $\theta' = \theta \otimes \chi$, où χ est un caractère de $\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B})\mathrm{U}^r(\mathfrak{A})$ trivial sur $\mathrm{U}^r(\mathfrak{A})$ induisant un caractère de $\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^r(\mathfrak{B})$ de la forme $\lambda \circ \mathrm{N}_{B/E}$, où λ est un caractère de U^1_E. On en déduit que θ'^0 est obtenu à partir de θ^0 par torsion par le caractère $\lambda \circ \mathrm{N}_{B^0/E}$. Puisque $\theta^0 = \theta'^0$ par hypothèse, on en déduit que λ est trivial sur $\mathrm{N}_{B^0/E}(\mathrm{U}_{m+1}(\Lambda^0) \cap B^{0\times})$ et donc sur $\mathrm{N}_{B/E}(\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{B}))$, de sorte que $\theta = \theta'$.

Supposons maintenant que $q < n$, et choisissons une approximation γ de β comme dans la proposition 3.11. Si $m \geqslant [q/2]$, écrivons $\theta = \psi_{\beta-\gamma}\theta_\gamma$ et $\theta' = \psi_{\beta-\gamma}\theta'_\gamma$, où θ_γ et θ'_γ sont des caractères de $\mathscr{C}(\gamma, [q/2], \mathfrak{A})$ qui coïncident sur H^{m+1}. Par récurrence, ils sont égaux et donc $\theta = \theta'$. Si $m < [q/2]$, écrivons

$$\theta|H^r = \psi_{\beta-\gamma}\theta_\gamma \quad \text{et} \quad \theta'|H^r = \psi_{\beta-\gamma}\theta'_\gamma$$

où θ_γ et θ'_γ sont des caractères de $\mathscr{C}(\gamma, m, \mathfrak{A})$ qui coïncident sur $H^r(\beta, \Lambda^0)$. On en déduit par récurrence que $\theta_\gamma = \theta'_\gamma$, de sorte que les caractères θ et θ' coïncident sur H^r. On termine la démonstration en raisonnant comme dans le cas minimal. □

Ce théorème permet d'étendre le transfert des caractères simples entre F-algèbres déployées. Plus précisément, soit $[m_0, \beta]$ une paire simple sur F, soit $\mathscr{C}_F(\beta, m_0)$ l'ensemble des caractères simples attachés à la strate simple $[\mathfrak{A}(E), n_F(\beta), m_0, \beta]$, et soit $[\Lambda^0, n, m, \iota\beta]$ une réalisation de $[m_0, \beta]$ dans une F-algèbre déployée. Désignons par

$$\tau_{\Lambda,m,\beta} : \mathscr{C}_F(\beta, m_0) \longrightarrow \mathscr{C}(\beta, m, \Lambda) \tag{3.14}$$

l'application de transfert définie en [BK93], (3.6.14). La composée de cette application avec la bijection $\theta \mapsto \theta^0$ est une bijection de $\mathscr{C}_F(\beta, m_0)$ vers $\mathscr{C}(\beta, m, \Lambda^0)$, que nous désignerons par $\tau_{\Lambda^0,m,\beta}$. Si Λ^0 est une chaîne, elle coïncide avec l'application définie en *ibid.*

3.2 Caractères quasi-simples

Soit A une F-algèbre centrale simple, soit V un A-module à gauche simple et soit D l'algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$. On note d le degré réduit de D/F et m la dimension de V sur D. On fixe ensuite, conformément au paragraphe 2.2.2, une extension finie non ramifiée $\mathbf{F}/F$ de degré multiple de d et un F-plongement de $\mathbf{F}_d$ dans D, dont l'image est notée L. On note $\boldsymbol{A} = A \otimes_F \mathbf{F}$ et $\bar{A} = \mathrm{End}_F(\boldsymbol{V})$. On plonge A dans $\boldsymbol{A}$ par $x \mapsto x \otimes 1$, et $\boldsymbol{A}$ dans $\bar{A}$ en identifiant celle-là à $\mathrm{End}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{V})$. Enfin, on munit $\boldsymbol{A}$ du caractère additif $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}} \circ \mathrm{tr}_{\boldsymbol{A}/\mathbf{F}}$, où $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}$ est un caractère additif de $\mathbf{F}$ prolongeant ψ_F.

Dans toute cette section, on fixe une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, où $\mathfrak{A}$ est un ordre héréditaire de A et, d'après le paragraphe 2.3.4 et le théorème 2.23, on lui associe d'une part sa montée externe $[\boldsymbol{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$, d'autre part la strate $[\bar{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$ obtenue par déploiement à $\bar{A}$. Le but de cette section est d'associer à la strate $[\boldsymbol{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$ deux sous-ordres de $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, notés $\mathfrak{J}(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$ et $\mathfrak{H}(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$, ainsi qu'un ensemble $\mathscr{C}(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}})$ de caractères du groupe $\mathfrak{H}(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \mathbf{U}^1(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$. On pose $q = -k_0(\beta, \mathfrak{A})$, et on note $r = [q/2] + 1$ et $s = [(q+1)/2]$.

3.2.1 Les ordres associés à une strate quasi-simple

A la strate simple $[\bar{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$ correspond, suivant [BK93], (3.1.7), (3.1.8), et (3.2.3), d'une part deux familles de $\mathfrak{o}_F$-réseaux $\bar{\mathfrak{J}}^k = \mathfrak{J}^k(\beta, \bar{\mathfrak{A}})$ et $\bar{\mathfrak{H}}^k = \mathfrak{H}^k(\beta, \bar{\mathfrak{A}})$, $k \geqslant 0$, auxquels sont associés les sous-groupes ouverts compacts $\bar{J}^k = \bar{\mathfrak{J}}^k \cap \mathrm{U}^k(\bar{\mathfrak{A}})$ et $\bar{H}^k = \bar{\mathfrak{H}}^k \cap \mathrm{U}^k(\bar{\mathfrak{A}})$, $k \geqslant 0$, d'autre part, pour tout entier $0 \leqslant m < q$, un ensemble $\mathscr{C}(\beta, m, \bar{\mathfrak{A}})$ de caractères du groupe $\bar{H}^{m+1}$. Ceci étant dit, nous définissons, pour tout entier $k \geqslant 0$, deux $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-modules

$$\boldsymbol{\mathfrak{J}}^k = \mathfrak{J}^k(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \bar{\mathfrak{J}}^k \cap \boldsymbol{A} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mathfrak{H}}^k = \mathfrak{H}^k(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \bar{\mathfrak{H}}^k \cap \boldsymbol{A}\ . \tag{3.15}$$

Proposition 3.13 *Pour tout $k \geqslant 0$, les $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-modules $\boldsymbol{\mathfrak{J}}^k$ et $\boldsymbol{\mathfrak{H}}^k$ sont des $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseaux Γ-stables, et sont des idéaux bilatères respectivement des $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-ordres $\boldsymbol{\mathfrak{J}}$ et $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$. En outre :*

1. *si $q = n$, nous avons $\boldsymbol{\mathfrak{J}}(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^s$ et $\boldsymbol{\mathfrak{H}}(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^r$.*
2. *si $q < n$, et si γ est une approximation de β relative à $\mathfrak{A}$, nous avons $\boldsymbol{\mathfrak{J}}(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \mathfrak{J}^s(\gamma, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$ et $\boldsymbol{\mathfrak{H}}(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \mathfrak{H}^r(\gamma, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$.*

Preuve : Nous démontrons le résultat pour $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$, par récurrence sur q. La démonstration pour $\boldsymbol{\mathfrak{J}}$ est similaire. Si $q = n$, alors $\bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{B}} + \bar{\mathfrak{P}}^r$, de sorte que $\boldsymbol{\mathfrak{H}} = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^r$. Puisque $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ est Γ-stable, et que $\boldsymbol{\mathfrak{P}}^r$ est un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau Γ-stable, il en est de même pour $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$, et pour tous les $\boldsymbol{\mathfrak{H}}^k = \boldsymbol{\mathfrak{H}} \cap \boldsymbol{\mathfrak{P}}^k$, $k \geqslant 0$. Si γ est une approximation de β relative à $\mathfrak{A}$, alors on a $\bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{B}} + \mathfrak{H}^r(\gamma, \bar{\mathfrak{A}})$ puisque, selon le théorème 2.23, γ est également une approximation de β relative à $\bar{\mathfrak{A}}$. Ainsi on a l'égalité $\boldsymbol{\mathfrak{H}} = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \mathfrak{H}^r(\gamma, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$, ce dont on déduit, par récurrence, que $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$ est un $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau Γ-stable. Invoquant [BK93], (3.1.9), on conclut que $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$ est un sous-$\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-ordre de $\boldsymbol{A}$ dont les $\boldsymbol{\mathfrak{H}}^k, k \geqslant 0$ sont des idéaux bilatères. $\square$

Proposition 3.14 *Pour tout $k \geqslant 0$, les $\mathfrak{o}_F$-réseaux $\bar{\mathfrak{J}}^k$ et $\bar{\mathfrak{H}}^k$ sont $\boldsymbol{\mu}$-stables, et la $(Z, \mathbf{F})$-décomposition* (2.17) *induit des isomorphismes de $(\mathfrak{A}(\mathbf{F}), \mathfrak{o}_{\mathbf{F}})$-bimodules*

$$\bar{\mathfrak{J}}^k \simeq \mathfrak{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}} \boldsymbol{\mathfrak{J}}^k \quad et \quad \bar{\mathfrak{H}}^k \simeq \mathfrak{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}} \boldsymbol{\mathfrak{H}}^k \ .$$

Preuve : Nous faisons la démonstration pour $\bar{\mathfrak{J}}^k$, par récurrence sur q. Elle est similaire pour $\bar{\mathfrak{H}}^k$. Puisque le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\bar{\mathfrak{P}}^k$ est lui-même $\boldsymbol{\mu}$-stable et possède une $(Z, \mathbf{F})$-décomposition relativement à (2.17), il suffit de prouver la proposition 3.14 pour $\bar{\mathfrak{J}}$. Supposons d'abord que $q = n$. On a ainsi $\bar{\mathfrak{J}} = \bar{\mathfrak{B}} + \bar{\mathfrak{P}}^s$, qui est bien $\boldsymbol{\mu}$-stable. Par ailleurs, combinant (2.17) avec (2.19), on obtient la $(Z, \mathbf{F})$-décomposition annoncée.

Supposons ensuite que $q < n$, et posons $\mathrm{U} = \mathrm{End}_F(Z)$. Le choix d'un sous-$F$-espace Z tel que $\boldsymbol{V} = \mathbf{F} \otimes_F Z$ nous plaçant dans la situation du paragraphe 2.2.1, nous pouvons affirmer que l'application $\mathfrak{r} \mapsto \mathfrak{r} \cap Z$ établit une bijection entre $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseaux Γ-stables de $\boldsymbol{V}$ et $\mathfrak{o}_F$-réseaux de Z, ce qui prouve d'une part que les $Y_k, k \in \mathbb{Z}$ sont des $\mathfrak{o}_F$-réseaux de Z, d'autre part que la $\mathfrak{o}_F$-suite $\{Y_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est une chaîne, et aussi que

$$\boldsymbol{\Lambda}_k = \mathfrak{o}_{\mathbf{F}} \otimes_{\mathfrak{o}_F} Y_k \ , \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \ .$$

En d'autres termes, l'intersection $\mathfrak{U} = \boldsymbol{\mathfrak{A}} \cap \mathrm{U}$ est un ordre héréditaire E-pur de U, défini par la $\mathfrak{o}_F$-chaîne $\{Y_k = \boldsymbol{\Lambda}_k \cap Z \mid k \in \mathbb{Z}\}$, et la $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-chaîne $\boldsymbol{\Lambda}$ s'obtient par $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-montée aussi bien de Λ que de Y. Invoquant le corollaire 2.11, nous en déduisons que $k_0(\beta, \mathfrak{U})$ et $k_0(\beta, \mathfrak{A})$ sont tous deux égaux à $k_0(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$. Ainsi la strate $[\mathfrak{U}, n, 0, \beta]$ est une strate simple de U, et on choisit une approximation γ de β relativement à Y. L'élement γ engendre sur F un corps K inclus dans U, c'est-à-dire que Z est un sous-K-espace vectoriel de $\boldsymbol{V}$ engendré sur F par une $\mathbf{F}$-base de $\boldsymbol{V}$ décomposant $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, de sorte qu'on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. On a donc $\mathfrak{J}^s(\gamma, \bar{\mathfrak{A}}) \simeq \mathfrak{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}} \mathfrak{J}^s(\gamma, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$. Puisque $\bar{\mathfrak{J}} = \bar{\mathfrak{B}} + \mathfrak{J}^s(\gamma, \bar{\mathfrak{A}})$, le résultat s'ensuit. $\square$

Pour tout entier $k \geqslant 0$, nous définissons maintenant deux sous-groupes ouverts compacts de $\mathbf{U}(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$ en posant

$$\boldsymbol{J}^k = J^k(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\mathfrak{J}} \cap \mathbf{U}^k(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H}^k = H^k(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\mathfrak{H}} \cap \mathbf{U}^k(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \ . \tag{3.16}$$

Compte tenu de la proposition 3.13, ces groupes peuvent aussi être définis par récurrence : si β est minimal, nous avons $\boldsymbol{J}^1 = \mathbf{U}^1(\boldsymbol{\mathfrak{B}})\mathbf{U}^s(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$, et si β est approché par γ relativement à $\mathfrak{A}$, alors $\boldsymbol{J}^1 = \mathbf{U}^1(\boldsymbol{\mathfrak{B}})J^s(\gamma, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$. Des résultats similaires sont valables pour $\boldsymbol{H}^1$.

Proposition 3.15 *Pour tout $k \geqslant 0$, les groupes $\boldsymbol{J}^k$ et $\boldsymbol{H}^k$ sont normalisés par $(\boldsymbol{\mathfrak{K}}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times)\boldsymbol{J}$. En outre, $\boldsymbol{H}^k$ est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{J}^k$, et le quotient $\boldsymbol{J}^k/\boldsymbol{H}^k$ est un p-groupe abélien fini.*

PREUVE : Soit un entier $k \geqslant 0$. Les groupes $\bar{J}^k$ et $\bar{H}^k$ sont, d'après [BK93], (3.1.15), normalisés par le groupe $\mathfrak{K}(\bar{\mathfrak{B}})\bar{J} = (\mathfrak{K}(\bar{\mathfrak{A}}) \cap \bar{B}^\times)\bar{J}$, donc *a fortiori* par $(\boldsymbol{\mathfrak{K}}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times)\boldsymbol{J}$, et la première affirmation s'ensuit. D'après [BK93], (3.1.15), écrivons la suite exacte de Γ-groupes

$$1 \to \bar{H}^k \to \bar{J}^k \to \bar{J}^k/\bar{H}^k \to 1 \ ,$$

qui définit une suite exacte longue de cohomologie

$$1 \to \boldsymbol{H}^k \to \boldsymbol{H}^k \to (\bar{J}^k/\bar{H}^k)^{\boldsymbol{\mu}} \to \mathrm{H}^1(\boldsymbol{\mu}, \bar{H}^k) \ .$$

Puisque $\bar{H}^k$ est un pro-p-groupe, et que $\boldsymbol{\mu}$ est d'ordre premier à p, le dernier terme de cette suite est trivial, de sorte que le quotient $\boldsymbol{J}^k/\boldsymbol{H}^k$ est un sous-groupe de $\bar{J}^k/\bar{H}^k$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Nous voulons maintenant étudier le comportement des groupes $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{H}$ par projection relativement à une décomposition $\mathbf{e} = (\mathbf{e}^i \mid 1 \leqslant i \leqslant r)$ de $\boldsymbol{A}$ conforme à $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ sur $\mathbf{E}$. Désignons par Λ une $\mathfrak{o}_D$-suite de V définissant $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire telle que $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_0(\Lambda)$, et notons $\boldsymbol{\Lambda}$ sa $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-montée. D'après le théorème 2.30, une telle décomposition définit, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, une strate simple $[\boldsymbol{\Lambda}^i, n, 0, \mathbf{e}^i\beta]$ de la $\mathbf{F}$-algèbre $\boldsymbol{A}^i$ à laquelle, selon la section 3.1, nous associons les deux sous-groupes ouverts compacts $J(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$ et $H(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$ de $\mathbf{U}(\boldsymbol{\Lambda}^i)$, et nous souhaiterions prouver que la trace de $\boldsymbol{J}$ (resp. de $\boldsymbol{H}$) sur $\boldsymbol{G}^i$ est égale à $J(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$ (resp. à $H(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$). Nous raisonnons comme d'habitude par récurrence et, pour cette raison, il nous est nécessaire de savoir si β admet des approximations γ relatives à $\mathfrak{A}$ pour lesquelles la décomposition $\mathbf{e}$ est conforme à $\boldsymbol{A}$ sur la $\mathbf{F}$-algèbre $F[\gamma] \otimes_F \mathbf{F}$. Compte tenu du fait que nous ignorons la réponse à cette question pour une décomposition quelconque, nous supposons, et ce jusqu'à la fin de ce paragraphe, que la décomposition $\mathbf{e}$ est plus fine que la décomposition $\mathbf{E}$-canonique (ce qui implique automatiquement que les $\mathbf{e}^i\mathbf{E}$ sont des corps). Le lemme suivant justifie ce choix.

Lemme 3.16 *Il existe une approximation γ de β relativement à Λ pour laquelle la décomposition $\mathbf{E}$-canonique est plus fine que la décomposition $F[\gamma] \otimes_F \mathbf{F}$-canonique.*

PREUVE : Commençons par fixer quelques notations. Si γ est une approximation de β relativement à $\mathfrak{A}$, on note $K = F[\gamma]$ et $\mathbf{K} = K \otimes_F \mathbf{F}$. On note $\mathbf{1}^i_\beta$, $1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{E})$ les idempotents indécomposables de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{1}^i_\gamma$, $1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{K})$ ceux de $\mathbf{K}$. Désignons enfin par K_{nr} la partie non ramifiée maximale de l'extension K/F, et notons $\mathbf{K}_{\mathrm{nr}} = K_{\mathrm{nr}} \otimes_F \mathbf{F}$.

Choisissons un sous-$\mathbf{F}$-espace W de $\boldsymbol{V}$ engendré sur F par une E-base de $\boldsymbol{V}$ décomposant $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, et soit γ_1 une approximation de β relative à $\mathfrak{A}(E)$, choisie de sorte que $F[\gamma_1]_{\mathrm{nr}}$ soit incluse dans E (voir [BG00], (5.1)). De ce fait, l'élément $\gamma = \iota_W(\gamma_1)$

est une approximation de β relative à $\mathfrak{A}$ commutant aux $\mathbf{e}^i, 1 \leqslant i \leqslant r$, et pour laquelle K_{nr} est incluse dans E. Puisque $\mathbf{F}/F$ est non ramifiée, la décomposition $\mathbf{K}_{\mathrm{nr}}$-canonique de $\boldsymbol{A}$ est identique à sa décomposition $\mathbf{K}$-canonique, c'est-à-dire que les algèbres $\mathbf{K}_{\mathrm{nr}}$ et $\mathbf{K}$ ont les mêmes idempotents indécomposables. En particulier, on a $\mathbf{1}_\gamma^i \in \mathbf{K}_{\mathrm{nr}} \subset \mathbf{E}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{K})$. Les $\mathbf{1}_\gamma^i$ sont donc des idempotents de $\mathbf{E}$ deux-à-deux orthogonaux, de sorte qu'ils peuvent s'écrire à l'aide des idempotents indécomposables $\mathbf{1}_\beta^i, 1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{E})$ de $\mathbf{E}$ sous la forme

$$\mathbf{1}_\gamma^i = \sum_{j \in \mathrm{I}_i} \mathbf{1}_\beta^j \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{K}) \ ,$$

où les I_i forment une partition de $\{1, 2, \ldots, r(\mathbf{E})\}$. En d'autres termes, la décomposition $\mathbf{E}$-canonique de $\boldsymbol{A}$ est plus fine que sa décomposition $\mathbf{K}$-canonique. □

Corollaire 3.17 *Soit* $\mathbf{e}$ *une décomposition conforme à* $\boldsymbol{\Lambda}$ *sur* $\mathbf{E}$ *et plus fine que la décomposition* $\mathbf{E}$*-canonique. Fixons un entier* $1 \leqslant i \leqslant r$*. Si* β *est minimal sur* F*, alors* $\mathbf{e}^i\beta$ *est minimal sur* $\mathbf{F}$*. Sinon, il existe une approximation* γ *de* β *relativement à* Λ *pour laquelle* $\mathbf{e}$ *est plus fine que la décomposition* $\mathbf{K}$*-canonique d'une part, et telle que* $\mathbf{e}^i\gamma$ *est une approximation de* $\mathbf{e}^i\beta$ *relativement à* $\boldsymbol{\Lambda}^i$ *d'autre part.*

Preuve : Si β est minimal sur F, on a $k_0(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) = n = k_0(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$. Sinon, notons γ l'approximation du lemme 3.16, et appliquons le théorème 2.30 à la strate simple $[\Lambda, n, q, \gamma]$. Ainsi la strate $[\boldsymbol{\Lambda}^i, n, q, \mathbf{e}^i\gamma]$ est simple et équivalente à $[\boldsymbol{\Lambda}^i, n, q, \mathbf{e}^i\beta]$. □

Proposition 3.18 *Soit un entier* $k \geqslant 1$*.*

1. *Les groupes* $\boldsymbol{J}^k$ *et* $\boldsymbol{H}^k$ *admettent une décomposition d'Iwahori relative à* $\mathbf{e}$ *;*
2. *Pour tout* $1 \leqslant i \leqslant r$*, on a* $\boldsymbol{J}^k \cap \boldsymbol{G}^i = J^k(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$ *et* $\boldsymbol{H}^k \cap \boldsymbol{G}^i = H^k(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$*.*

Preuve : La première affirmation est une conséquence immédiate de [BH96], (10.4). Quant à la seconde, nous faisons la démonstration pour $\boldsymbol{H}$, par récurrence sur q. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, notons $\boldsymbol{\mathfrak{A}}^i$ l'ordre héréditaire de $\boldsymbol{A}^i$ défini par la suite $\boldsymbol{\Lambda}^i$, et par $\boldsymbol{\mathfrak{B}}^i$ sa trace sur le commutant $\boldsymbol{B}^i$ de $\mathbf{E}^i$ dans $\boldsymbol{A}^i$. Supposons que $q = n$, de sorte que $\boldsymbol{\mathfrak{H}} = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^r$. Nous avons ainsi

$$\mathbf{e}^i\boldsymbol{\mathfrak{H}}\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i\boldsymbol{\mathfrak{B}}\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^i\boldsymbol{\mathfrak{P}}^r\mathbf{e}^i = \boldsymbol{\mathfrak{B}}^i + \mathfrak{P}_r(\boldsymbol{\Lambda}^i) \ ,$$

ce qui est bien égal à $\mathfrak{H}(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$, puisque $\mathbf{e}^i\beta$ est minimal sur $\mathbf{F}$. Supposons maintenant que $q < n$, et choisissons une approximation γ de β comme au corollaire 3.17. Nous avons ainsi $\boldsymbol{\mathfrak{H}} = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \mathfrak{H}^r(\gamma, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$ et, écrivant $\mathbf{e}^i\boldsymbol{\mathfrak{H}}\mathbf{e}^i = \boldsymbol{\mathfrak{B}}^i + \mathbf{e}^i\mathfrak{H}^r(\gamma, \boldsymbol{\mathfrak{A}})\mathbf{e}^i$ et appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{H}^r(\gamma, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$, nous obtenons

$$\mathbf{e}^i\boldsymbol{\mathfrak{H}}\mathbf{e}^i = \boldsymbol{\mathfrak{B}}^i + \mathfrak{H}^r(\mathbf{e}^i\gamma, \boldsymbol{\Lambda}^i) \ .$$

Puisque $\mathbf{e}^i\gamma$ est une approximation de $\mathbf{e}^i\beta$ relativement à $\boldsymbol{\Lambda}^i$, on peut écrire que $\mathfrak{H}(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$ est égal à $\boldsymbol{\mathfrak{B}}^i + \mathfrak{H}^r(\mathbf{e}^i\gamma, \boldsymbol{\Lambda}^i)$. On en déduit que $\boldsymbol{\mathfrak{H}} \cap \boldsymbol{A}^i = \mathfrak{H}(\boldsymbol{\beta}^i, \boldsymbol{\Lambda}^i)$. Il ne reste plus qu'à prendre l'intersection avec $\mathbf{U}^k(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$ pour obtenir le résultat voulu. □

3.2.2 Deux résultats isolés

Dans ce paragraphe, nous profitons de toute la machinerie mise en route précédemment pour prouver deux résultats qui nous seront utiles dans un article ultérieur concernant la construction des β-extensions. De façon à formuler certains résultats plus aisément, si M est un sous-$\mathfrak{o}_F$-réseau de $\mathfrak{A}$, nous désignerons par $\bar{M}$ l'image dans $\bar{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathfrak{o}_\mathbf{F}} M_\mathbf{F}$. Nous employons également la notion d'indice généralisé : si K et K' sont deux sous-groupes d'un même groupe topologique X, nous désignerons par $(K : K')$ le quotient de $(K : K \cap K')$ par $(K' : K \cap K')$. Signalons que si X est compact, et si μ désigne une mesure de Haar quelconque de X, alors l'indice $(K : K')$ est égal à $\mu(K)/\mu(K')$. De ce fait, si $\mathfrak{A}$ est un ordre héréditaire de A de radical $\mathfrak{P}$, et si M et N sont deux sous-$\mathfrak{o}_F$-réseaux de $\mathfrak{P}$ stables par multiplication, on a

$$(1 + M : 1 + N) = (M : N) \ . \tag{3.17}$$

Lemme 3.19 *Soient M, N deux sous-$\mathfrak{o}_F$-réseaux de $\mathfrak{A}$. Alors $(\bar{M} : \bar{N}) = (M : N)^{[\mathbf{F}:F]^2}$.*

Preuve : Quitte à remplacer $\bar{N}$ par le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\bar{M} \cap \bar{N}$, on peut supposer que $\bar{N}$ est inclus dans $\bar{M}$, de sorte que $(\bar{M} : \bar{N})$ est le cardinal du quotient $\bar{M}/\bar{N}$. Comte tenu des isomorphismes

$$\mathfrak{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} M \simeq \bar{M} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}(\mathbf{F}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} N \simeq \bar{N} \ ,$$

le quotient $\bar{M}/\bar{N}$ est isomorphe à $\mathfrak{A}(\mathfrak{o}_\mathbf{F}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} (M/N)$, et le résultat provient du fait que $\mathfrak{A}(\mathbf{F})$ est de rang $[\mathbf{F} : F]^2$ en tant que $\mathfrak{o}_F$-module libre. □

Lemme 3.20 *Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A, et soit $g \in B^\times$. Alors*

$$(J^1 : J^1 \cap J^{1g}) = (H^1 : H^1 \cap H^{1g}) \ .$$

Preuve : Le lemme [BK93], (5.1.10) appliqué à la strate simple $[\bar{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$ fournit l'égalité

$$\Big(J^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) : J^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) \cap J^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}})^g\Big) = \Big(H^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) : H^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) \cap H^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}})^g\Big) \ .$$

Dans un premier temps, l'égalité (3.17) permet de se ramener à l'égalité

$$\Big(\mathfrak{J}^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) : \mathfrak{J}^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) \cap \mathfrak{J}^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}})^g\Big) = \Big(\mathfrak{H}^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) : \mathfrak{H}^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) \cap \mathfrak{H}^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}})^g\Big) \ .$$

Appliquant le lemme 3.19 conjointement au choix d'une $(Z, \mathbf{F})$-décomposition (3.14), puis à nouveau (3.17), on obtient l'égalité cherchée. □

Lemme 3.21 *Soit $i \in \{1, 2\}$. Soit $[\mathfrak{A}_i, n_i, 0, \beta]$ une strate simple et posons $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i \cap B$. Alors*

$$\sqrt{\frac{(J^1(\beta, \mathfrak{A}_1) : H^1(\beta, \mathfrak{A}_1))}{(J^1(\beta, \mathfrak{A}_2) : H^1(\beta, \mathfrak{A}_2))}} = \frac{(J^1(\beta, \mathfrak{A}_1) : J^1(\beta, \mathfrak{A}_2))}{(\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_1) : \mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_2))} \ .$$

Preuve : Partons de l'égalité [BK93], (5.1.2) appliquée aux strates simples $[\bar{\mathfrak{A}}_i, n_i, 0, \beta]$ de $\bar{A}$, mise sous la forme

$$\sqrt{\frac{(J^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_1) : H^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_1))}{(J^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_2) : H^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_2))}} = \frac{(J^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_1) : J^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_2))}{(\mathrm{U}^1(\bar{\mathfrak{B}}_1) : \mathrm{U}^1(\bar{\mathfrak{B}}_2))} .$$

Dans un premier temps, l'égalité (3.17) permet de se ramener à l'égalité

$$(\bar{\mathfrak{Q}}_1 : \bar{\mathfrak{Q}}_2) = (\mathfrak{J}^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_1) : \mathfrak{J}^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_2)) \cdot \sqrt{\frac{(\mathfrak{J}^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_2) : \mathfrak{H}^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_2))}{(\mathfrak{J}^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_1) : \mathfrak{H}^1(\beta,\bar{\mathfrak{A}}_1))}} ,$$

où $\bar{\mathfrak{Q}}_i$ désigne le radical de $\bar{\mathfrak{B}}_i$. Appliquant le lemme 3.19 conjointement au choix d'une $(Z,\mathbf{F})$-décomposition (2.19) relative à chacun des ordres $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ (c'est-à-dire que Z est un sous-E-espace vectoriel de $\boldsymbol{V}$ engendré sur F par une $\mathbf{F}$-base de $\boldsymbol{V}$ décomposant à la fois $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$), le membre de gauche est égal à $(\mathfrak{Q}_1 : \mathfrak{Q}_2)$ à la puissance $[\mathbf{F} : F]^2$, où $\mathfrak{Q}_i = \bar{\mathfrak{Q}}_i \cap A$ désigne le radical de $\mathfrak{B}_i$. Appliquant le lemme 3.19 conjointement au choix d'une $(Z,\mathbf{F})$-décomposition, donnée par la proposition 3.14, relative à chacun des ordres $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$, le membre de droite est égal à

$$(\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}_1) : \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}_2)) \cdot \sqrt{\frac{(\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}_2) : \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}_2))}{(\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}_1) : \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}_1))}}$$

à la puissance $[\mathbf{F} : F]^2$. Il ne reste plus qu'à appliquer (3.17) en sens inverse, de façon à obtenir l'égalité cherchée. $\square$

3.2.3 Les caractères quasi-simples

Au paragraphe 2.2.2, nous avons défini la strate $[\boldsymbol{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$ par montée externe, ce qui était possible puisque nous avions antérieurement défini les strates simples de A. En ce qui concerne les caractères simples, nous procédons en sens inverse, c'est-à-dire que nous voulons définir les caractères simples attachés à la strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ comme restriction de certains caractères de $\boldsymbol{H}^1$ attachés à la strate $[\boldsymbol{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$. Compte tenu du fait que celle-ci n'est pas simple en général, ces caractères de $\boldsymbol{H}^1$, que nous allons construire maintenant, seront qualifiés de *quasi-simples*.

Dans [BH96] est décrit un procédé de construction de caractères de $\boldsymbol{H}^1$ par restriction à $\boldsymbol{H}^1$ des caractères simples définis par la strate simple $[\bar{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$. Si l'on procède ainsi, la $\mathbf{F}$-algèbre est canoniquement munie du caractère additif $\psi_F \circ \mathrm{tr}_{\bar{A}/F}|\boldsymbol{A}$, ce qui revient à munir $\mathbf{F}$ du caractère additif $\psi_F \circ \mathrm{tr}_{\mathbf{F}/F}$, qui est trivial sur $\mathfrak{p}_{\mathbf{F}}$ mais pas sur $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$. Sa restriction à F est égale à ψ_F^N, où N désigne le degré de $\mathbf{F}$ sur F. Si $(N,p) = 1$, ce n'est pas un problème car $N \in \mathrm{U}_F$, et on peut définir $\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A})$ par restriction au groupe $\bar{H}^1 \cap G$ des caractères de $\mathscr{C}(\beta N^{-1},\bar{\mathfrak{A}})$. Si $(N,p) > 1$, ce procédé ne fonctionne plus. On ne peut pas non plus se contenter de restreindre à $\bar{H}^1 \cap G$ les caractères de $\mathscr{C}(\beta,\bar{\mathfrak{A}})$. Un caractère de $\mathscr{C}(\beta,\bar{\mathfrak{A}})$ étant, par définition, trivial sur le sous-groupe de congruence $\mathrm{U}^{n+1}(\bar{\mathfrak{A}})$, il est trivial sur $\bar{H}^1 \cap G$ dès que N est un multiple de $(\mathrm{U}^1(\bar{\mathfrak{A}}) : \mathrm{U}^{n+1}(\bar{\mathfrak{A}}))$. Puisque les caractères $\psi_F \circ \mathrm{tr}_{\mathbf{F}/F}$ et $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}$ sont tous les deux triviaux sur $\mathfrak{p}_{\mathbf{F}}$ mais pas sur $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$, il existe un élément $a \in \mathrm{U}_{\mathbf{F}}$, de trace 1, pour lequel on a

$$\psi_F \circ \mathrm{tr}_{\mathbf{F}/F}(ax) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}(x) \ , \quad \forall \ x \in \mathbf{F} \ .$$

Puisque a est une unité, on peut penser définir $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$ par restriction à $\bar{H}^1 \cap G$ des caractères de $\mathscr{C}(\beta a, \bar{\mathfrak{A}})$, mais βa n'engendre pas *a priori* un corps sur F. Finalement, nous sommes conduits, pour définir les caractères simples attachés à $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, à définir d'abord les caractères quasi-simples attachés à $[\boldsymbol{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$, en employant le caractère $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}$, dont l'introduction est due à Grabitz [Gra00], et en adaptant les constructions de [BK93] au cas d'un élément non pur.

Pour simplifier quelques expressions, nous posons $\mathrm{U}^1_k(\boldsymbol{\mathfrak{B}}) = \mathrm{U}^1(\boldsymbol{\mathfrak{B}}) \cap \mathrm{U}^k(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$, pour $k \geqslant 1$, et $m' = \max(m, [q/2])$. Nous désignons par $\mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$ le produit des normes réduites $\mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^i/\mathbf{E}^i}$, $1 \leqslant i \leqslant r = r(\mathbf{E})$. C'est un morphisme de groupes de $\boldsymbol{B}^\times$ sur $\mathbf{E}^\times$.

Définition 3.22 *Etant donné $0 \leqslant m < q$, on désignera par $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}})$ l'ensemble des caractères $\boldsymbol{\theta}$ de $\boldsymbol{H}^{m+1}$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *le caractère $\boldsymbol{\theta}$ est normalisé par le groupe $\mathfrak{K}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times$;*
2. *si $q = n$, alors $\boldsymbol{\theta}|\mathrm{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\psi}_\beta$ et $\boldsymbol{\theta}|\mathrm{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}})$ se factorise par $\mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$;*
3. *si γ est une approximation de β comme en (3.17), il existe un caractère $\boldsymbol{\theta}_\gamma \in \mathscr{C}(\gamma, m', \boldsymbol{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}})$ tel que $\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m'+1} = \boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}_\gamma$, et $\boldsymbol{\theta}|\mathrm{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}})$ se factorise par $\mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$.*

De tels caractères, s'ils existent, seront qualifiés de *quasi-simples.* L'ensemble des caractères quasi-simples sur $\boldsymbol{H}^{m+1}$ attachés à la strate $[\boldsymbol{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$ **dépend** du choix de $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}$. Pourtant, si aucune confusion n'en résulte, nous le noterons le plus souvent $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$. Il faut noter que ces ensembles dépendent *a priori* du choix de la suite des approximations choisies dans la définition, et il faudra attendre le corollaire 3.35 pour prouver que ce n'est pas le cas. Il faudra également attendre *ibid.* pour prouver que ces ensembles ne sont pas vides.

Lemme 3.23 *Si β est minimal sur F, l'ensemble $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$ n'est pas vide, et on a $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \{\boldsymbol{\psi}_\beta\}$ lorsque $[n/2] \leqslant m$.*

Preuve : Il suffit de prouver que $\boldsymbol{\psi}_\beta|\mathrm{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times$ se factorise par $\mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$. Si l'on pose $\boldsymbol{\lambda}(1+x) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}} \circ \mathrm{tr}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\beta x)$ pour tout $x \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{m'+1} \cap \boldsymbol{B}$, on vérifie que $\boldsymbol{\psi}_\beta$ et $\boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$ coïncident sur $\mathrm{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times$. Soit donc $\boldsymbol{\theta}$ un caractère de $\boldsymbol{H}^{m+1}$ vérifiant les points 1 et 2 de la définition 3.22. Puisque $\boldsymbol{H}^{m+1} = \mathbf{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}})\mathbf{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$ et que $\mathfrak{K}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times$ normalise $\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}})$, il reste à prouver que $\boldsymbol{\theta}$ est normalisé par $\mathfrak{K}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times$ sur $\mathbf{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$. Si $k \in \mathfrak{K}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times$ et si $x \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{m'+1}$, on peut écrire $\boldsymbol{\theta}^k(1+x) = \boldsymbol{\psi}(\beta k x k^{-1}) = \boldsymbol{\psi}(k^{-1}\beta k x)$, ce qui est égal à $\boldsymbol{\theta}(1+x)$ puisque k commute à β. Ceci prouve que $\boldsymbol{\theta}$ est un caractère quasi-simple. $\square$

Lemme 3.24 *Lorsque $0 \leqslant m \leqslant [q/2]$, la restriction de $\boldsymbol{H}^{m+1}$ à $\boldsymbol{H}^r$ induit une surjection de $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ vers $\mathscr{C}(\beta, [q/2], \mathfrak{A})$. Deux caractères d'une même fibre (s'ils existent) sont tordus l'un de l'autre par un caractère de $\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{A}) \cap \boldsymbol{B}^\times$ trivial sur $\mathrm{U}^r(\mathfrak{A}) \cap \boldsymbol{B}^\times$ et se factorisant par $\mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$.*

Preuve : La démonstration est identique à celle de [BK93], (3.2.5). □

La série de lemmes suivante a pour but la proposition 3.30. Il s'agit de résultats généralisant les lemmes (3.2.6), (3.2.8) et (3.2.12) de [BK93]. Les démonstrations sont similaires, quitte à procéder aux modifications indiquées.

Lemme 3.25 *Soit m un entier tel que $[q/2] \leqslant m < q$, et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$. Soient $k, \ell \geqslant 1$ deux entiers tels que $k + \ell \geqslant m + 1$ et $k + 2\ell \geqslant q + 1$. Soient $x \in 1 + \mathfrak{P}^k \cap \mathfrak{N}_{k-q}$ et $y \in 1 + \mathfrak{P}^\ell \cap \mathfrak{N}_{\ell-q}$. Alors $[x, y] \in \boldsymbol{H}^{m+1}$, et on a*

$$\boldsymbol{\theta}([x, y]) = \boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x - \beta}(y) \ .$$

Preuve : D'après [BK93], (3.2.6), le commutateur de x et y appartient à la fois à $\bar{H}^{m+1}$ et à $\boldsymbol{G}$, c'est-à-dire au groupe $\boldsymbol{H}^{m+1}$. La suite de la démonstration se traite de façon similaire à celle de [BK93], (3.2.6). Dans le cas où β est minimal sur F, il suffit de remplacer [BK93], (3.2.2) par le lemme 3.23 ci-dessus. Dans le cas où l'on approche β par l'élément γ choisi dans la définition 3.22, on écrit, à partir de [BK93], (3.1.3) et [BK93], (1.4.9) et compte tenu du fait que γ est une approximation de β dans $\bar{A}$, les égalités

$$\bar{\mathfrak{P}}^k \cap \mathfrak{N}_{k-q}(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) = \bar{\mathfrak{P}}^k \cap \mathfrak{N}_{k-q}(\gamma, \bar{\mathfrak{A}}) = \bar{\mathfrak{P}}^k \cap \bar{B}_\gamma + \bar{\mathfrak{P}}^{k+q'-q} \cap \mathfrak{N}_{k-q}(\gamma, \bar{\mathfrak{A}}) \ ,$$

$$\bar{\mathfrak{P}}^\ell \cap \mathfrak{N}_{\ell-q}(\beta, \bar{\mathfrak{A}}) = \bar{\mathfrak{P}}^\ell \cap \bar{B}_\gamma + \bar{\mathfrak{P}}^{\ell+q'-q} \cap \mathfrak{N}_{\ell-q}(\gamma, \bar{\mathfrak{A}}) \ ,$$

où $q' = -k_0(\gamma, \mathfrak{A})$ et où $\bar{B}_\gamma$ désigne le commutant de γ dans $\bar{A}$. Par descente, compte tenu du lemme 2.20, nous obtenons les égalités

$$\mathfrak{P}^k \cap \mathfrak{N}_{k-q}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{P}^k \cap \mathfrak{N}_{k-q}(\gamma, \mathfrak{A}) = \mathfrak{P}^k \cap \boldsymbol{B}_\gamma + \mathfrak{P}^{k+q'-q} \cap \mathfrak{N}_{k-q}(\gamma, \mathfrak{A}) \ ,$$

$$\mathfrak{P}^\ell \cap \mathfrak{N}_{\ell-q}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{P}^\ell \cap \boldsymbol{B}_\gamma + \mathfrak{P}^{\ell+q'-q} \cap \mathfrak{N}_{\ell-q}(\gamma, \mathfrak{A}) \ ,$$

où $\boldsymbol{B}_\gamma$ désigne le commutant de γ dans $\boldsymbol{A}$, et le reste de la démonstration est identique à celle de [BK93], (3.2.6). □

Lemme 3.26 *Soit m un entier tel que $[q/2] \leqslant m < q$, et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$. Soient $k, \ell \geqslant 1$ deux entiers tels que $k + \ell \geqslant m + 1$ et $k + 2\ell \geqslant q + 1$. Soient $x \in 1 + \mathfrak{P}^k \cap \mathfrak{N}_{k-q}$ et $y \in \boldsymbol{J}^\ell$. Alors $[x, y] \in \boldsymbol{H}^{m+1}$, et on a*

$$\boldsymbol{\theta}([x, y]) = \boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x - \beta}(y) \ .$$

Preuve : D'après [BK93], (3.2.8), le commutateur de x et y appartient à la fois à $\bar{H}^{m+1}$ et à $\boldsymbol{G}$, c'est-à-dire au groupe $\boldsymbol{H}^{m+1}$. La suite de la démonstration est identique à celle de [BK93], (3.2.8). □

Lemme 3.27 *Soit m un entier tel que $[q/2] \leqslant m < q$, et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$. Soient $k, \ell \geqslant 1$ deux entiers tels que $k + \ell \geqslant m + 1$ et $k + 2\ell \geqslant q + 1$. Soient $x \in \boldsymbol{J}^k$ et $y \in \boldsymbol{J}^\ell$. Alors $[x, y] \in \boldsymbol{H}^{m+1}$, et on a*

$$\boldsymbol{\theta}([x, y]) = \boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x - \beta}(y) \ .$$

Preuve : On procède par récurrence, de façon similaire à [BK93], (3.2.12). □

Proposition 3.28 *Soit un entier $0 \leqslant m < q$, et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$. Le groupe $\boldsymbol{J}$ normalise $\boldsymbol{\theta}$.*

Preuve : La démonstration est similaire à celle de [BK93], (3.3.1). Puisque $\boldsymbol{J} = \mathbf{U}(\mathfrak{B})\boldsymbol{J}^s$ et que $\mathbf{U}(\mathfrak{B})$ normalise $\boldsymbol{\theta}$ par définition, il suffit de prouver que $j = 1 + x \in \boldsymbol{J}^s$ normalise $\boldsymbol{\theta}$. Supposons dans un premier temps que $m \geqslant [q/2]$ et appliquons le lemme 3.27 de façon à avoir

$$\boldsymbol{\theta}^j(1 + y) = \boldsymbol{\theta}(1 + y)\boldsymbol{\psi}_{j^{-1}\beta j - \beta}(1 + y)$$

pour tout $y \in \mathfrak{H}^{m+1}$. Puis [BK93], (3.1.19) et [BK93], (3.1.13) impliquent que $a_\beta(x) \in (\bar{\mathfrak{H}}^{m+1})^*$ et $yj^{-1} \in \bar{\mathfrak{H}}^{m+1}$.

Lemme 3.29 *Soit $\mathscr{M}$ un sous-$\mathfrak{o}_F$-module de $\bar{A}$ admettant une $(Z, \mathbf{F})$-décomposition relative à (2.17). Alors $\mathrm{H}^0(\boldsymbol{\mu}, \mathscr{M}^*)$ est égal à $\mathrm{H}^0(\boldsymbol{\mu}, \mathscr{M})^*$.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate des propositions (1.3.11), (1.3.12) et (1.3.13) de [BK93]. □

Invoquant la proposition 3.14 et le lemme 3.29, on en déduit que $a_\beta(x) \in (\mathfrak{H}^{m+1})^*$ et $yj^{-1} \in \mathfrak{H}^{m+1}$, ce qui permet de conclure que $\boldsymbol{\theta}^j(1 + y) = \boldsymbol{\psi}(yj^{-1}a_\beta(x))$ vaut 1. Dans le cas où $m < [q/2]$, on peut suivre [BK93], (3.3.1). □

En vue de déterminer l'entrelacement d'un caractère quasi-simple attaché à la strate $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, nous désignons, pour tout entier $0 \leqslant m < q$, par $\mathfrak{M}^m = \mathfrak{M}^m(\beta, \mathfrak{A})$ le $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseau

$$\mathfrak{M}^m = \mathfrak{M}^m(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{P}^{q-m} \cap \mathfrak{N}_{-m}(\beta, \mathfrak{A}) + \mathfrak{J}^s(\beta, \mathfrak{A}) \ ,$$

et par $\mathfrak{M}^m = \mathfrak{M}^m(\beta, \mathfrak{A})$ le $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$-bimodule $\mathfrak{M}^m = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathfrak{M}^m)$. Nous arrivons maintenant au résultat essentiel pour le calcul de l'entrelacement des caractères simples.

Proposition 3.30 *Soit $[q/2] \leqslant m < q$, et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$. Soit γ l'approximation de β choisie dans la définition 3.22, et soit $\boldsymbol{B}_\gamma$ son commutant dans $\boldsymbol{A}$. Soit enfin x un élément de $(1 + \mathfrak{M}^q(\gamma, \mathfrak{A}))\boldsymbol{B}_\gamma^\times(1 + \mathfrak{M}^q(\gamma, \mathfrak{A}))$. Pour tout $h \in x^{-1}\boldsymbol{H}^{m+1}x \cap \boldsymbol{H}^{m+1}$, on a*

$$\boldsymbol{\theta}^x(h)\boldsymbol{\theta}(h)^{-1} = \boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x - \beta}(h) \ .$$

Preuve : Ecrivons x sous la forme $x = ata'$, avec $a, a' \in J^s(\gamma, \mathfrak{A}) = \boldsymbol{J}^s$ et $t \in (1 + \mathfrak{P}^{q-m} \cap \mathfrak{N}_{-m}(\gamma, \mathfrak{A}))\boldsymbol{B}_\gamma^\times(1 + \mathfrak{P}^{q-m} \cap \mathfrak{N}_{-m}(\gamma, \mathfrak{A}))$. D'après les propositions 3.28 et 3.15, les éléments a et a' normalisent $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\mathfrak{H}}^{m+1}$, de sorte qu'on a

$$\boldsymbol{\theta}^x(h)\boldsymbol{\theta}(h)^{-1} = \boldsymbol{\theta}(th't^{-1})\boldsymbol{\theta}(h')^{-1} \ , \tag{3.18}$$

avec $h' = a'ha'^{-1}$ décrivant $t^{-1}\boldsymbol{H}^{m+1}t \cap \boldsymbol{H}^{m+1}$. D'autre part, écrivons h sous la forme $h = 1 + k$ et $k' = a'ka'^{-1}$, de façon à avoir

$$\boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x-\beta}(h) = \boldsymbol{\psi}(a^{-1}\beta atk't^{-1})\boldsymbol{\psi}(\beta k)^{-1} \ . \tag{3.19}$$

Appliquant [BK93], (3.3.7), et compte tenu du fait que $(\bar{\mathfrak{H}}^{m+1})^* \cap \boldsymbol{G} = (\boldsymbol{\mathfrak{H}}^{m+1})^*$, on obtient $a^{-1}\beta a \equiv \beta \equiv a'^{-1}\beta a' \pmod{(\boldsymbol{\mathfrak{H}}^{m+1})^*}$, de sorte que (3.19) devient égal à

$$\boldsymbol{\psi}(\beta tk't^{-1})\boldsymbol{\psi}(\beta k')^{-1} = \boldsymbol{\psi}_{t^{-1}\beta t-\beta}(h') \ . \tag{3.20}$$

Combinant les égalités (3.18), (3.19) et (3.20), on voit qu'il reste à prouver l'égalité entre $\boldsymbol{\theta}^t(h')\boldsymbol{\theta}(h')^{-1}$ et $\boldsymbol{\psi}_{t^{-1}\beta t-\beta}(h')$. Ecrivons t sous la forme $t = ybz$, avec $b \in \boldsymbol{B}_\gamma^\times$ et $y, z \in 1+\mathfrak{P}^{q-m}\cap\mathfrak{N}_{-m}(\gamma, \mathfrak{A})$, et $\boldsymbol{\theta}$ sous la forme $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}_\gamma$, avec $\boldsymbol{\theta}_\gamma \in \mathscr{C}(\gamma, m, \mathfrak{A})$. Appliquant (3.26) à $k = q' - q, \ell = m + 1$ et $\boldsymbol{\theta}_\gamma$, on obtient

$$\boldsymbol{\theta}_\gamma^x(h) = \boldsymbol{\theta}_\gamma^y(bzhz^{-1}b^{-1}) = \boldsymbol{\theta}_\gamma(bzhz^{-1}b^{-1})\boldsymbol{\psi}_{y^{-1}\gamma y-\gamma}(bzhz^{-1}b^{-1}) \ .$$

Puisque b entrelace $\boldsymbol{\theta}_\gamma$, nous poursuivons en écrivant

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_\gamma^x(h) &= \boldsymbol{\theta}_\gamma(zhz^{-1})\boldsymbol{\psi}_{y^{-1}\gamma y-\gamma}(bzhz^{-1}b^{-1}) \\ &= \boldsymbol{\theta}_\gamma(h)\boldsymbol{\psi}_{z^{-1}\gamma z-\gamma}(h)\boldsymbol{\psi}_{y^{-1}\gamma y-\gamma}(bzhz^{-1}b^{-1}) \end{aligned}$$

et, compte tenu du fait que b commute à γ, il nous reste l'égalité entre $\boldsymbol{\theta}_\gamma^x(h)\boldsymbol{\theta}_\gamma(h)^{-1}$ et $\boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\gamma x-\gamma}(h)$. D'autre part, un calcul direct montre que $\boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}^x(h)$ est égal à

$$\boldsymbol{\psi}_{x^{-1}(\beta-\gamma)x-(\beta-\gamma)}(h)\boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}(h) \ ,$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 3.30. □

3.2.4 Transfert des caractères quasi-simples

Nous fixons une décomposition $\mathbf{e}$ de $\boldsymbol{A}$ conforme à $\boldsymbol{\Lambda}$ sur $\mathbf{E}$ et plus fine que la décomposition $\mathbf{E}$-canonique. De cette façon, nous obtenons, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, une strate simple $[\boldsymbol{\Lambda}^i, n, 0, \mathbf{e}^i\beta]$ de la $\mathbf{F}$-algèbre $\boldsymbol{A}^i$ à laquelle nous associons les deux $\mathfrak{o}_\mathbf{F}$-ordres $\mathfrak{J}(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$ et $\mathfrak{H}(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$, ainsi que l'ensemble $\mathscr{C}(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i)$ de ses caractères simples. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant r$, nous noterons $\mathbf{e}^i \sim \mathbf{e}^j$ si ces deux idempotents appartiennent à une même algèbre $\boldsymbol{A}^k$, pour un entier $1 \leqslant k \leqslant r$, ce qui définit une relation d'équivalence sur les éléments de $\mathbf{e}$.

Théorème 3.31 *Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A, soit un entier $0 \leqslant m < q$ et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$. Alors $\boldsymbol{\theta}$ est trivial sur $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U}^-$ et sur $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U}$ et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, sa restriction $\boldsymbol{\theta}^i$ à $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{G}^i$ appartient à $\mathscr{C}(\mathbf{e}^i\beta, m, \boldsymbol{\Lambda}^i)$. En outre, si $\mathbf{e}^i \sim \mathbf{e}^j$, les caractères simples $\boldsymbol{\theta}^i$ et $\boldsymbol{\theta}^j$ se correspondent par transfert.*

Preuve : Commençons par prouver la première affirmation : soit $\boldsymbol{\theta}$ un caractère quasi-simple sur $\boldsymbol{H}^{m+1}$, et prouvons qu'il est trivial sur $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U}^{-}$ et $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U}$, et que sa restriction à $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{G}^{i}$ appartient à $\mathscr{C}(\mathbf{e}^{i}\beta, m, \boldsymbol{\Lambda}^{i})$. Nous faisons la démonstration pour $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U}$, mais elle est similaire pour $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U}^{-}$. Prouvons le lemme suivant.

Lemme 3.32 *On a* $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U} = (\mathbf{U}^{1}_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathbf{U})(\boldsymbol{H}^{m'+1} \cap \mathbf{U})$.

Preuve : Posons $\mathbf{U} = 1 + \mathscr{U}$. Nous allons prouver la version additive de ce résultat, c'est-à-dire l'égalité entre $\mathfrak{H}^{m+1} \cap \mathscr{U}$ et $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{P}^{m+1} \cap \mathscr{U} + \mathfrak{H}^{m'+1} \cap \mathscr{U}$, où $\mathfrak{Q}$ désigne la trace sur $\boldsymbol{A}$ du radical de $\bar{\mathfrak{B}}$. Soit x est un élément de $\mathfrak{H}^{m+1} \cap \mathscr{U}$, que nous écrivons sous la forme $x = q + h$, avec $q \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{P}^{m+1}$ et $h \in \mathfrak{H}^{m'+1}$. Compte tenu de la proposition 3.18, ces deux éléments q et h admettent la décomposition $q = q' + q^{+}$ et $h = h' + h^{+}$, où $q^{+} \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{P}^{m+1} \cap \mathscr{U}$ et $h^{+} \in \mathfrak{H}^{m'+1} \cap \mathscr{U}$, tandis que q' et h' appartiennent au produit des $\boldsymbol{A}^{ij}$, pour $i \geqslant j$. Ecrivant $x = q^{+} + h^{+} + (q' + h')$, et compte tenu de l'unicité d'une telle décomposition, nous obtenons $x = q^{+} + h^{+}$, ce qui prouve l'une des inclusions requises. La seconde inclusion est immédiate. Pour obtenir le lemme 3.32, il suffit de remarquer que $\mathbf{U}^{1}_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathbf{U}$ normalise $\boldsymbol{H}^{m'+1} \cap \mathbf{U}$. □

Supposons dans un premier temps que β est minimal, et écrivons $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U}$ sous la forme $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U} = (\mathbf{U}^{1}_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathbf{U})(\mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) \cap \mathbf{U})$. Sur le premier facteur, le caractère $\boldsymbol{\theta}$ est égal à $\boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$. Il y est donc trivial, puisque le déterminant d'un élément unipotent vaut 1. Sur le second facteur, le caractère $\boldsymbol{\theta}$ est égal à $\boldsymbol{\psi}_{\beta}$, qui est lui aussi trivial : si $u = 1 + a$ appartient à $\mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) \cap \mathbf{U}$, l'élément a admet une décomposition par blocs triangulaire stricte. Puisque β est diagonal par blocs, le produit βa est encore triangulaire strict, donc de trace nulle. Soit ensuite $x \in \boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{G}^{i} = H^{m+1}(\mathbf{e}^{i}\beta, \boldsymbol{\Lambda}^{i})$, que nous écrivons sous la forme $x = yz$, avec $y \in \mathbf{U}_{m+1}(\boldsymbol{\Lambda}^{i}) \cap \boldsymbol{B}^{i\times}$ et $z \in \mathbf{U}_{m'+1}(\boldsymbol{\Lambda}^{i})$. Nous pouvons ainsi écrire

$$\boldsymbol{\theta}^{i}(x) = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}(y)\boldsymbol{\psi}_{\beta}(z) = \boldsymbol{\lambda}^{i} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^{i}/\mathbf{e}^{i}\mathbf{E}}(y)\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{A}^{i},\mathbf{e}^{i}\beta}(z) \ ,$$

où $\boldsymbol{\lambda}^{i}$ désigne le caractère $\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{e}^{i}\mathbf{E}$ de $\mathrm{U}^{1}_{\mathbf{e}^{i}\mathbf{E}}$. D'après la proposition 3.11, et puisque $\mathfrak{K}(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{G}^{i}$ est inclus dans $\mathfrak{K}(\boldsymbol{\Lambda}^{i})$, ceci prouve que $\boldsymbol{\theta}^{i} = \boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{G}^{i}$ appartient à $\mathscr{C}(\mathbf{e}^{i}\beta, m, \boldsymbol{\Lambda}^{i})$. Enfin, si $\mathbf{e}^{i} \sim \mathbf{e}^{j}$, alors $\boldsymbol{\lambda}^{i} = \boldsymbol{\lambda}^{j}$, et on voit donc que $\boldsymbol{\theta}^{i}$ et $\boldsymbol{\theta}^{j}$ sont transferts l'un de l'autre.

Supposons maintenant β non minimal et soit γ l'approximation de la définition 3.22. Ecrivons $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U}$ sous la forme $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \mathbf{U} = (\mathbf{U}^{1}_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathbf{U})(\boldsymbol{H}^{m'+1} \cap \mathbf{U})$. Sur le premier facteur, le caractère $\boldsymbol{\theta}$ est trivial comme dans le cas minimal. Sur le second facteur, il est égal à $\boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}_{\gamma}$, avec $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\gamma, m', \mathfrak{A})$. Par récurrence, le caractère $\boldsymbol{\theta}_{\gamma}$ est trivial sur $\boldsymbol{H}^{m'+1} \cap \mathbf{U}$, et c'est également le cas pour $\boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}$, puisque γ a été choisi de façon que $\beta - \gamma$ soit diagonal par blocs. Soit ensuite $x \in \boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{G}^{i} = H^{m+1}(\mathbf{e}^{i}\beta, \boldsymbol{\Lambda}^{i})$, que nous écrivons sous la forme $x = yz$, avec $y \in \mathbf{U}_{m+1}(\boldsymbol{\Lambda}^{i}) \cap \boldsymbol{B}^{i\times}$ et $z \in H^{m'+1}(\mathbf{e}^{i}\beta, \boldsymbol{\Lambda}^{i})$. Nous pouvons ainsi écrire

$$\boldsymbol{\theta}(x) = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}(y)\boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}(z)\boldsymbol{\theta}_{\gamma}(z) = \boldsymbol{\lambda}^{i} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^{i}/\mathbf{e}^{i}\mathbf{E}}(y)\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{A}^{i},\mathbf{e}^{i}\beta-\mathbf{e}^{i}\gamma}(z)\boldsymbol{\theta}^{i}_{\gamma}(z) \ ,$$

où $\boldsymbol{\lambda}^i$ désigne le caractère $\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{e}^i\mathbf{E}$ de $\mathrm{U}^1_{\mathbf{e}^i\mathbf{E}}$ et $\boldsymbol{\theta}^i_\gamma$ la restriction $\boldsymbol{\theta}_\gamma|\boldsymbol{H}^{m'+1} \cap \boldsymbol{G}^i$ qui, par récurrence, appartient à $\mathscr{C}(\mathbf{e}^i\beta, m', \boldsymbol{\Lambda}^i)$. D'après la proposition 3.11, et puisque $\mathfrak{K}(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{G}^i$ est inclus dans $\mathfrak{K}(\boldsymbol{\Lambda}^i)$, ceci prouve que $\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{G}^i$ appartient à l'ensemble $\mathscr{C}(\mathbf{e}^i\beta, m, \boldsymbol{\Lambda}^i)$. Enfin, si $\mathbf{e}^i \sim \mathbf{e}^j$, alors $\boldsymbol{\lambda}^i = \boldsymbol{\lambda}^j$ et, par hypothèse de récurrence, les caractères $\boldsymbol{\theta}^i_\gamma$ et $\boldsymbol{\theta}^j_\gamma$ se correspondent par transfert. On en déduit que $\boldsymbol{\theta}^i$ et $\boldsymbol{\theta}^j$ sont transferts l'un de l'autre. □

Théorème 3.33 *Soit un entier $0 \leqslant m < q$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, choisissons un caractère $\boldsymbol{\theta}^i \in \mathscr{C}(\mathbf{e}^i\beta, m, \boldsymbol{\Lambda}^i)$ de telle façon que $\boldsymbol{\theta}^i$ et $\boldsymbol{\theta}^j$ se correspondent par transfert dès que $\mathbf{e}^i \sim \mathbf{e}^j$. Alors il existe un caractère quasi-simple $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ tel que $\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{G}^i = \boldsymbol{\theta}^i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$.*

Preuve : Désignons avant tout par $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}}$ le caractère de $\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{M}$ défini par $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{\theta}^1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\theta}^r$. Nous procédons par récurrence sur q. Supposons donc que $q = n$, de sorte que, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, le caractère $\boldsymbol{\theta}^i$ est défini par les égalités

$$\boldsymbol{\theta}^i|\mathbf{U}_{m'+1}(\boldsymbol{\Lambda}^i) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{e}^i\beta} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}^i|\mathbf{U}_{m+1}(\boldsymbol{\Lambda}^i) \cap \boldsymbol{B}^{i\times} = \boldsymbol{\lambda}^i \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^i/\mathbf{e}^i\mathbf{E}} \ ,$$

où $\boldsymbol{\lambda}^i$ est un caractère de $\mathrm{U}^1_{\mathbf{e}^i\mathbf{E}}$. Notons $\boldsymbol{\lambda}$ le caractère de $\mathrm{U}^1_{\mathbf{E}}$ défini par $\boldsymbol{\lambda}(x) = \boldsymbol{\lambda}^1(\mathbf{e}^1x) \cdots \boldsymbol{\lambda}^r(\mathbf{e}^rx)$, et remarquons que, si $x \in \boldsymbol{A}$ et si x_i désigne $\mathbf{e}^ix\mathbf{e}^i$, alors $\boldsymbol{\psi}(\beta x) = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{A}^1}(\mathbf{e}^1\beta x_1) \cdots \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{A}^r}(\mathbf{e}^r\beta x_r)$. En effet, puisque $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}} \circ \mathrm{tr}_{\boldsymbol{A}/\mathbf{F}}$, les blocs non diagonaux de βx, c'est-à-dire les $\mathbf{e}^i\beta x\mathbf{e}^j$ pour $i \neq j$, n'interviennent pas dans $\boldsymbol{\psi}(\beta x)$. En d'autres termes, nous avons

$$\mathrm{tr}_{\boldsymbol{A}/\mathbf{F}}(\beta x) = \mathrm{tr}_{\boldsymbol{A}/\mathbf{F}}(\mathbf{e}^1\beta x\mathbf{e}^1 + \cdots + \mathbf{e}^r\beta x\mathbf{e}^r) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathrm{tr}_{\boldsymbol{A}^i/\mathbf{F}}(\mathbf{e}^i\beta x\mathbf{e}^i) \ .$$

Il reste à voir que, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on a $\mathbf{e}^i\beta x\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i\beta x_i$. En définitive, le caractère $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}}$ est défini par les égalités

$$\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}}|\mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) \cap \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\psi}_\beta \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}}|\mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}} \ .$$

D'après le lemme 3.10, on peut prolonger à $(\mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \boldsymbol{M})\mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$ le caractère $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}}$, en un caractère $\boldsymbol{\theta}$, en posant $\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{\psi}_\beta$. Puisque $\boldsymbol{B}^\times$ entrelace $\boldsymbol{\psi}_\beta$ sur le groupe $\mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$, on déduit de [Gra00], (1.10) que $\boldsymbol{\psi}_\beta|\mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$ se factorise sous la forme $\boldsymbol{\lambda}' \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$. Comme $\mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) \cap \boldsymbol{M}$ et $\mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$ ont même image par $\mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$, le caractère $\boldsymbol{\lambda}$ est un prolongement de $\boldsymbol{\lambda}'$, et $\boldsymbol{\psi}_\beta$ et $\boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$ coïncident sur $\mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) \cap \mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})$, ce qui prouve qu'on peut prolonger $\boldsymbol{\theta}$ à $\boldsymbol{H}^{m+1} = \mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})\mathbf{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$ en posant $\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$. Si $x \in \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap \boldsymbol{B}^\times$, alors x normalise chacun des groupes $\mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$ et $\mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})$. Si l'on écrit un élément $h \in \boldsymbol{H}^{m+1}$ sous la forme $h = ba$, avec $b \in \mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})$ et $a \in \mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A})$, alors

$$\boldsymbol{\theta}^x(h) = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/E}(xbx^{-1})\boldsymbol{\psi}_\beta(xax^{-1}) \ ,$$

ce qui est égal à $\boldsymbol{\theta}(h)$. Finalement, le caractère $\boldsymbol{\theta}$ appartient à $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$.

Supposons maintenant β non minimal et soit γ l'approximation de la définition 3.22. Le caractère $\boldsymbol{\theta}^i$ est ainsi, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, défini par les égalités

$$\boldsymbol{\theta}^i | \boldsymbol{H}^{m'+1}(\mathbf{e}^i\beta, \boldsymbol{\Lambda}^i) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{e}^i\beta - \mathbf{e}^i\gamma}\boldsymbol{\theta}^i_{\mathbf{e}^i\gamma} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}^i | \mathrm{U}^{m+1}(\boldsymbol{\Lambda}^i) \cap \boldsymbol{B}^\times = \boldsymbol{\lambda}^i \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^i/\mathbf{e}^i\mathbf{E}} \ ,$$

où $\boldsymbol{\lambda}^i$ désigne un caractère de $\mathrm{U}^1_{\mathbf{e}^i\mathbf{E}}$, et où $\boldsymbol{\theta}^i_{\mathbf{e}^i\gamma} \in \mathscr{C}(\mathbf{e}^i\gamma, [q/2], \boldsymbol{\Lambda}^i)$. Notons $\boldsymbol{\lambda}$ le caractère de $\mathrm{U}^1_{\mathbf{E}}$ défini par $\boldsymbol{\lambda}(x) = \boldsymbol{\lambda}^1(\mathbf{e}^1 x) \cdots \boldsymbol{\lambda}^r(\mathbf{e}^r x)$, ainsi que $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M},\gamma} = \boldsymbol{\theta}^1_{\mathbf{e}^1\gamma} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\theta}^r_{\mathbf{1}^r\gamma}$, de sorte que le caractère $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}}$ est défini par les égalités

$$\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}} | \boldsymbol{H}^{m'+1} \cap \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M},\gamma} \qquad \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}} | \mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}} \ .$$

Par hypothèse de récurrence, le caractère $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M},\gamma}$ se prolonge à $\boldsymbol{H}^{m'+1}$ en un caractère quasi-simple $\boldsymbol{\theta}_\gamma$ de $\mathscr{C}(\gamma, m', \mathfrak{A})$. On peut ainsi prolonger $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}}$ en un caractère $\boldsymbol{\theta}$ de $(\mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \boldsymbol{M})\boldsymbol{H}^{m'+1}$ en posant $\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{H}^{m'+1} = \boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}_\gamma$. Appliquant la proposition 3.30 à $\boldsymbol{\theta}_\gamma$, nous avons, pour tout $x \in \boldsymbol{B}^\times$ et tout $h \in x^{-1}\boldsymbol{H}^{m'+1}x \cap \boldsymbol{H}^{m'+1}$, l'égalité entre $\boldsymbol{\theta}^x_\gamma(h)\boldsymbol{\theta}_\gamma(h)^{-1}$ et $\boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x - \beta}(h)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^x(h)\boldsymbol{\theta}^{-1}(h) &= \boldsymbol{\theta}^x_\gamma(h)\boldsymbol{\theta}^{-1}_\gamma(h)\boldsymbol{\psi}^x_{\beta-\gamma}(h)\boldsymbol{\psi}^{-1}_{\beta-\gamma}(h) \\ &= \boldsymbol{\theta}^x_\gamma(h)\boldsymbol{\theta}^{-1}_\gamma(h)\boldsymbol{\psi}^{-1}_{x^{-1}\gamma x - \gamma}(h)\boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x - \beta}(h) \end{aligned}$$

qui est égal à $\boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x - \beta}(h)$, ce qui vaut 1, puisque x commute à β. Ainsi $\boldsymbol{B}^\times$ entrelace le caractère $\boldsymbol{\theta}|_{\boldsymbol{H}^{m'+1} \cap \mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})}$, de sorte que, d'après [Gra00], (1.10), il se factorise sous la forme $\boldsymbol{\lambda}' \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$, où $\boldsymbol{\lambda}'$ est un caractère dont $\boldsymbol{\lambda}$ est un prolongement à $\mathrm{U}^1_{\mathbf{E}}$. On en déduit que $\boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}_\gamma$ et $\boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$ coïncident sur $\mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) \cap \boldsymbol{H}^{m'+1}$, ce qui prouve que l'on peut prolonger $\boldsymbol{\theta}$ à $\boldsymbol{H}^{m+1} = \mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})\boldsymbol{H}^{m'+1}$ en posant $\boldsymbol{\theta} | \mathbf{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$. On vérifie, de la même façon que dans le cas minimal et en s'aidant des égalités ci-dessus, qu'il est normalisé par $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap \boldsymbol{B}^\times$. Ceci prouve qu'il appartient à l'ensemble $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$. □

Corollaire 3.34 *Soit* $0 \leqslant m < q$ *et, pour* $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ *et* $1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{E})$*, notons* $\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{\theta} | H^{m+1}(\boldsymbol{\beta}^i, \boldsymbol{\Lambda}^i)$*. L'application* $\boldsymbol{\theta} \mapsto (\boldsymbol{\theta}^i \mid 1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{E}))$ *définit une bijection*

$$\varphi_{\mathfrak{A},m,\beta} : \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A}) \longrightarrow \mathscr{C}(\boldsymbol{\beta}^1, m, \boldsymbol{\Lambda}^1) \times \cdots \times \mathscr{C}(\boldsymbol{\beta}^{r(\mathbf{E})}, m, \boldsymbol{\Lambda}^{r(\mathbf{E})}) \ .$$

Corollaire 3.35 *L'ensemble* $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ *est non vide, et indépendant de la suite d'approximations choisies dans la définition 3.22.*

Pour tout $0 \leqslant m < q$, on appelle $\mathbf{F}/F$*-relèvements* du caractère quasi-simple $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ les caractères simples $\boldsymbol{\theta}^i, 1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{E})$. La famille de bijections $(\varphi_{\mathfrak{A},m,\beta})_{0 \leqslant m < q}$ est compatible avec les applications de restriction $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A}) \to \mathscr{C}(\beta, \ell, \mathfrak{A})$, pour $0 \leqslant m \leqslant \ell < q$. Ceci permet de définir des applications de transfert pour les caractères quasi-simples.

Fixons une paire simple $[m_0, \beta] \in \mathrm{SP}(F)$, et notons $A(\mathbf{E})$ la $\mathbf{F}$-algèbre $\mathrm{End}_{\mathbf{F}}(\mathbf{E})$ et $\mathfrak{A}(\mathbf{E})$ l'ordre de $A(\mathbf{E})$ défini par la chaîne $\{\mathfrak{p}_{\mathbf{E}}^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Si l'on regarde la strate $[\mathfrak{A}(\mathbf{E}), n_F(\beta), m_0, \beta]$ comme la $\mathbf{F}/F$-montée de la strate simple $[\mathfrak{A}(E), n_F(\beta), m_0, \beta]$, il lui correspond un ensemble noté $\mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\beta, m_0)$ de caractères quasi-simples. Désignons par $\mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\beta}^i, m_0)$, $1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{E})$ les divers relèvements de $\mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\beta, m_0)$, et notons $\varphi_{m_0,\beta}$ la bijection canonique de $\mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\beta, m_0)$ vers $\mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\beta}^1, m_0) \times \cdots \times \mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\beta}^r, m_0)$.

Soit maintenant $[\mathfrak{A}, n, m, \iota\beta]$ une réalisation de la paire simple $[m_0, \beta]$ dans la F-algèbre centrale simple A, et notons Λ une chaîne définissant $\mathfrak{A}$. Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{E})$, la strate simple $[\boldsymbol{\Lambda}^i, n, m, \boldsymbol{\beta}^i]$ est une réalisation de la paire simple $[m_0, \boldsymbol{\beta}^i]$ sur $\mathbf{F}$ et, selon le théorème 3.12 et [BK93], (3.6.14) on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{E})$ une bijection canonique

$$\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\Lambda}^i, m, \boldsymbol{\beta}^i} : \mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\beta}^i, m_0) \longrightarrow \mathscr{C}(\boldsymbol{\beta}^i, m, \boldsymbol{\Lambda}^i) \ .$$

Désignons par $\varphi_{\boldsymbol{\mathfrak{A}}, m, \beta}$ la bijection $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) \to \mathscr{C}(\boldsymbol{\beta}^1, m, \boldsymbol{\Lambda}^1) \times \cdots \times \mathscr{C}(\boldsymbol{\beta}^r, m, \boldsymbol{\Lambda}^r)$ définie par le corollaire 3.34. Ceci permet de définir une bijection canonique de $\mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\beta, m_0)$ vers $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$, que nous noterons $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\mathfrak{A}}, m, \beta}$. Si β est $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$-pur, elle coïncide avec l'application définie en [BK93], (3.6.14).

3.2.5 Entrelacement des caractères quasi-simples

Dans ce paragraphe, nous déterminons l'entrelacement dans $\boldsymbol{G}$ d'un caractère quasi-simple de $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$. Grossièrement, la démonstration est basée sur le fait que l'entrelacement d'un caractère quasi-simple peut être vu comme l'entrelacement formel d'un certain sous-ensemble de $\boldsymbol{A}$. Le lemme suivant illustre ce principe.

Lemme 3.36 *Soit $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ une strate de A. Soit M un $\mathfrak{o}_F$-réseau de A tel que $U = 1 + M$ soit un sous-groupe de $\mathrm{U}^{[n/2]+1}(\mathfrak{A})$. Alors l'entrelacement de $\psi_\beta | U$ dans G est égal à l'entrelacement formel de $\beta + M^*$ dans G.*

Preuve : Par définition, l'entrelacement $I_G(\psi_\beta | U)$ est l'ensemble des $x \in G$ pour lesquels ψ_β^x et ψ_β coïncident sur le sous-groupe $x^{-1}Ux \cap U$, c'est-à-dire pour lesquels on a, pour tout $m \in x^{-1}Mx \cap M$, l'égalité $\psi(\beta x m x^{-1}) = \psi(\beta m)$. Tenant compte de ce que $\mathrm{tr}_{A/F}(\beta x m x^{-1}) = \mathrm{tr}_{A/F}(x^{-1}\beta x m)$, on obtient l'égalité $\psi((x^{-1}\beta x - \beta)m) = 1$, c'est-à-dire que la quantité $x^{-1}\beta x - \beta$ appartient au dual de $x^{-1}Mx \cap M$, égal à $x^{-1}M^*x + M^*$. Ceci revient bien à dire que l'intersection entre $\beta + M^*$ et $x^{-1}(\beta + M^*)x$ n'est pas vide. $\square$

Le lemme suivant est l'application des théorèmes de points fixes que nous avons démontrés à la section 2.4. Il détermine la trace sur G de l'entrelacement formel d'une certaine partie de $\bar{A}$.

Lemme 3.37 *Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A. Pour tout $0 \leqslant m < q$, on a*

$$\Big(1 + \bar{\mathfrak{M}}^m\Big)\bar{B}^\times\Big(1 + \bar{\mathfrak{M}}^m\Big) \cap \boldsymbol{G} = \Big(1 + \boldsymbol{\mathfrak{M}}^m\Big)\boldsymbol{B}^\times\Big(1 + \boldsymbol{\mathfrak{M}}^m\Big) \ .$$

Preuve : Il s'agit du théorème 2.35 pour $\Delta = \boldsymbol{\mu}$ et $\mathrm{U} = 1 + \bar{\mathfrak{M}}^m$. On sait déjà que les conditions de descente $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{C_2})$ sont vérifiées. Appliquons le lemme 3.5 à la strate simple $[\bar{\Lambda}, n, 0, \beta]$ de la F-algèbre déployée $\bar{A}$, de façon à obtenir, pour tout $b \in \bar{B}^\times$, l'égalité

$$(1+\bar{\mathfrak{M}}^m)b(1+\bar{\mathfrak{M}}^m) \cap \bar{B}^\times = (1+\bar{\mathfrak{M}}^m \cap \bar{B})b(1+\bar{\mathfrak{M}}^m \cap \bar{B}) \ . \tag{3.21}$$

Supposons que $b \in \boldsymbol{B}^\times$, et prenons les points fixes de (3.21) par l'action du groupe $\boldsymbol{\mu}$, de façon à obtenir l'égalité

$$(1+\boldsymbol{\mathfrak{M}}^m)b(1+\boldsymbol{\mathfrak{M}}^m) \cap \boldsymbol{B}^\times = (1+\boldsymbol{\mathfrak{M}}^m \cap \boldsymbol{B})b(1+\boldsymbol{\mathfrak{M}}^m \cap \boldsymbol{B}) \ . \tag{3.22}$$

Il s'agit de la condition $(\mathbf{C_3})$. Le résultat est une conséquence du lemme 2.35. □

Théorème 3.38 *Soient* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *une strate simple de* A*, et soit* $0 \leqslant m < q$*. Pour tout* $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$*, on a*

$$I_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m+1}) = \big(1+\boldsymbol{\mathfrak{M}}^m\big)\boldsymbol{B}^\times\big(1+\boldsymbol{\mathfrak{M}}^m\big) \ . \tag{3.23}$$

Preuve : Désignons par $I_{\boldsymbol{G}}^m(\theta)$ le membre de gauche de (3.23) et par $\mathcal{I}^m$ son membre de droite, et commençons par prouver que $\boldsymbol{\theta}$ est entrelacé par $\boldsymbol{B}^\times$. Si $x \in \boldsymbol{B}^\times$, alors x_i entrelace $\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{\theta}|H^{m+1}(\boldsymbol{\beta}^i, \boldsymbol{\Lambda}^i)$ d'après les théorèmes 3.31 et 3.6. Soit $h \in x^{-1}\boldsymbol{H}^{m+1}x \cap \boldsymbol{H}^{m+1}$. Alors la quantité $\boldsymbol{\theta}(xhx^{-1})\boldsymbol{\theta}(h)^{-1}$ est égale au produit des $\boldsymbol{\theta}^i(x_ih_ix_i^{-1})\boldsymbol{\theta}^i(h_i)^{-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r(\mathbf{E})$. Puisque $h_i \in x_i^{-1}H^{m+1}(\boldsymbol{\beta}^i\,\boldsymbol{\Lambda}^i)x_i \cap H^{m+1}(\boldsymbol{\beta}^i, \boldsymbol{\Lambda}^i)$, chacun de ces facteurs est trivial, donc $\boldsymbol{B}^\times$ est inclus dans $I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta})$.

Supposons (3.23) prouvé pour $m \geqslant [q/2]$. Si $m \leqslant [q/2]$, alors $\mathcal{I}^m$ est réduit à l'expression $\mathcal{I}^m = \boldsymbol{J}^s\boldsymbol{B}^\times\boldsymbol{J}^s$. Puisque $\boldsymbol{J}^s$ normalise $\boldsymbol{\theta}$ et que $\boldsymbol{B}^\times$ l'entrelace, on en déduit que

$$\boldsymbol{J}^s\boldsymbol{B}^\times\boldsymbol{J}^s \subset I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta}) \subset I_{\boldsymbol{G}}^{[q/2]}(\boldsymbol{\theta})$$

et le terme de droite est justement égal à $\boldsymbol{J}^s\boldsymbol{B}^\times\boldsymbol{J}^s$. Il nous suffit donc de prouver (3.23) pour $m \geqslant [q/2]$. Nous procédons par récurrence sur q.

Si $q = n$, notons avant tout que $\boldsymbol{\mathfrak{M}}^m = \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{n-m}$. On a $I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta}) = I_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{\psi}_\beta|\mathbf{U}^{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}))$, lui-même égal, d'après le lemme 3.36, à l'entrelacement formel de $\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m}$ dans $\boldsymbol{G}$. Celui-ci est inclus dans l'entrelacement formel de $\beta + \bar{\mathfrak{P}}^{-m}$ dans $\boldsymbol{G}$ qui, selon [BK93], (1.5.8), est égal à $(1+\bar{\mathfrak{M}}^m)\bar{B}^\times(1+\bar{\mathfrak{M}}^m)$. Appliquant le lemme 3.37, on en déduit que $I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta})$ est inclus dans $\mathcal{I}^m$. Il reste à prouver l'inclusion inverse pour obtenir l'égalité cherchée, et pour cela montrons que $I_{\boldsymbol{G}}(\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m})$ est bi-invariant par $1+\boldsymbol{\mathfrak{M}}^m$. Puisqu'il contient déjà $\boldsymbol{B}^\times$, ceci conclura. Soit donc $x \in \boldsymbol{G}$ entrelaçant $\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m}$, et soit $y \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{n-m}$. Alors $x(1+y)$ entrelace $\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m}$ si, et seulement si

$$\beta x \equiv x(1+y)\beta(1+y)^{-1} \pmod{\boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m}x + x\boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m}} \ , \tag{3.24}$$

car $1+y \in \mathbf{U}^1(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$ normalise $\boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m}$. Ecrivons $(1+y)\beta(1+y)^{-1} = \beta - a_\beta(y)(1+y)^{-1}$, et compte tenu du fait que $a_\beta(y) \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m}$ et que x entrelace $\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m}$, on obtient

(3.24). Ceci prouve que l'entrelacement $I_{\boldsymbol{G}}(\beta + \mathfrak{P}^{-m})$ est invariant à droite par $1 + \mathfrak{M}^m$. L'invariance à gauche se prouve de façon identique.

Supposons maintenant que $q < n$, et soit γ une approximation de β relativement à $\mathfrak{A}$. On note $\boldsymbol{B}_\gamma$ le commutant de γ dans A et $q' = -k_0(\gamma, \mathfrak{A})$. Puisque $\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{q+1}$ appartient à $\mathscr{C}(\gamma, q, \mathfrak{A})$ et puisque $q' > q$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, c'est-à-dire appliquer le théorème 3.38 à la strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \gamma]$ pour l'entier q, de façon à obtenir

$$I_{\boldsymbol{G}}^q(\boldsymbol{\theta}) = \left(1 + \mathfrak{M}^q(\gamma, \mathfrak{A})\right)\boldsymbol{B}_\gamma^\times\left(1 + \mathfrak{M}^q(\gamma, \mathfrak{A})\right) .$$

Par conséquent, nous pouvons appliquer la proposition 3.30, ce qui nous apprend que

$$I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta}) = I_{\boldsymbol{G}}^q(\boldsymbol{\theta}) \cap I_{\boldsymbol{G}}(\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*) .$$

Appliquant le lemme 3.29 conjoitement à la proposition 3.14, l'entrelacement de $\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*$ dans $\boldsymbol{G}$ est inclus dans $I_{\boldsymbol{G}}(\beta + (\bar{\mathfrak{H}}^{m+1})^*)$ qui, selon [BK93], (3.3.10) appliqué conjointement au lemme 3.37, est égal à $\mathcal{I}^m$. Il reste encore à prouver que $\mathcal{I}^m$ est inclus dans $I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta})$, et pour cela nous commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.39 *L'ensemble $\mathcal{I}^m$ est inclus dans $I_{\boldsymbol{G}}(\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*)$.*

Preuve : Puisque $I_{\boldsymbol{G}}(\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*)$ contient $\boldsymbol{B}^\times$, il suffit de prouver qu'il est bi-invariant par les groupes $\boldsymbol{J}^s$ et $1 + \mathfrak{P}^{q-m} \cap \mathfrak{N}_{-m}(\beta, \mathfrak{A})$. Si $a \in \boldsymbol{J}^s$ et si x entrelace $\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*$, alors xa l'entrelace également si $xa\beta a^{-1}x^{-1} - \beta$ appartient à $xa(\mathfrak{H}^{m+1})^*a^{-1}x^{-1} + (\mathfrak{H}^{m+1})^*$. Il est donc suffisant, compte tenu du fait que a normalise $(\mathfrak{H}^{m+1})^*$, de prouver que $a\beta - \beta a$ appartient à $a(\mathfrak{H}^{m+1})^*$, ce qui est l'analogue de [BK93] (3.3.7). D'après *ibid.*, $\boldsymbol{J}^s(\mathfrak{H}^{m+1})^*$ est inclus dans $(\bar{\mathfrak{H}}^{m+1})^* \cap \boldsymbol{A} = (\mathfrak{H}^{m+1})^*$, de sorte qu'il nous reste à prouver que $a_\beta(a) \in (\mathfrak{H}^{m+1})^*$. Puisque, selon [BK93], (3.1.16), l'élément a est dans $(\bar{\mathfrak{H}}^{m+1})^* \cap \boldsymbol{A} = (\mathfrak{H}^{m+1})^*$, l'élément xa appartient à $I_{\boldsymbol{G}}(\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*)$. Ceci prouve l'invariance à droite. L'invariance à gauche se prouve de façon identique.

Notons que $a_\beta(\mathfrak{P}^{q-m} \cap \mathfrak{N}_{-m}(\beta, \mathfrak{A}))$ est inclus dans $\mathfrak{P}^{-m} \subset (\mathfrak{H}^{m+1})^*$, de sorte qu'on peut raisonner de façon identique pour prouver que $I_{\boldsymbol{G}}(\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*)$ est bi-invariant par $1 + \mathfrak{P}^{q-m} \cap \mathfrak{N}_{-m}(\beta, \mathfrak{A})$. □

Remarquons que $\mathcal{I}^m$ est inclus dans $\boldsymbol{J}^s I_{\boldsymbol{G}}(\beta + \mathfrak{P}^{-m})\boldsymbol{J}^s$, et écrivons que $I_{\boldsymbol{G}}(\beta + \mathfrak{P}^{-m})$ est inclus dans $I_{\boldsymbol{G}}(\gamma + \mathfrak{P}^{-q})$, lui-même inclus dans $I_{\boldsymbol{G}}^q(\boldsymbol{\theta})$. Puisque $I_{\boldsymbol{G}}^q(\boldsymbol{\theta})$ est bi-invariant par $\boldsymbol{J}^s$, on en déduit que $\mathcal{I}^m$ est inclus dans l'intersection de $I_{\boldsymbol{G}}^q(\boldsymbol{\theta})$ avec $I_{\boldsymbol{G}}(\beta + (\bar{\mathfrak{H}}^{m+1})^*)$, c'est-à-dire dans $I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta})$. Ceci termine la preuve du théorème 3.38. □

Proposition 3.40 *Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A et soit $0 \leqslant m < q$. Tout caractère $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ est normalisé par $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap \boldsymbol{B}^\times)(1 + \mathfrak{M}^m(\beta, \mathfrak{A}))$.*

PREUVE : La démonstration est identique à celle de [BK93], (3.3.17). $\square$

Théorème 3.41 *Soit* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *une strate simple de* A*, soit* $1 \leqslant m \leqslant s$*, et soit* $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m-1, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$*. Le sous-groupe dérivé* $[\boldsymbol{J}^m, \boldsymbol{J}^m]$ *est inclus dans* $\boldsymbol{H}^m$*, et l'application* $(x, y) \mapsto \boldsymbol{\theta}([x, y])$ *définit une forme alternée non dégénérée de* $\boldsymbol{J}^m/\boldsymbol{H}^m \times \boldsymbol{J}^m/\boldsymbol{H}^m$ *dans* $\mathbb{C}^\times$*.*

PREUVE : Le sous-groupe dérivé $[\boldsymbol{J}^m, \boldsymbol{J}^m]$ est inclus à la fois dans $\boldsymbol{G}$ et dans $[\bar{J}^m, \bar{J}^m]$ donc, selon [BK93], (3.4.1), dans $\bar{H}^m \cap \boldsymbol{G} = \boldsymbol{H}^m$. Soit $x \in \boldsymbol{\mathfrak{J}}^m$ tel que $\boldsymbol{\theta}([1 + x, \boldsymbol{J}^m]) = 1$. Il s'agit de montrer que $x \in \boldsymbol{\mathfrak{H}}^m$. Supposons, dans un premier temps, que $m = s$. Appliquant le lemme 3.27 avec $k = \ell = s$, on obtient l'égalité $\boldsymbol{\theta}([1 + x, 1 + y]) = \boldsymbol{\psi}_{(1+x)^{-1}\beta(1+x)-\beta}(1 + y)$ pour tout $y \in \boldsymbol{\mathfrak{J}}^s$. Remarquant que

$$(1 + x)^{-1}\beta(1 + x) \equiv \beta + a_\beta(x) \pmod{a_\beta(\boldsymbol{\mathfrak{J}}^s)\boldsymbol{\mathfrak{J}}^s} ,$$

on en déduit que $a_\beta(x)$ appartient à $(\boldsymbol{\mathfrak{J}}^s)^*$ et donc, selon le lemme 3.29, à $(\bar{\mathfrak{J}}^s)^*$. D'après [BK93], (3.4.1), on en déduit que $x \in \bar{\mathfrak{H}}^s \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\mathfrak{H}}^s$.

Supposons maintenant que $m < s$, et écrivons $x \in \boldsymbol{J}^m$ sous la forme $x = uz$, avec $u \in \mathrm{U}^m(\boldsymbol{\mathfrak{B}})$ et $z \in \boldsymbol{J}^s$. Ainsi, on a $\theta([x, \boldsymbol{J}^m]) = 1$ si et seulement si $\theta([z, \boldsymbol{J}^m]) = 1$, ce dont on déduit que $z \in \boldsymbol{H}^s$, c'est-à-dire que x appartient à $\mathrm{U}^m(\boldsymbol{\mathfrak{B}})\boldsymbol{H}^s = \boldsymbol{H}^m$. $\square$

3.3 Caractères simples

3.3.1 Les ordres associés à une strate simple

A la strate simple $[\boldsymbol{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$ correspond, d'après le paragraphe 3.2.1, deux familles de $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}}$-réseaux $\boldsymbol{\mathfrak{J}}^k = \boldsymbol{\mathfrak{J}}^k(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$ et $\boldsymbol{\mathfrak{H}}^k = \boldsymbol{\mathfrak{H}}^k(\beta, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$, $k \geqslant 0$, auxquels sont associés les sous-groupes ouverts compacts $\boldsymbol{J}^k = \boldsymbol{\mathfrak{J}}^k \cap \mathrm{U}^k(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$ et $\boldsymbol{H}^k = \boldsymbol{\mathfrak{H}}^k \cap \mathrm{U}^k(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$, $k \geqslant 0$. Comme d'habitude, nous notons $q = -k_0(\beta, \mathfrak{A})$, ainsi que $r = [q/2] + 1$ et $s = [(q + 1)/2]$. Ceci étant dit, nous pouvons définir, pour tout entier $k \geqslant 0$, deux $\mathfrak{o}_F$-modules

$$\mathfrak{J}^k = \mathfrak{J}^k(\beta, \mathfrak{A}) = \boldsymbol{\mathfrak{J}}^k \cap A \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}^k = \mathfrak{H}^k(\beta, \mathfrak{A}) = \boldsymbol{\mathfrak{H}}^k \cap A . \tag{3.25}$$

Proposition 3.42 *Pour tout* $k \geqslant 0$*, les* $\mathfrak{o}_F$*-modules* $\mathfrak{J}^k$ *et* $\mathfrak{H}^k$ *sont des* $\mathfrak{o}_F$*-réseaux de* A*. En outre,*

1. *si* β *est minimal, nous avons* $\mathfrak{J}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{B} + \mathfrak{P}^s$ *et* $\mathfrak{H}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{B} + \mathfrak{P}^r$*.*
2. *si* β *n'est pas minimal, et si* γ *est une approximation de* β *dans* A*, nous avons* $\mathfrak{J}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{B} + \mathfrak{J}^s(\gamma, \mathfrak{A})$ *et* $\mathfrak{H}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{B} + \mathfrak{H}^r(\gamma, \mathfrak{A})$*.*

PREUVE : Nous démontrons le résultat pour $\mathfrak{J}$ par récurrence sur q. La démonstration pour $\mathfrak{H}$ est similaire. Si $q = n$, alors $\boldsymbol{\mathfrak{J}} = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^s$, de sorte que $\mathfrak{J} = \mathfrak{B} + \mathfrak{P}^s$. Si β n'est pas minimal, et si γ est une approximation de β relativement à $\mathfrak{A}$, alors on a $\boldsymbol{\mathfrak{J}} = \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \mathfrak{J}^s(\gamma, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$, de sorte qu'on a l'égalité $\mathfrak{J} = \mathfrak{B} + \mathfrak{J}^s(\gamma, \mathfrak{A})$. $\square$

Pour tout entier $k \geqslant 0$, nous définissons maintenant deux sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$ en posant

$$J^k = J^k(\beta, \mathfrak{A}) = \boldsymbol{J}^k \cap G \quad \text{et} \quad H^k = H^k(\beta, \mathfrak{A}) = \boldsymbol{H}^k \cap G \ . \tag{3.26}$$

Compte tenu de (3.25), ces groupes peuvent aussi être définis par récurrence : si β est minimal, nous avons $J^1 = \mathrm{U}^1(\mathfrak{B})\mathrm{U}^s(\mathfrak{A})$, et si β n'est pas minimal, et si γ est une approximation de β dans A, nous avons $J^1 = \mathrm{U}^1(\mathfrak{B})J^s(\gamma, \mathfrak{A})$. Un résultat similaire est valable pour H^1.

Proposition 3.43 *Pour tout $k \geqslant 0$, les sous-groupes J^k et H^k sont des sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{U}^k(\mathfrak{A})$ normalisés par $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times)J$. Le groupe H^k est un sous-groupe distingué de J^k, et le quotient J^k/H^k est un p-groupe abélien fini.*

Preuve : Nous démontrons la première affirmation pour J^k. La démonstration pour H^k est similaire. D'après la proposition 3.15, le sous-groupe $\boldsymbol{J}^k$ est normalisé par $(\boldsymbol{\mathfrak{K}}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times)\boldsymbol{J}$. Puisque $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times \subset \boldsymbol{\mathfrak{K}}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times$, et puisque que $J \subset \boldsymbol{J}$ le groupe $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times)J$ normalise $\boldsymbol{J}^k$, et donc J^k. Ecrivons, d'après la proposition 3.15, la suite exacte de Γ-groupes

$$1 \to \boldsymbol{H}^k \to \boldsymbol{J}^k \to \boldsymbol{J}^k/\boldsymbol{H}^k \to 1$$

et appliquons-lui le foncteur de descente $\mathrm{H}^0(\Gamma, -)$, de façon à obtenir une suite exacte longue de cohomologie

$$1 \to H^k \to J^k \to (\boldsymbol{J}^k/\boldsymbol{H}^k)^\Gamma \to \mathrm{H}^1(\Gamma, \boldsymbol{H}^k) \ .$$

D'après la proposition 2.38, le dernier terme est trivial, ce dont on déduit que le quotient J^k/H^k est un sous-groupe de $\boldsymbol{J}^k/\boldsymbol{H}^k$, ce qui prouve le résultat. $\square$

Remarque 3.44 Si $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ est une strate simple de A et si $x \in G$, la strate $[\mathfrak{A}^x, n, 0, \beta^x]$ est simple et, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a $H^k(\beta^x, \mathfrak{A}^x) = H^k(\beta, \mathfrak{A})^x$ et $J^k(\beta^x, \mathfrak{A}^x) = J^k(\beta, \mathfrak{A})^x$.

3.3.2 Les caractères simples

Nous voici enfin arrivés à un niveau où nous pouvons définir les caractères simples attachés à une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ de A. Plus précisément, nous définissons pour tout entier $0 \leqslant m < q$ une famille $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ de caractères de H^{m+1}.

Définition 3.45 *Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A, et soit $0 \leqslant m < q$. L'ensemble $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ des* caractères simples *attachés à $[\mathfrak{A}, n, m, \beta]$ est l'ensemble*

$$\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A}) = \{\boldsymbol{\theta}|H^{m+1} \ ; \ \boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}})\} \ .$$

Proposition 3.46 *Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A, et soit $0 \leqslant m < q$. Tout caractère $\theta \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ est normalisé par $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times)J^1$.*

Preuve : Puisque le groupe $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A})\cap B^\times)J^1$ est inclus dans $(\mathfrak{K}(\boldsymbol{\mathfrak{A}})\cap \boldsymbol{B}^\times)\boldsymbol{J}^1$, le caractère θ est par définition la restriction d'un caractère normalisé par $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A})\cap B^\times)J^1$ à un sous-groupe qui l'est également. $\square$

Nous vérifions tout de suite que notre définition par restriction est cohérente avec une définition par approximations successives, ce dont on déduit que l'ensemble $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ est indépendant du choix du caractère additif $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}$ prolongeant ψ_F.

Proposition 3.47 *Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A, soit $0 \leqslant m < q$ et soit θ un caractère du groupe H^{m+1}. Alors θ est un caractère simple si et seulement si*

1. *le caractère θ est normalisé par $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times$;*
2. *si $q = n$, alors $\theta|\mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) = \psi_\beta$ et $\theta|\mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})$ se factorise par $\mathrm{N}_{B/E}$;*
3. *si γ est une approximation de β relative à $\mathfrak{A}$, il existe $\theta_\gamma \in \mathscr{C}(\gamma, m', \mathfrak{A})$ tel que $\theta|H^{m'+1}(\mathfrak{A}) = \psi_{\beta-\gamma}\theta_\gamma$, et $\theta|\mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})$ se factorise par $\mathrm{N}_{B/E}$.*

Preuve : Choisissons $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$ prolongeant θ. Si $q = n$, on a

$$\boldsymbol{\theta}|\mathrm{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\psi}_\beta \ , \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}|\mathrm{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}}) = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}} \ ,$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un caractère de $\mathrm{U}^1_{\mathbf{E}}$. Par restriction, compte tenu du fait que $\boldsymbol{\psi}$ prolonge ψ, le résultat s'ensuit. Si β n'est pas minimal, et si γ désigne une approximation de β relativement à $\mathfrak{A}$, il existe un caractère quasi-simple $\boldsymbol{\theta}_\gamma \in \mathscr{C}(\gamma, m', \boldsymbol{\mathfrak{A}})$ tel que l'on ait

$$\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m'+1} = \boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}_\gamma \ , \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}|\mathrm{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}}) = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}} \ ,$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un caractère de $\mathrm{U}^1_{\mathbf{E}}$. Par restriction, en notant θ_γ la restriction de $\boldsymbol{\theta}_\gamma$ à $H^{m'+1}(\gamma, \mathfrak{A})$, on obtient l'égalité annoncée.

Démontrons maintenant l'affirmation réciproque. Soit donc θ un caractère de H^{m+1} vérifiant les propriétés $1, 2, 3$ ci-dessus. Si $q = n$, nous avons donc

$$\theta|\mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}) = \psi_\beta \ , \quad \text{et} \quad \theta|\mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E} \ ,$$

où λ est un caractère de U^1_E. Le caractère θ peut être étendu en un caractère $\boldsymbol{\theta}$ de $\mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})\mathbf{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$ en posant $\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\psi}_\beta$, de sorte que chacun des $\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^{i\times} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\beta}^i}$ est entrelacé par $\boldsymbol{B}^{i\times}$. D'après [Gra00], (1.10), on en déduit que $\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^{i\times}$ se factorise sous la forme $\boldsymbol{\lambda}^i \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^i/\mathbf{E}^i}$, où $\boldsymbol{\lambda}^i$ est un caractère de $\mathrm{U}^1_{\mathbf{E}^i}$ tel que $\boldsymbol{\lambda}^i \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^i/\mathbf{E}^i}$ et $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\beta}^i}$ coïncident sur $\mathbf{U}^1_{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}}^i)$. Ainsi on peut étendre $\boldsymbol{\theta}$ à $\boldsymbol{H}^{m+1} = \mathbf{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}})\mathbf{U}^{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}})$ en posant $\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}}^i) = \boldsymbol{\lambda}^i \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^i/\mathbf{E}^i}$. On prouve comme en (3.12) que $\boldsymbol{\theta}^i$ est normalisé par $\mathfrak{K}(\boldsymbol{\Lambda}^i)\cap \boldsymbol{B}^{i\times}$. Par construction, $\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{G}^i$ est un caractère simple de $\boldsymbol{H}^{m+1}(\boldsymbol{\beta}^i, \boldsymbol{\mathfrak{A}}^i)$, de sorte que $\boldsymbol{\theta}$ est quasi-simple et étend θ.

Si β n'est pas minimal, et si γ désigne une approximation de β relativement à $\mathfrak{A}$, nous avons donc

$$\theta|H^{m'+1} = \psi_{\beta-\gamma}\theta_\gamma \ , \quad \text{et} \quad \theta|\mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B}) = \lambda \circ \mathrm{N}_{B/E} \ ,$$

où $\theta_\gamma \in \mathscr{C}(\gamma, m', \mathfrak{A})$ et où λ un caractère de U^1_E tel que $\lambda \circ \mathrm{N}_{B/E}$. Par définition, il existe un prolongement $\boldsymbol{\theta}_\gamma$ de θ_γ à $\mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})\boldsymbol{H}^{m'+1}$, de sorte qu'on peut étendre θ en un caractère $\boldsymbol{\theta}$ de $\mathrm{U}^1_{m+1}(\mathfrak{B})\boldsymbol{H}^{m'+1}$ en posant $\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m'+1} = \boldsymbol{\psi}_{\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}_\gamma$. Appliquant la proposition 3.30 à $\boldsymbol{\theta}_\gamma$ et à $x \in \boldsymbol{B}^\times$, nous obtenons, pour tout $h \in x^{-1}\boldsymbol{H}^{m'+1}x \cap \boldsymbol{H}^{m'+1}$, égalité entre $\boldsymbol{\theta}^x_\gamma(h)\boldsymbol{\theta}^{-1}_\gamma(h)$ et $\boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\gamma x-\gamma}(h)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^x(h)\boldsymbol{\theta}^{-1}(h) &= \boldsymbol{\theta}^x_\gamma(h)\boldsymbol{\theta}^{-1}_\gamma(h)\boldsymbol{\psi}^x_{\beta-\gamma}(h)\boldsymbol{\psi}^{-1}_{\beta-\gamma}(h) \\ &= \boldsymbol{\theta}^x_\gamma(h)\boldsymbol{\theta}^{-1}_\gamma(h)\boldsymbol{\psi}^{-1}_{x^{-1}\gamma x-\gamma}(h)\boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x-\beta}(h) \end{aligned}$$

qui est égal à $\boldsymbol{\psi}_{x^{-1}\beta x-\beta}(h)$, ce qui vaut 1 puisque x commute à β. Ainsi $\boldsymbol{B}^\times$ entrelace le caractère $\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m'+1} \cap \boldsymbol{B}^\times$, de sorte que, d'après [Gra00], (1.10), on peut écrire $\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m'+1} \cap \boldsymbol{B}^{i\times} = \boldsymbol{\lambda}^i \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^i/\mathbf{E}^i}$, où $\boldsymbol{\lambda}^i$ est un caractère de $U^1_{\mathbf{E}^i}$ tel que $\boldsymbol{\lambda}^i \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^i/\mathbf{E}^i}$ et $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\beta}^i-\boldsymbol{\gamma}^i}\boldsymbol{\theta}_\gamma$ coïncident sur $\mathbf{U}^1_{m'+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}}^i)$. Ainsi on peut étendre $\boldsymbol{\theta}$ au groupe $\boldsymbol{H}^{m+1} = \mathbf{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}})\boldsymbol{H}^{m'+1}$ en posant $\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}^1_{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{B}}^i) = \boldsymbol{\lambda}^i \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}^i/\mathbf{E}^i}$. On prouve comme en (3.13) que $\boldsymbol{\theta}^i$ est normalisé par $\mathfrak{K}(\boldsymbol{\Lambda}^i) \cap \boldsymbol{B}^{i\times}$. Par construction, $\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{H}^{m+1} \cap \boldsymbol{G}^i$ est un caractère simple de $\boldsymbol{H}^{m+1}(\boldsymbol{\beta}^i, \boldsymbol{\mathfrak{A}}^i)$, de sorte que $\boldsymbol{\theta}$ est quasi-simple et étend θ. $\square$

Corollaire 3.48 *L'ensemble $\mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ est indépendant du choix du caractère $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{F}}$ prolongeant ψ_F.*

Nous allons maintenant déterminer l'entrelacement dans G des caractères simples attachés à la strate simple $[\mathfrak{A}, n, m, \beta]$. Nous commençons par prouver le lemme de descente suivant.

Lemme 3.49 *Soit $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ une strate simple de A, et soit un entier $0 \leqslant m < q$. Alors*

$$\left(1 + \boldsymbol{\mathfrak{M}}^m\right)\boldsymbol{B}^\times\left(1 + \boldsymbol{\mathfrak{M}}^m\right) \cap G = \left(1 + \mathfrak{M}^m\right)B^\times\left(1 + \mathfrak{M}^m\right) \ .$$

Preuve : Partons de (3.22), et supposons que $b \in B^\times$. Puisque $1 + \bar{\mathfrak{M}}^m \cap \boldsymbol{B} = \mathbf{U}_{m'}(\boldsymbol{\Lambda}) \cap \boldsymbol{B}^\times$, compte tenu de la proposition 2.39, on peut appliquer la proposition 2.40. En prenant les points fixes par le groupe Γ, on obtient la condition $(\mathbf{C_3})$ pour les groupes $\boldsymbol{B}^\times$ et $1 + \boldsymbol{\mathfrak{M}}^m$. Le résultat est une conséquence du lemme 2.35. $\square$

Théorème 3.50 *Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A, et soit $0 \leqslant m < q$. Pour tout $\theta \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$, on a*

$$I_G(\theta|H^{m+1}) = \left(1 + \mathfrak{M}^m\right)B^\times\left(1 + \mathfrak{M}^m\right) \ . \tag{3.27}$$

Remarque 3.51 Soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$. Alors $I_G(\theta|H^1) = J^1B^\times J^1$.

Preuve : Choisissons un caractère $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m, \mathfrak{A})$ dont la restriction à H^{m+1} est égale à θ. Notons $I_G^m(\theta)$ le membre de gauche de (3.27) et $\mathcal{I}^m$ son membre de droite. La démonstration se fait en trois étapes. Tout d'abord, nous connaissons, d'après le théorème 3.38, l'entrelacement dans $\boldsymbol{G}$ de la restriction de $\boldsymbol{\theta}$ à $\boldsymbol{H}^{m+1}$, et il s'agit de

$$I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta}) = \big(1 + \boldsymbol{\mathfrak{M}}^m\big)\boldsymbol{B}^\times\big(1 + \boldsymbol{\mathfrak{M}}^m\big)\ .$$

Tenant compte, d'autre part, du fait que restreindre un caractère accroît son entrelacement, c'est-à-dire que $I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta}) \cap G$ est inclus dans $I_G^m(\theta)$, on en déduit l'inclusion

$$\mathcal{I}^m \subset I_G^m(\theta)\ . \tag{3.28}$$

Supposons (3.27) prouvé pour $m \geqslant [q/2]$. Si $m \leqslant [q/2]$, alors $\mathcal{I}^m$ est réduit à l'expression $\mathcal{I}^m = J^s B^\times J^s$. On en déduit que

$$J^s B^\times J^s \subset I_G^m(\theta) \subset I_G^{[q/2]}(\theta)$$

et le terme de droite est justement égal à $J^s B^\times J^s$. Il nous suffit donc de prouver (3.27) pour $m \geqslant [q/2]$. Nous montrons maintenant que l'entrelacement formel de $\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*$ dans G contient $I_G^m(\theta)$. Nous procédons par récurrence sur q.

Si $q = n$, alors $I_G^m(\theta)$ est égal à $I_G(\psi_\beta|\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{A}))$, lui-même égal, d'après le lemme 3.36, à l'entrelacement formel de $\beta + \mathfrak{P}^{-m}$ dans G. Celui-ci est naturellement inclus dans l'entrelacement formel *dans* $\boldsymbol{G}$ de $\beta + \boldsymbol{\mathfrak{P}}^{-m}$, qui est égal à $I_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{\psi}_\beta|\mathbf{U}^{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}})) = I_{\boldsymbol{G}}^m(\boldsymbol{\theta})$. En appliquant le lemme 3.49, compte tenu du théorème 3.38, on en déduit que $I_G^m(\theta)$ est inclus dans $\mathcal{I}^m$, ce qui termine la démonstration dans le cas où β est minimal.

Si β n'est pas minimal, soit γ une approximation de β relative à $\mathfrak{A}$. On note B_γ le commutant de γ dans A, ainsi que $q' = -k_0(\gamma, \mathfrak{A})$. Puisque $\theta|H^{q+1}$ appartient à $\mathscr{C}(\gamma, q, \mathfrak{A})$ et puisque $q' > q$, on peut appliquer par récurrence le théorème 3.50 à la strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \gamma]$ pour l'entier q, de façon à obtenir

$$I_G^q(\theta) = \big(1 + \mathfrak{M}^q(\gamma, \mathfrak{A})\big)B_\gamma^\times\big(1 + \mathfrak{M}^q(\gamma, \mathfrak{A})\big)\ .$$

Par conséquent, nous pouvons appliquer la proposition 3.30, de sorte que si $x \in I_G^m(\theta)$ et $h \in x^{-1}H^{m+1}x \cap H^{m+1}$, on a

$$\theta^x(h)\theta(h)^{-1} = \psi_{x^{-1}\beta x - \beta}(h)\ .$$

Puisque $x \in I_G^m(\theta)$, le membre de gauche vaut 1, de sorte que $x^{-1}\beta x - \beta$ appartient au dual de $x^{-1}\mathfrak{H}^{m+1}x \cap \mathfrak{H}^{m+1}$ dans A, ce qui revient à dire que $x \in I_G(\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*)$. Par conséquent, nous obtenons l'inclusion

$$I_G^m(\theta) \subset I_G(\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*)\ . \tag{3.29}$$

D'après la proposition 2.44 appliquée au $\mathfrak{o}_F$-module $\mathfrak{H}^{m+1}$, le dual $(\mathfrak{H}^{m+1})^*$ de $\mathfrak{H}^{m+1}$ dans A est inclus dans le dual $(\boldsymbol{\mathfrak{H}}^{m+1})^*$ de $\boldsymbol{\mathfrak{H}}^{m+1}$ dans $\boldsymbol{A}$, en conséquence de quoi

$I_G(\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*)$ est inclus dans l'entrelacement formel de $\beta + (\boldsymbol{\mathfrak{H}}^{m+1})^*$ dans $\boldsymbol{G}$, de sorte que nous pouvons écrire

$$I_G(\beta + (\mathfrak{H}^{m+1})^*) \subset I_G(\beta + (\boldsymbol{\mathfrak{H}}^{m+1})^*) = I^m_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{\theta}) \cap G \ . \tag{3.30}$$

Enfin, pour prouver que $I_G(\beta + (\boldsymbol{\mathfrak{H}}^{m+1})^*) = \mathcal{I}^m$, il suffit d'appliquer le lemme 3.49. Ceci termine la démonstration du théorème 3.50. □

Théorème 3.52 *Soit* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *une strate simple de* A*, soit* $1 \leqslant m \leqslant s$*, et soit* $\theta \in \mathscr{C}(\beta, m-1, \mathfrak{A})$*. Le sous-groupe dérivé* $[J^m, J^m]$ *est inclus dans* H^m*, et l'application* $(x, y) \mapsto \theta([x, y])$ *définit une forme alternée non dégénérée de* $J^m/H^m \times J^m/H^m$ *dans* $\mathbb{C}^\times$*.*

Preuve : Choisissons un caractère $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}(\beta, m-1, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$ dont la restriction à H^m est égale à θ. D'après [BK93], (3.4.1), le sous-groupe dérivé $[\bar{J}^m, \bar{J}^m]$ est inclus dans $\bar{H}^m$. Le sous-groupe dérivé $[J^m, J^m]$ est donc inclus à la fois dans G et dans $[\bar{J}^m, \bar{J}^m]$ donc dans $\bar{H}^m \cap G = H^m$. Soit $x \in \mathfrak{J}^m$ tel que $\boldsymbol{\theta}([1+x, J^m]) = 1$. Il s'agit de montrer que $x \in \mathfrak{H}^m$. Supposons, dans un premier temps, que $m = s$. Appliquant le lemme 3.27 avec $k = \ell = s$, on obtient l'égalité $\boldsymbol{\theta}([1+x, 1+y]) = \boldsymbol{\psi}_{(1+x)^{-1}\beta(1+x)-\beta}(1+y)$ pour tout $y \in \boldsymbol{\mathfrak{J}}^s$, ce qui, compte tenu du fait que $\boldsymbol{\psi}|A = \psi$, nous donne l'égalité $\theta([1+x, 1+y]) = \psi_{(1+x)^{-1}\beta(1+x)-\beta}(1+y)$ pour tout $y \in \mathfrak{J}^s$. Remarquant que

$$(1+x)^{-1}\beta(1+x) \equiv \beta + a_\beta(x) \pmod{a_\beta(\mathfrak{J}^s)\mathfrak{J}^s} ,$$

on en déduit que $a_\beta(x)$ appartient à $(\mathfrak{J}^s)^*$ et donc, selon les lemmes 2.44 et 3.29, à $(\bar{\mathfrak{J}}^s)^*$. D'après [BK93], (3.1.22), on en déduit que $x \in \bar{\mathfrak{H}}^s \cap A = \mathfrak{H}^s$.

Supposons maintenant que $m < s$, et écrivons $x \in J^m$ sous la forme $x = uz$, avec $u \in \mathrm{U}^1_m(\mathfrak{B})$ et $z \in J^s$. Ainsi, on a $\theta([x, J^m]) = 1$ si et seulement si $\theta([z, J^m]) = 1$, ce dont on déduit que $z \in H^s$, c'est-à-dire que x appartient à $\mathrm{U}^1_m(\mathfrak{B})H^s = H^m$. □

3.3.3 Transfert des caractères simples

Fixons, comme en 2.3.3, une clôture algébrique $\overline{F}$ de F. Soit $[m_0, \beta]$ une paire simple sur F, et soit $\mathscr{C}_F(\beta, m_0)$ l'ensemble de caractères simples qui lui correspond. Fixons une extension finie non ramifiée $\mathbf{F}/F$, et soit $\mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\beta, m_0)$ l'ensemble dse caractères quasi-simples qui lui correspond. Soit maintenant $[\mathfrak{A}, n, m, \iota\beta]$ une réalisation de la paire simple $[m_0, \beta]$ dans la F-algèbre centrale simple A, et notons Λ une chaîne définissant $\mathfrak{A}$. Nous désignons par $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\mathfrak{A}},m,\beta}$ l'application de transfert de $\mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\beta, m_0)$ vers $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$.

Théorème 3.53 *Il existe une unique bijection* $\tau_{\mathfrak{A},m,\beta} : \mathscr{C}_F(\beta, m_0) \to \mathscr{C}(\iota\beta, m, \mathfrak{A})$ *rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\beta, m_0) & \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\mathfrak{A}},m,\beta}} & \mathscr{C}(\iota\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}}) \\ {\scriptstyle \mathrm{Res}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathscr{C}_F(\beta, m_0) & \xrightarrow[\tau_{\mathfrak{A},m,\beta}]{} & \mathscr{C}(\iota\beta, m, \mathfrak{A}) \end{array} \tag{3.31}$$

Preuve : L'unicité est immédiate. Il s'agit de prouver qu'une telle flèche existe. Soit $\theta \in \mathscr{C}_F(\beta, m_0)$, et choisissons un caractère $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\beta, m_0)$ prolongeant θ, dont le transfert à $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$ sera noté $\boldsymbol{\theta}_{\mathfrak{A}}$. Posons $\tau_{\mathfrak{A},m,\beta}(\theta) = \theta_{\mathfrak{A}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathfrak{A}}|H^{m+1}$. Il s'agit de prouver que $\theta_{\mathfrak{A}}$ est indépendant du choix du caractère quasi-simple $\boldsymbol{\theta}$. Soit donc $\boldsymbol{\theta}' \in \mathscr{C}_{\mathbf{F}}(\beta)$ un autre caractère quasi-simple prolongeant θ, et notons $\theta'_{\mathfrak{A}}$ la restriction à H^{m+1} de son transfert à $\mathscr{C}(\beta, m, \boldsymbol{\mathfrak{A}})$.

Dans le cas où $q = n$, les caractères $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\theta}'$ coïncident sur $\mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}(\mathbf{E}))$, de sorte que, selon le lemme 3.24, on peut écrire $\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\lambda}$, où $\boldsymbol{\lambda}$ est un caractère de $H^{m+1}(\beta, \mathfrak{A}(\mathbf{E}))$ trivial sur $\mathrm{U}^{m'+1}(\mathfrak{A}(\mathbf{E}))$ et, par hypothèse, sur U^1_E. On en déduit que $\boldsymbol{\theta}'_{\mathfrak{A}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathfrak{A}} \otimes \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}$. Le caractère $\boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}}|\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}) = (\boldsymbol{\lambda}|\mathrm{U}^1_E) \circ \mathrm{N}_{B/E}$ étant trivial, on obtient l'égalité entre les caractères $\theta'_{\mathfrak{A}}$ et $\theta_{\mathfrak{A}}$. Dans le cas où $q < n$, choisissons une approximation γ de β relativement à $\mathfrak{A}(E)$, et écrivons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}|H^{m'_0+1}(\beta, \mathfrak{A}(\mathbf{E})) &= \boldsymbol{\psi}_{A(\mathbf{E}),\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}_\gamma \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\theta}|\mathrm{U}^{m_0+1}_{\mathbf{E}} = \lambda \ , \\ \boldsymbol{\theta}'|H^{m'_0+1}(\beta, \mathfrak{A}(\mathbf{E})) &= \boldsymbol{\psi}_{A(\mathbf{E}),\beta-\gamma}\boldsymbol{\theta}'_\gamma \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\theta}'|\mathrm{U}^{m_0+1}_{\mathbf{E}} = \lambda' \ , \end{aligned}$$

où λ et λ' sont des caractères de $\mathrm{U}^1_{\mathbf{E}}$ et $\boldsymbol{\theta}_\gamma$ et $\boldsymbol{\theta}'_\gamma$ des caractères de $\mathscr{C}_{\mathbf{F}}(m'_0, \gamma)$. Par récurrence, leurs transferts respectifs $\boldsymbol{\theta}_{\gamma,\mathfrak{A}}$ et $\boldsymbol{\theta}'_{\gamma,\mathfrak{A}}$ coïncident sur $H^{m'+1}(\beta, \mathfrak{A})$, de sorte qu'il ne reste plus qu'à vérifier que $\theta_{\mathfrak{A}}$ et $\theta'_{\mathfrak{A}}$ coïncident sur le sous-groupe $\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{A}) \cap B^\times$. Or nous avons

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathfrak{A}}|\mathrm{U}^{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times = \lambda \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}'_{\mathfrak{A}}|\mathrm{U}^{m+1}(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) \cap \boldsymbol{B}^\times = \lambda' \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{B}/\mathbf{E}} \ ,$$

et les caractères λ et λ' coïncident par hypothèse sur U^1_E. Puisque l'image par $\mathrm{N}_{B/E}$ du groupe $\mathrm{U}^{m+1}(\mathfrak{A}) \cap B^\times$ contient $\mathrm{U}^{m_0+1}_E$, le résultat est démontré. □

Exemple 3.54 Soient A une F-algèbre centrale simple et $\beta \in A$ un élément simple sur F, c'est-à-dire que $[0, \beta] \in \mathrm{SP}(F)$. Soient $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$ deux ordres héréditaires E-purs de A, et notons τ_i le transfert de $\mathscr{C}_F(\beta)$ à $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A}_i)$. Etant donné $\theta_1 \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A}_1)$, on note θ_2 le transfert $\theta_2 = \tau_2 \circ \tau_1^{-1}(\theta_1)$. Alors ces deux caractères simples coïncident sur $H^1(\beta, \mathfrak{A}_1) \cap H^1(\beta, \mathfrak{A}_2)$.

Définition 3.55 *Si $[m_0, \beta] \in \mathrm{SP}(F)$, et si $[\mathfrak{A}_i, n_i, m_i, \iota_i\beta]$ en est une réalisation pour $i \in \{1, 2\}$, la composée $\tau_{\mathfrak{A}_2,m_2,\beta} \circ \tau^{-1}_{\mathfrak{A}_1,m_1,\beta}$ définit une application de transfert de $\mathscr{C}(\iota_1\beta, m_1, \mathfrak{A}_1)$ vers $\mathscr{C}(\iota_2\beta, m_2, \mathfrak{A}_2)$.*

De cette façon, nous généralisons les applications de transfert définies dans [BK93]. Terminons ce travail par la remarque suivante. Dans ce cas déployé (voir [BK93], (3.6.3)), si $[m'_0, \beta']$ est une autre paire simple sur F, et si $[\mathfrak{A}'_i, n'_i, m'_i, \iota'_i\beta']$ en est une réalisation pour $i \in \{1, 2\}$ de telle façon que les ensembles de caractères simples $\mathscr{C}(\iota_i\beta, m_i, \mathfrak{A}_i)$ et $\mathscr{C}(\iota'_i\beta, m'_i, \mathfrak{A}'_i)$ coïncident pour $i \in \{1, 2\}$, alors les bijections $\tau_{\mathfrak{A}_2,m_2,\beta} \circ \tau^{-1}_{\mathfrak{A}_1,m_1,\beta}$ et $\tau_{\mathfrak{A}'_2,m'_2,\beta'} \circ \tau^{-1}_{\mathfrak{A}'_1,m'_1,\beta'}$ sont les mêmes. On s'attend à ce que le transfert possède également cette propriété dans le cas non déployé.

Vincent Sécherre
Laboratoire de Mathématiques - Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay Cedex

Vincent.Secherre@math.u-psud.fr

Références

[Ber84] J. N. Bernstein. Le "centre" de Bernstein. In *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, pages 1–32. Hermann, Paris, 1984. Edited by P. Deligne.

[BF85] C. J. Bushnell and A. Fröhlich. Nonabelian congruence Gauss sums and p-adic simple algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 50(2) :207–264, 1985.

[BG00] Paul Broussous and Martin Grabitz. Pure elements and intertwining classes of simple strata in local central simple algebras. *Comm. Algebra*, 28(11) :5405–5442, 2000.

[BH96] Colin J. Bushnell and Guy Henniart. Local tame lifting for $\mathrm{GL}(N)$. I. Simple characters. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (83) :105–233, 1996.

[BK93] Colin J. Bushnell and Philip C. Kutzko. *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via compact open subgroups.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[BK98] Colin J. Bushnell and Philip C. Kutzko. Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 77(3) :582–634, 1998.

[BK99] Colin J. Bushnell and Philip C. Kutzko. Semisimple types in GL_n. *Compositio Math.*, 119(1) :53–97, 1999.

[BL02] P. Broussous and B. Lemaire. Building of $\mathrm{GL}(m, D)$ and centralizers. *Transform. Groups*, 7(1) :15–50, 2002.

[Bro95] Paul Broussous. *Le dual admissible d'une algèbre à division locale : une paramétrisation par des types simples à la Bushnell et Kutzko.* Université Louis Pasteur Département de Mathématique Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 1995. Thèse, Université de Strasbourg I (Louis Pasteur), Strasbourg, 1995.

[Bro98a] P. Broussous. Extension du formalisme de Bushnell et Kutzko au cas d'une algèbre à division. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 77(2) :292–326, 1998.

[Bro98b] Paul Broussous. Hereditary orders and embeddings of local fields in simple algebras. *J. Algebra*, 204(1) :324–336, 1998.

[Bro99] Paul Broussous. Minimal strata for $\mathrm{GL}(m, D)$. *J. Reine Angew. Math.*, 514 :199–236, 1999.

[BT84] F. Bruhat and J. Tits. Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. *Bull. Soc. Math. France*, 112(2) :259–301, 1984.

[Gra99] Martin Grabitz. Continuation of hereditary orders in local central simple algebras. *J. Number Theory*, 77(1) :1–26, 1999.

[Gra00] Martin Grabitz. On the construction of simple characters and the extensions of their Heisenberg representations in local centrally simple algebras. Ph. D. Thesis, Berlin, 2000.

[GSZ01] Martin Grabitz, Allan J. Silberger, and Ernst-Wilhelm Zink. Level zero types and Hecke algebras for local central simple algebras. *J. Number Theory*, 91(1) :92–125, 2001.

[Koc97] H. Koch. *Algebraic number theory.* Springer-Verlag, Berlin, russian edition, 1997. Reprint of the 1992 translation.

[Rei75] I. Reiner. *Maximal orders.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1975. London Mathematical Society Monographs, No. 5.

[Rei91] Harry Reimann. Representations of tamely ramified p-adic division and matrix algebras. *J. Number Theory*, 38(1) :58–105, 1991.

[Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux.* Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne.* Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.

[Ste01a] Shaun Stevens. Double coset decompositions and intertwining. *Manuscripta Math.*, 106(3) :349–364, 2001.

[Ste01b] Shaun Stevens. Intertwining and supercuspidal types for p-adic classical groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 83(1) :120–140, 2001.

[Wei74] André Weil. *Basic number theory.* Springer-Verlag, New York, third edition, 1974. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 144.

[Zin88] Ernst-Wilhelm Zink. Representation filters and their application in the theory of local fields. *J. Reine Angew. Math.*, 387 :182–208, 1988.

[Zin92] Ernst-Wilhelm Zink. Representation theory of local division algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 428 :1–44, 1992.

[Zin99] Ernst-Wilhelm Zink. More on embeddings of local fields in simple algebras. *J. Number Theory*, 77(1) :51–61, 1999.