# Commensurabilité de réseaux uniformes dans les immeubles à angles droits

**Frédéric Haglund**

**Résumé.** Deux réseaux uniformes d'un arbre régulier sont commensurables dans le groupe d'automorphismes de l'arbre. On généralise ce résultat classique à certains immeubles à angles droits de dimension 2 hyperboliques au sens de Gromov.

**Mots-clés** : immeubles, systèmes de chambres, produits graphés, réseaux uniformes, commensurabilité, hyperbolicité au sens de Gromov, séparabilité des sous-groupes quasi-convexes.

**Abstract.** Two uniform lattices of a regular tree are commensurable in the automorphism group of the tree. We generalize this classical result to certain Gromov-hyperbolic right-angled buildings of dimension 2.

**Key-words** : buildings, chamber systems, graph products, uniform lattices, commensurability, hyperbolicity in the sense of Gromov, quasi-convex subgroup separability.

AMS Classification : 51E24, 20E26, 20E42, 20F65, 57M07.

**0. Introduction.**

0.1 Cadre de l'étude.

Nous voulons étudier les réseaux uniformes d'immeubles de Tits. Le cadre des systèmes de chambre (de type un système de Coxeter donné) permet un traitement "géométrique" et élégant des problèmes immobiliers. Malheureusement, en général, il est inadapté aux questions de réseaux uniformes. Par exemple, lorsque $(W, I)$ est un système de Coxeter avec deux générateurs $i, j \in I$ tels que $m_{ij} = \infty$, tout système de chambre "de type $(W, I)$" (au sens de Tits ou Ronan, cf. [T], [R]) contient un arbre (infini). Donc aucun quotient fini d'un immeuble de type $(W, I)$ n'est un système de chambre de type $(W, I)$. Nous sommes donc amenés à considérer la classe des systèmes de chambres "localement de type $(W, I)$" : les systèmes de chambre sur $I$ dont tous les résidus *sphériques* de rang 2 sont des immeubles (du type attendu). Pour toutes les définitions sur les systèmes de chambre nous renvoyons à [R].

**Définition.** *Soit* $(W, I)$ *un système de Coxeter.* Un immeuble local de type $(W, I)$ *est un système de chambre* $X$ *sur* $I$ *connexe tel que pour toute partie sphérique* $J$ *de* $I$ *et toute chambre* $C$ *de* $X$*, le* $J$*-résidu* $R_J(C, X)$ *est un immeuble de type* $(W_J, J)$*. Un immeuble local* $X$ *est dit* propre *si pour tout couple* $(c, c')$ *de chambres adjacentes, il existe un unique* $i \in I$ *tel que* $c$ *et* $c'$ *sont* $i$*-adjacentes.*

Bien sûr, un immeuble local de type $(W, I)$ est un système de chambre localement de type $(W, I)$, et un immeuble de type $(W, I)$ est un immeuble local de type $(W, I)$.

Rappelons qu'un système de Coxeter $(W, I)$ est dit *à angles droits* si la matrice de Coxeter vérifie $m_{ij} = 2$ ou $\infty$ pour tout $i, j \in I$ : c'est pour des immeubles de ce type que nous obtenons des résultats de commensurabilité.

**Définition.** *Si* $(W, I)$ *est un système de Coxeter à angles droits et si* $(q_i)_{i \in I}$ *est une famille d'entiers (avec* $q_i \geq 2$*), nous dirons qu'un immeuble local* $X$ *de type* $(W, I)$ *est* de paramètres $(q_i)_{i \in I}$ *si tout résidu de* $X$ *de type* $\{i\}$ *contient* $q_i$ *chambres.*

**Exemples (non locaux).** Si $q_1, q_2$ sont deux entiers $\geq 2$, il existe (à isomorphisme près) un unique arbre birégulier de valences $q_1, q_2$, c'est un immeuble de type le groupe diédral infini de paramètres $q_1, q_2$.

On montre plus généralement que pour tout $(W, I)$ à angle droit et tout système de paramètres $(q_i)_{i \in I}$, il existe un unique immeuble $\Delta(W, I, (q_i)_{i \in I})$ de type $(W, I)$ et de paramètres $(q_i)_{i \in I}$ (cf. [HP]). En particulier M. Bourdon a défini et étudié l'unique immeuble $I_{p,(q_1, \cdots, q_p)}$ de type le système de Coxeter engendré par les réflexions par rapport aux cotés consécutifs $a_1, \cdots, a_p$ (numérotation mod. $p$) d'un $p$-gone hyperbolique à angles droits ($p \geq 5$), de paramètres $q_1, \cdots, q_p$ (cf. [$B_1$]).

On peut considérer des immeubles de dimension 2 dont les chambres sont plus générales. Soit $I$ un ensemble et $L$ un graphe d'ensemble de sommets $I$ sans boucle ni arête double ni cycle de longueur 3. Considérons la matrice de Coxeter à angles droits définie par $m_{ij} = 2 \iff i$ et $j$ sont liés dans $L$. Soit $(W(L), I)$ le système de Coxeter associé. Pour tout système de paramètres $(q_i)_{i \in I}$ nous obtenons donc un immeuble $\Delta(W(L), I, (q_i)_{i \in I})$, noté $\Delta(L, (q_i)_{i \in I})$ pour plus de simplicité. Dans la réalisation géométrique de Davis (cf. [D]), les chambres de l'immeuble sont les cônes sur (la première subdivision barycentrique de) $L$. Lorsque $L$ est un $p$-cycle, on retrouve $\Delta(L, (q_i)_{i \in I}) = I_{p,(q_1, \cdots, q_p)}$. Et l'espace métrique $\Delta(W(L), I, (q_i)_{i \in I})$ (muni de la distance de galerie) est hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si la plus petite longueur d'un circuit de $L$ est $\geq 5$ (cf. [D] à nouveau).

On étend naturellement aux systèmes de chambres localement de type $(W, I)$ (ou aux immeubles locaux de type $(W, I)$) la notion de "2-coverings" (due à Tits) en celle de *revêtement*:

c'est un morphisme de systèmes de chambres sur $I$ qui réalise un isomorphisme sur tout résidu *sphérique* de rang $\leq 2$ . Dans l'article [$R_2$], la théorie des revêtements de cette catégorie a été étudiée: elle est bien décrite par l'homotopie des galeries (engendrée par des homotopies élémentaires dans les résidus *sphériques* de rang $\leq 2$): il y a un groupe fondamental, un revêtement universel, etc ...
Tout revêtement d'un immeuble local (resp. d'un immeuble local propre) est un immeuble local (resp. un immeuble local propre). En effet un tel revêtement induit un revêtement des résidus sphériques, qui sont des immeubles, donc sont simplement connexes : un revêtement induit donc un isomorphisme sur chaque résidu sphérique. En utilisant l'approche locale des immeubles (voir [T] ou [R], theorem 4.9) et les constructions arborescentes d'immeubles (cf. [HP]), on peut montrer que le revêtement universel d'un immeuble local de type $(W, I)$ est un immeuble de même type.

Tous les immeubles locaux finis de même type (à angle droit) et de mêmes paramètres $(q_i)_{i\in I}$ ont donc même revêtement universel ; d'où la question :

deux immeubles locaux finis de même type (à angle droit) et de mêmes paramètres $(q_i)_{i\in I}$ admettent-ils un revêtement fini commun ?

En termes de groupes fondamentaux : les $\pi_1$ de deux immeubles locaux de type $(W, I)$ et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$ ont-ils des sous-groupes d'indice fini conjugués dans $\mathrm{Aut}(\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I}))$?

**0.2 Résultats.**

Nous introduisons sur les immeubles locaux propres de type à angles droits une notion de transport parallèle et d'holonomie (cf. section 1), pour lesquelles on obtient le résultat suivant (section 3):

**Proposition.** *Soit* $\Gamma_0 = \Gamma(W, I, (q_i)_{i\in I})$ *le quotient du produit libre des* $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ *par le sous-groupe normal engendré par les commutateurs* $[m, n]$ *lorsque* $(m, n) \in \frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q_j\mathbb{Z}}$ *avec* $m_{ij} = 2$.

*Alors le quotient* $X_0$ *de* $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ *par le noyau du morphisme naturel* $\Gamma_0 \to \Pi_{i\in I}\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ *est un immeuble local de type* $(W, I)$ *fini de paramètres* $(q_i)_{i\in I}$ *propre sans holonomie.*

*De plus le groupe fondamental* $\Gamma$ *d'un immeuble local* $X$ *de type* $(W, I)$ *fini de paramètres* $(q_i)_{i\in I}$ *est commensurable dans* $Aut(\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I}))$ *à* $\Gamma_0$ *si et seulement si* $X$ *admet un revêtement fini propre sans holonomie.*

Un graphe bipartite, birégulier de valence $q, q'$ est un immeuble local propre de type le système de Coxeter diè dral infini. Il est immédiat que l'holonomie est toujours triviale (Exemple 1.3). La proposition ci-dessus redonne donc le résultat de Angluin-Gardiner (pour $q = q'$) et Leighton sur les graphes (quitte à prendre un revêtement double, tout graphe est bipartite):

**Corollaire 1 ([AG], [L]).** *Deux graphes finis biréguliers de valence* $q, q'$ *ont un revêtement fini commun.*

Dans la littérature, le groupe $\Gamma_0$ est appelé le produit graphé des groupes $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ (au dessus du graphe sur $I$, avec une arête entre $i$ et $j$ si et seulement si $m_{ij} = 2$). Il agit simplement transitivement sur les chambres de $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$. En fait les produits graphés $\Gamma(W, I, (G_i)_{i\in I})$ au dessus du même graphe, de groupes $G_i$ de cardinal $q_i$ sont eux-aussi naturellement des groupes simplement transitifs sur l'ensemble des chambres de $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$. Ils sont cependant commensurables à $\Gamma_0$, car le noyau du morphisme naturel sur $\Pi_{i\in I}G_i$ donne lieu à un immeuble local de type $(W, I)$ isomorphe à $X_0$ (Remarque 1.5). Nous retrouvons le résultat de T. Januszkiewicz et S. Świątkowski:

**Corollaire 2 ([JS], Cor. 5.3).** *Soit* $(W, I)$ *un système de Coxeter à angle droit fixé et* $(q_i)_{i\in I}$ *une famille de paramètres. Alors tous les produits graphés* $\Gamma(W, I, (G_i)_{i\in I})$ *de groupes* $G_i$ *de cardinal* $q_i$ *sont commensurables.*

On peut dire que la classe de commensurabilité de $\Gamma_0$ est caractérisée par une grande abondance de sous-groupes d'indices finis. Plus précisément, considérons la propriété suivante d'un groupe $\Gamma$ de type fini (muni de l'une de ses métriques des mots) :

$(QCS)$ : tous les sous-groupes quasi-convexes de $\Gamma$ sont séparables
(i.e. sont l'intersection des sous-groupes d'indice fini qui les contiennent).

La propriété $(QCS)$ - introduite et étudiée par D. Wise, cf. [W] - est indépendante de la métrique des mots choisie lorsque $\Gamma$ est hyperbolique au sens de Gromov. Il est immédiat qu'elle passe aux sous-groupes d'indice fini, donc elle ne dépend que de la classe de commensurabilité (abstraite) de $\Gamma$. Nous avons alors (section 4) :

**Théorème 1.** *Soit $\Gamma$ un réseau uniforme de $Aut(\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I}))$, c'est à dire un sous-groupe discret cocompact d'automorphismes de $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$. On suppose $\Gamma$ (et donc l'immeuble) hyperbolique au sens de Gromov.*

*Si $\Gamma$ possède la propriété $(QCS)$ alors il contient un sous-groupe d'indice fini conjugué dans $\Gamma_0$.*

*Réciproquement, si $\Gamma$ est commensurable à $\Gamma_0$ alors $\Gamma$ possède la propriété $(QCS)$.*

La réciproque (i.e. le fait que $\Gamma_0$ possède $(QCS)$) est démontré ailleurs, cf. [H], où nous remarquons aussi que le commensurateur de $\Gamma_0$ dans le groupe de tous les automorphismes est dense.

Puisque $(QCS)$ ne dépend que de la classe de commensurabilité abstraite, il résulte de ce théorème qu'un réseau $\Gamma <\mathrm{Aut}(\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I}))$ est abstraitement commensurable à $\Gamma_0$ si et seulement si il lui est commensurable dans $\mathrm{Aut}(\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I}))$ (du moins si $(W, I)$ est hyperbolique).

Comme corollaire du théorème 1, on obtient en utilisant un résultat récent et profond de D. Wise :

**Théorème 2.** *Si $p \geq 6$, tous les réseaux uniformes de l'immeuble de Bourdon $I_{p,(q_i)}$ sont commensurables.*

Ce théorème répond à une question de M. Bourdon ([B$_2$]).

**Corollaire 3.** *Si $p \geq 6$, tous les réseaux uniformes de l'immeuble de Bourdon $I_{p,(q_i)}$ sont des groupes linéaires.*

En effet le groupe $\Gamma_0$ est toujours linéaire (cf. [HW]).

Pour conclure, soulignons que la commensurabilité de tous les réseaux uniformes est une propriété due à l'hyperbolicité de l'immeuble. Ainsi le produit de deux arbres réguliers de valences convenables (immeuble euclidien de type à angles droits) possède des réseaux $\Gamma$ irréductibles, c'est à dire précisément non commensurables à $\Gamma_0$ (cf. [BM]). Notre interprêtation est qu'un tel $\Gamma$ possède un certain sous-groupe (noyau d'une représentation d'holonomie) qui est quasi-convexe mais pas séparable.

**Remarque.** Un revêtement d'immeubles locaux correspond précisément à un revêtement au sens topologique, en passant à la réalisation géométrique de Davis (là-encore, c'est essentiellement contenu dans [R$_2$]). Ainsi tous nos énoncés exprimés dans le langage des systèmes de chambre se traduisent en énoncés équivalents concernant la réalisation géométrique usuellement considérée en théorie géométrique des groupes. Garder cette équivalence à l'esprit permet une intuition géométrique double : on s'exprime dans le langage rapide et général des systèmes de chambres, on garde à l'esprit le CW-complexe concret correspondant.

## 1. Immeubles locaux propres de type à angles droits : transport parallèle et holonomie.

Soit $(W, I)$ un système de Coxeter à angles droits et $X$ un immeuble local de type $(W, I)$. **On suppose $X$ propre.** Pour tout $i \in I$ on note $i^\perp$ l'ensemble des $j \in J$ tels que $m_{ij} = 2$. Pour toute chambre $c \in X$ on note $X_i(c), X_{ij}(c), X_{i^\perp}(c)$ les résidus de $c$ dans $X$ de type $\{i\}, \{i, j\}, i^\perp$. Le système de chambre $X_{i^\perp}(c)$ est *localement* le produit d'un système de chambre de type $\{i\}$ (à $q_i$ chambres) avec un système de chambre de type $i^\perp \setminus \{i\}$.

Soit $R$ un $i^\perp$-résidu de $X$, $E = E(R)$ l'ensemble des couples de chambres adjacentes de $R$, $a = (c, c') \in E$. On définit une bijection $t(a)$ entre les $i$-résidus de $c$ et $c'$ de la façon suivante. Si $X_i(c) = X_i(c')$ on pose $t(a) = \mathrm{id}$ . Sinon, par propreté de $X$, on a $c'$ qui est $j$-adjacente à $c$ pour un unique $j \in i^\perp \setminus \{i\}$. Donc $X_i(c)$ et $X_i(c')$ sont contenus dans l'immeuble sphérique $X_{ij}(c) = X_{ij}(c')$. Or les immeubles sphériques de type à angles droits admettent une “paramétrisation naturelle” :

**1.1 Lemme.** (identification naturelle entre cloisons de type $i$)

*Soit $S$ un immeuble de type $(V, J)$ et $i \in J$ tel que pour tout $j \in J \setminus \{i\}$ on a $m_{ij} = 2$ (par exemple, $(V, J)$ sphérique à angles droits). Considérons l'ensemble $\mathcal{R}_i$ des $J \setminus \{i\}$-résidus de $S$. Alors pour tout $i$-résidu $\sigma$ de $S$, l'application $t_\sigma$ de $\sigma$ dans $\mathcal{R}_i$ envoyant $c \in \sigma$ sur le $J \setminus \{i\}$-résidu de $c$ est une bijection. En particulier étant donnés deux résidus $\sigma$ et $\sigma'$ de type $i$, nous appelerons* identification naturelle de $\sigma$ avec $\sigma'$ *la bijection $t = t_{\sigma'}^{-1} \circ t_\sigma$ :*

$$t(c) = c' \iff c \text{ et } c' \text{ sont dans le même } J \setminus \{i\}\text{-résidu.}$$

**Démonstration**

Injectivité de $t_\sigma$.

Elle vient de la formule : $t_\sigma(c) \cap \sigma = \{c\}$.

Surjectivité de $t_\sigma$.

Soit $R$ un $J \setminus \{i\}$-résidu, $c'$ une chambre de $R$ et $c_0$ une chambre dans $\sigma$.

Vu l'hypothèse $m_{ij} = 2$ pour $j \neq i$, la $V$-distance $\delta(c_0, c')$ est un élément du produit $< 1, s_i > \times W_{J \setminus \{i\}}$.

Si $\delta(c_0, c')$ est dans $W_{J \setminus \{i\}}$ alors $c_0 \in R$, donc $t_\sigma(c_0) = R$.

Sinon il y a une écriture géodésique de $\delta(c_0, c')$ de la forme $s_i.s_{j_1} \ldots s_{j_k}$ avec $j_1, \cdots, j_k \in J \setminus \{i\}$ (pour $j \in J$, nous notons $s_j$ le générateur de $V$ correspondant à $j$). Soit $c$ la deuxième chambre de la galerie géodésique de $S$ joignant $c_0$ à $c'$ de type $(s_i, s_{j_1}, \ldots, s_{j_k})$. Alors $c \in \sigma$ et $c \in R$, soit $t_\sigma(c) = R$.

□

Ceci nous permet de définir la bijection $t(a)$ comme l'identification naturelle de $X_i(c)$ avec $X_i(c')$ dans $X_{ij}(c)$.

Si $\gamma = (c_0, c_1, \cdots, c_n)$ est une galerie de $R$, nous pouvons poser $a_{i+1} = (c_i, c_{i+1})$ puis $t(\gamma) = t(a_n) \circ \cdots \circ t(a_1)$ : c'est une bijection de $X_i(c_0)$ sur $X_i(c_n)$ (par convention l'identité si $n = 0$).

**1.2 Lemme.** (propriétés du transport parallèle)

*Si $\omega(\gamma_1) = \alpha(\gamma_2)$ alors $t(\gamma_1\gamma_2) = t(\gamma_2) \circ t(\gamma_1)$. Si $\gamma$ est un aller-retour alors $t(\gamma) = id$ . Si $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont 2-homotopes dans $R$ à extrémités fixées, alors $t(\gamma_1) = t(\gamma_2)$.*

**Démonstration**

Laissant la preuve des deux premières propriétés au lecteur nous vérifions la troisième.

Il suffit de considérer le cas d'une homotopie élémentaire : $\gamma_2$ s'obtient à partir de $\gamma_1$ en remplaçant une sous-galerie $\delta = (c_m, \cdots, c_n)$ de $\gamma_1$ contenue dans un résidu sphérique $X_{jk}(c_m)$ (de rang 2) par une galerie de mêmes extrémités de ce même résidu. Compte tenu de la trivialité du transport sur les aller-retours, on voit qu'on est ramené à montrer que $t(\gamma) =$

id lorsque $\gamma$ est un lacet d'un résidu sphérique de rang 2, de type $\{j,k\}$ contenu dans $i^{\perp}$. Or un tel résidu est contenu dans un unique résidu $S$ de $X$ de type $\{i,j,k\}$, lequel est sphérique à angle droit puisque $\{j,k\} \subset i^{\perp}$. Et pour toute galerie $\gamma$ de $S$ joignant $c$ à $c'$, la bijection $t(\gamma)$ est l'identification naturelle dans $S$ entre les $i$-résidus de $c$ et de $c'$ (voir le lemme 1.1 ci-dessus). Donc si $c' = c$, c'est l'identité.

□

Ce qui précède montre que toute chambre $c$ de $X$ de $i^{\perp}$-résidu $R$, l'application de transport le long des lacets $t$ définit une représentation de $\pi_1(R,c)$ dans le groupe des permutations de $X_i(c)$, *la $i$-holonomie de $X$ en $c$*. Un immeuble local est dit *sans holonomie* si pour tout $i$ et toute chambre $c$ la $i$-holonomie de $X$ en $c$ est triviale.

**1.3 Exemple.** Un graphe bipartite $X$ (sans boucle) est un immeuble local de type dièdral infini, qui est propre si et seulement si $X$ est sans arête double. Dans ce cas les $i^{\perp}$-résidus de $X$ sont des cloisons et sont simplement connexes. L'holonomie de $X$ est donc triviale.

Dans la fin de cette section nous décrivons le transport parallèle sur $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ et nous en déduisons un exemple d'immeuble local fini sans holonomie de type quelconque.

Rappelons une définition du système de chambre $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ utilisant $\Gamma_0$. L'ensemble des chambres de $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ est $\Gamma_0$. Deux chambres $g$ et $g'$ sont $i$-adjacentes si $g^{-1}g' \in \frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$. Notons $c_0$ la chambre fondamentale (correspondant à $1 \in \Gamma_0$). Alors le $J$-résidu de $c_0$ s'identifie naturellement à $\Delta(W_J, J, (q_i)_{i\in J})$, et le stabilisateur de ce résidu dans $\Gamma_0$ est le produit graphé $\Gamma(W_J, J, (q_i)_{i\in J})$. Lorsque $J = i^{\perp}$, nous voyons que le $i^{\perp}$-résidu $R_{i^{\perp}}(c_0)$ est isomorphe au produit $R_i(c_0) \times R_{i^{\perp}\setminus\{i\}}(c_0)$. Il est alors facile de vérifier que le transport parallèle le long d'une galerie de $R_{i^{\perp}}(c_0)$ d'origine $c_0$, lu dans le produit, est *trivial sur la première composante* (en fait, pour toute galerie $\gamma$ de $c$ à $c'$, l'isomorphisme $t(\gamma)$ est l'identification naturelle de $R_i(c)$ sur $R_i(c')$, cf. lemme 1.1).

Montrons maintenant comment quotienter $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ pour obtenir un immeuble local de type $(W, I)$ et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$.

**1.4 Lemme.**

*Soit $\Gamma < \Gamma_0$ un sous-groupe sans torsion et $X$ le système de chambre sur $I$ quotient de $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ par $\Gamma$. Alors $X$ est un immeuble local de type $(W, I)$ et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$, fini si $\Gamma$ est d'indice fini. Si comme sous-groupe on prend le noyau $\Gamma_1$ du morphisme naturel de $\Gamma_0$ sur $\Pi_{i\in I}\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ l'immeuble local obtenu est fini, propre et sans holonomie.*

**Démonstration**

L'application $p : \Delta(W, I, (q_i)_{i\in I}) \to X$ de passage au quotient est un isomorphisme sur chaque résidu sphérique $R$. Car si $g \in \Gamma$ identifie deux chambres de $R$, il préserve $R$, donc est de torsion, i.e. est trivial. Ainsi $X$ est un immeuble local de type $(W, I)$ et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$. Le nombre de chambres de $X$ est l'indice de $\Gamma$ dans $\Gamma_0$.

Etudions le cas où $X = \Gamma_1 \backslash \Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$. D'abord $\Gamma_1$ est sans torsion : en effet tout élément de torsion de $\Gamma_0$ est conjugué à un élément d'un sous-groupe $\Gamma(W_J, J, (q_i)_{i\in J})$ pour $J \subset I$ sphérique, et sur ce sous-groupe parabolique le morphisme naturel $\Gamma_0$ sur $\Pi_{i\in I}\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ est l'identité. Ensuite $X$ est fini : il contient $\Pi_{i\in I} q_i$ chambres. Notons que $\mathrm{Aut}(X)$ est transitif sur les chambres, puisque $\Gamma_0$ est transitif sur les chambres de $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ et $\Gamma_1$ est distingué. Nous noterons $\bar{c}_0$ l'image de $c_0$ dans $X$.

Pour montrer que $X$ est propre, il suffit par transitivité de montrer que si $\bar{c} \neq \bar{c}_0$ est $i$- et $i'$-adjacente à $\bar{c}_0$ dans $X$, alors $i = i'$. Soit $c$ (resp. $c'$) l'unique chambre de $R_i(c_0)$ (resp. $R_{i'}(c_0)$) telle que $p(c) = \bar{c}$ (resp. $p(c') = \bar{c}$). Il existe $m \in \frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ (resp. $m' \in \frac{\mathbb{Z}}{q_{i'}\mathbb{Z}}$) uniques tel que $c = mc_0$ et $c' = m'c_0$. Notons que $m$ et $m'$ sont non triviaux, puisque $\bar{c} \neq \bar{c}_0$. Alors $m^{-1}m' \in \Gamma_1$, et par définition de $\Gamma_1$ cela signifie que nécessairement $i = i'$ et $m = m'$.

Pour montrer que $X$ est sans holonomie, il suffit toujours par transitivité de montrer que la $i$-holonomie en $\bar{c}_0$ est triviale (pour tout $i \in I$). Soit donc $\bar{\gamma}$ une galerie fermée de $X_{i^\perp}(\bar{c}_0)$ d'origine $\bar{c}_0$. Notons $\gamma$ le relevé de $\bar{\gamma}$ à $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ d'origine $c_0$. Puisque $\bar{\gamma}$ est fermée, il existe $g \in \Gamma_1$ tel que l'extrémité de $\gamma$ soit $g(c_0)$. La $i$-holonomie de $\bar{\gamma}$ en $\bar{c}_0$ est donc (la conjuguée par $p_{|R_i(c_0)}$ de) la composée du transport parallèle dans $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ le long de $\gamma$ avec $g^{-1}$. Or, lus dans le (deuxième facteur du) produit $R_i(c_0) \times R_{i^\perp\setminus\{i\}}(c_0)$, non seulement le transport parallèle est trivial, mais aussi $g$. En effet $g$ préserve $R_{i^\perp}(c_0)$, donc est dans $\Gamma(W_{i^\perp}, i^\perp, (q_i)_{i\in i^\perp}) = \frac{\mathbb{Z}}{qi\mathbb{Z}} \times \Gamma(W_{i^\perp\setminus\{i\}}, i^\perp \setminus \{i\}, (q_i)_{i\in i^\perp\setminus\{i\}})$. Et la composante de $g$ suivant $\frac{\mathbb{Z}}{qi\mathbb{Z}}$ donne l'action de $g$ sur le premier facteur $R_i(c_0)$, mais c'est aussi la composante de l'image de $g$ suivant $\frac{\mathbb{Z}}{qi\mathbb{Z}}$ dans le produit $\Pi_{i\in I}\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$, triviale puisque $g \in \Gamma_1 = \mathrm{Ker}\Gamma_0 \to \Pi_{i\in I}\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$.

$\square$

**1.5 Remarque.** Considèrons une famille de groupes $(G_i)_{i\in I}$, avec $G_i$ de cardinal $q_i$, et soit $\Gamma(W, I, (G_i)_{i\in I})$ leur produit graphé au dessus du graphe sur $I$ avec une arête entre $i$ et $j$ $\iff m_{ij} = 2$. Alors on obtient pour tous ces groupes les mêmes résultats que pour $\Gamma_0$, par les mêmes méthodes. En particulier le quotient $X_0$ de l'immeuble $\Delta(W, I, (G_i)_{i\in I})$ par le noyau $\Gamma_1(W, I, (G_i)_{i\in I})$ du morphisme naturel de $\Gamma(W, I, (G_i)_{i\in I})$ sur $\Pi_{i\in I}G_i$ est un immeuble local de type $(W, I)$, de paramètres $(q_i)_{i\in I}$, fini, propre et sans holonomie.

En fait, il est facile de voir que l'immeuble local quotient $X_0$ est isomorphe comme système de chambres sur $I$ à l'immeuble $\Delta(\overline{W}, I, (G_i)_{i\in I})$, avec $(\overline{W}, I)$ le système de Coxeter quotient de $(W, I)$ obtenu en remplaçant tous les $\infty$ de la matrice de Coxeter par des 2. Donc en fait $X_0$ ne dépend, à isomorphisme près, que du système de paramètres $(q_i)_{i\in I}$, et non des groupes $(G_i)_{i\in I}$.

Dans les sections 2 et 3 qui suivent on fixe un groupe de Coxeter à angles droits $(W, I)$, ainsi qu'une famille de paramètres $(q_i)_{i\in I}$. On va montrer la commensurabilité des immeubles locaux de type $(W, I)$ finis, propres, de paramètres $(q_i)_{i\in I}$, sans holonomie.

## 2. Immeubles locaux sans holonomie et atlas commutatifs.

Soit $X$ un immeuble local de type $(W, I)$ et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$. Un *atlas commutatif sur $X$* est la donnée pour tout $i \in I$ et toute chambre $c$ de $X$ d'une action simplement transitive de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ sur $X_i(c)$, de sorte que, lorsque $m_{ij} = 2$, on a $m(nc) = n(mc)$ pour tout $(m, n) \in \frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q_j\mathbb{Z}}$. On obtient donc une action de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q_j\mathbb{Z}}$ sur chaque $\{i, j\}$-résidu de $X$, intégrant les actions sur les cloisons concernées. Bien sûr $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q_j\mathbb{Z}}$ agit transitivement, donc simplement transitivement sur chaque $\{i, j\}$-résidu.

**2.1 Exemple.** Considérons un immeuble local quotient $X = \Gamma\backslash\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ comme dans le lemme 1.4. Définissons sur $X$ un atlas commutatif.
Rappelons que le stabilisateur dans $\Gamma_0$ de chacune des $i$-cloisons de $c_0$ (pour $i \in I$) est $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$, qui agit simplement transitivement sur la cloison. Toute autre $i$-cloison de $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ est l'image par un $g \in \Gamma_0$ de la $i$-cloison de $c_0$, et $g$ est bien déterminé modulo un élméent de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$. Donc la conjugaison par $g$ définit bien une identification du stabilisateur de la $i$-cloison avec $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$. Ceci donne un atlas $\mathcal{A}_0$ sur $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$. Vu les relations définissant $\Gamma_0$, cet atlas est commutatif. Enfin il commute au sous-groupe $\Gamma$, donc passe au quotient $X$.

**2.2 Lemme.** *Si $X$ est sans holonomie il possède un atlas commutatif.*

**Démonstration**

Fixons $i \in I$ et définissons l'action de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ sur les cloisons de type $i$ de $X$. Pour cela, considérons la partition de $X$ en $i^\perp$-résidus : $X = R^1 \cup \cdots \cup R^{n_i}$ et choisissons une chambre $c^1, \cdots, c^{n_i}$ dans chaque résidu $R^k$. Puisque $X$ est de paramètres $(q_i)_{i\in I}$, il existe une action simplement transitive de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ sur chaque cloison $R_i(c^k)$. A partir de maintenant nous fixons une telle action.

Maintenant nous conjuguons par le transport parallèle pour définir les actions de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ sur les autres cloisons.

Plus précisément, soit $c$ une chambre de $X$. Alors $c$ est dans un unique $R^k$. Choisissons une galerie $\gamma$ de $R^k$ joignant $c^k$ à $c$. L'isomorphisme $t(\gamma)$ de $X_i(c^k)$ sur $X_i(c)$ est en fait indépendant du choix de $\gamma$, parce que $X$ est sans holonomie. Nous définissons alors l'action de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ sur $X_i(c)$ comme la conjuguée de celle sur $X_i(c_k)$ par $t(\gamma)$.

En procédant comme ci-dessus pour tous les $i \in I$, nous obtenons pour tout $j \in I$ et toute chambre $c$ de $X$ une action de $\frac{\mathbb{Z}}{q_j\mathbb{Z}}$ sur $X_j(c)$. De plus, par construction, ces actions sont invariantes par le transport parallèle. Ceci assure que nous avons bien construit un atlas commutatif.

En effet, soit $c$ une chambre de $X$, $(i,j) \in I^2$ tel que $m_{ij} = 2$ et $(m,n) \in \frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q_j\mathbb{Z}}$. Montrons que $m(nc) = n(mc)$.

Nous pouvons supposer que $m$ et $n$ sont non triviaux. Alors $mc$ et $nc$ sont deux chambres distinctes de $c$, respectivement $i$- et $j$-adjacentes à $c$. Donc il existe une unique quatrième chambre $c'$ dans $R_{ij}(c) \setminus \{c\}$ simultanément $j$- et $i$-adjacentes à $mc$ et $nc$. Posons $a = (c, nc)$ $b = (c, mc)$. Par définition, nous avons :

$$t(a)c = nc,\ t(a)mc = c',\ t(b)c = mc,\ t(b)nc = c' \ .$$

Puisque les actions commutent aux transports nous en déduisons que

$$m(nc) = c' = n(mc) \ .$$

$\square$

## 3. Application développante et commensurablilité.

Soient $X, Y$ deux immeubles locaux de type $(W, I)$ finis propres de paramètres $(q_i)_{i\in I}$. On suppose $X$ et $Y$ muni d'un atlas commutatif. On fixe deux chambres de base $c_0$ et $d_0$ dans $X$ et $Y$.

On introduit un alphabet, l'ensemble $\mathcal{A}$ quotient de l'union disjointe des $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ par l'identification des éléments neutres; on note encore 0 la classe des éléments neutres. Alors à toute galerie $\gamma = (c_0, c_1, \cdots, c_n)$ de $X$ ou $Y$ correspond un unique mot $m(\gamma)$ sur $\mathcal{A}$, de longueur $n$, dont la $(k+1)$-ième lettre est 0 si $c_{k+1} = c_k$ et est l'élément $g$ de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ si $c_{k+1} \neq c_k$, $c_{k+1}$ et $c_k$ sont $i$-adjacentes et $gc_k = c_{k+1}$ (par propreté il existe un unique tel $i$, par simple transitivité un unique tel $g$). Par convention $m((c_0))$ est la suite vide.

Nous allons considérer une action naturelle du pseudo-groupe $\mathrm{Gal}(X)$ sur $Y$, provenant d'une application naturelle de développement $Y \times \mathrm{Gal}(X) \to \mathrm{Gal}(Y)$ (où Gal désigne l'ensemble des galeries).

**3.1 Lemme.** (application développante)

*Il existe une unique application $\delta : Y \times Gal(X) \to Gal(Y)$ possédant les propriétés suivantes :*

*i) $\delta(d, \gamma)$ est d'origine $d$ ;*

*ii) $m(\delta(d, \gamma)) = m(\gamma)$.*

*De plus $\delta(d, \gamma_1\gamma_2) = \delta(d, \gamma_1)\delta(d', \gamma_2)$, avec $d'$ l'extrémité de $\delta(d, \gamma_1)$.*

**Démonstration**

Pour tout entier $n \geq 0$ fixé, notons $\mathrm{Gal}_n(X)$ l'ensemble des galeries de $X$ de longueur $\leq n$.

Pour un certain entier $n \geq 0$, supposons donnée une fonction $\delta_n : Y \times \mathrm{Gal}_n(X) \to \mathrm{Gal}(Y)$ satifaisant i) et ii). Montrons que $\delta_n$ admet un unique prolongement $\delta_{n+1} : Y \times \mathrm{Gal}_{n+1}(X) \to \mathrm{Gal}(Y)$ satifaisant i) et ii).

Soit $(c_0, c_1, \cdots, c_n, c_{n+1})$ une galerie de $X$ de longueur $n+1$ et $d$ une chambre de $Y$. Soit $(d_0, d_1, \cdots, d_n)$ l'image de $(d, (c_0, c_1, \cdots, c_n))$ par $\delta_n$. Soit $g$ la dernière lettre du mot $m(\gamma)$. Alors il existe une unique chambre $d_{n+1}$ de $Y$ telle que le mot associé à la galerie $(d_n, d_{n+1})$ soit $g$.

En effet, ou bien $c_{n+1} = c_n$ et dans ce cas $g = 0$ : alors $d_{n+1} = d_n$. Ou bien $c_{n+1} \neq c_n$ et alors $c_{n+1}$ est $i$-adjacente à $c_n$ pour un unique $i$, on a $g \in \frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ et $c_{n+1} = gc_n$. Alors $d_{n+1}$ est la chambre du $i$-résidu de $d_n$ définie par la relation $d_{n+1} = gd_n$.

On posera donc $\delta_{n+1}((d, (c_0, c_1, \cdots, c_n, c_{n+1}))) = (d_0, d_1, \cdots, d_n, d_{n+1})$, c'est visiblement le seul prolongement qui convienne.

Puisque $\delta_0 : Y \times X \to Y$ définie comme la première projection est la seule fonction vérifiant i) et ii), nous obtenons par récurrence l'existence et l'unicité.

Montrons la seconde partie du lemme. On fixe $\gamma_1$ et on établit la relation pour tout $\gamma_2$ composable avec $\gamma_1$. Pour cela remarquons que les mots associés à $\delta(d, \gamma_1\gamma_2)$ et $\delta(d, \gamma_1)\delta(d', \gamma_2, )$ sont identiques : il s'agit du produit $m(\gamma_1)m(\gamma_2)$. Considérons la fonction $\delta' : Y \times \mathrm{Gal}(X) \to \mathrm{Gal}(Y)$ coïncidant avec $\delta$ sur les couples $(d'', \gamma)$ avec $d'' \neq d$ ou $d'' = d$ mais $\gamma$ n'est pas de la forme $\gamma_1\gamma_2$, et définie par $\delta'(d, (\gamma_1\gamma_2)) = \delta(d, \gamma_1)\delta(d', \gamma_2)$ (la composition est bien définie d'après les propriétés de $\delta$). Cette fonction vérifie les propiétés i) et ii) donc par unicité $\delta' = \delta$, ce qui conclut.

□

Nous définissons l'action (à droite) de $\mathrm{Gal}(X)$ sur $Y$ par $d\gamma = d'$, où $d'$ est l'extrémité de la galerie $\delta(d, \gamma)$.

**3.2 Lemme.** (intégrabilité locale de l'application développante)

*Soit $c \in X$, $d \in Y$ et $(i, j) \in I^2$ tels que $m_{ij} = 2$. Soit $\varphi$ l'unique isomorphisme de $X_{ij}(c)$ sur $Y_{ij}(d)$ envoyant $c$ sur $d$ et conjuguant les actions de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q_j\mathbb{Z}}$. Alors pour toute galerie $\gamma$ de $X_{ij}(c)$ d'origine $c$, on a $\delta(d, \gamma) = \varphi(\gamma)$.*

**Démonstration**

Pour $c' \in X_{ij}(c)$ et $d' \in Y_{ij}(d)$, soit $\varphi_{c',d'}$ l'unique isomorphisme de $X_{ij}(c)$ sur $Y_{ij}(d)$ envoyant $c'$ sur $d'$ et conjuguant les actions de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q_j\mathbb{Z}}$. Définissons sur $\mathrm{Gal}(X_{ij}(c)) \times Y_{ij}(d)$ une fonction $\delta'$ par $\delta'(d', \gamma') = \varphi_{c',d'}(\gamma')$ (avec $c'$ l'origine de $\gamma'$). Vu l'équivariance des $\varphi_{c',d'}$, iI est clair que $\delta'$ vérifie les conditions i) et ii) définissant l'application développante de $X_{ij}(c)$ dans $Y_{ij}(d)$ (cf. lemme 3.1), donc elle lui est égale. Mais il en va de même pour la restriction à $\mathrm{Gal}(X_{ij}(c)) \times Y_{ij}(d)$ de l'application développante de $X$ dans $Y$.

□

**3.3 Corollaire.** *Si $\gamma$ est une galerie fermée homotope à 0 dans $X$ , alors $\delta(d, \gamma)$ est une galerie fermée de $Y$ (d'ailleurs homotope à 0).*

**Démonstration**

Il suffit de montrer que si $\gamma$ et $\gamma'$ sont deux galeries de $X$ homotopes, alors $\delta(d, \gamma)$ et $\delta(d, \gamma')$ sont deux galeries homotopes de $Y$. Pour cela il suffit de montrer que $\delta$ envoie homotopie élémentaire sur homotopie élémentaire. Autrement dit il suffit de montrer que si $\gamma$ et $\gamma'$ sont deux galeries d'un résidu sphérique de rang 2 de $X$ de mêmes extrémités, alors $\delta(d, \gamma)$ et $\delta(d, \gamma')$ ont aussi mêmes extrémités : c'est une conséquence du lemme 3.2.

□

Soit maintenant $\Lambda(X, c_0)$ le sous-pseudo-groupe de $\mathrm{Gal}(X)$ formé des galeries d'origine et d'extrémité égales à $c_0$. Pour $\gamma,' \gamma$ dans $\Lambda(X, c_0)$ nous avons d'après le lemme 3.1 :

$$d(\gamma\gamma') = (d\gamma)\gamma' \ .$$

D'où une action à droite de $\Lambda(X, c_0)$ sur $Y$. Le corollaire 3.3 prouve que l'action de $\Lambda(X, c_0)$ sur $Y$ induit une action du groupe fondamental de $(X, c_0)$ sur $Y$. Puisque $Y$ est supposé fini, le noyau $N$ du morphisme $\pi_1(X, c_0) \to \mathfrak{S}(Y)$ est d'indice fini. Soit $p : \bar{X} \to X$ le revêtement d'immeuble locaux finis associé à $N$. Munissons $\bar{X}$ de l'atlas $\bar{\mathcal{A}}$ tiré en arrière de $\mathcal{A}$ par $p$ et fixons une chambre de base $\bar{c}_0$ telle que $p(\bar{c}_0) = c_0$. Nous obtenons alors une application de développement $\bar{\delta} : Y \times \mathrm{Gal}(X) \to \mathrm{Gal}(Y)$, puis une action de $\pi_1(\bar{X}, \bar{c}_0)$ sur $Y$. Par définition de $N$ et naturalité des applications de développement nous avons :

**3.4 Lemme.** *L'action de $\pi_1(\bar{X}, \bar{c}_0)$ sur $Y$ est triviale.*

□

Utilisons maintenant la chambre de base $d_0$ dans $Y$. Soit $\mathrm{Gal}(\bar{X}, \bar{c}_0)$ l'ensemble des galeries de $\bar{X}$ d'origine $\bar{c}_0$. Pour $\gamma_1, \gamma_2$ dans $\mathrm{Gal}(\bar{X}, \bar{c}_0)$ de même extrémité $c$, nous avons $d_0\gamma_1 = d_0\gamma_2$. En effet $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ est un lacet d'origine $\bar{c}_0$, donc $d_0\gamma_1\gamma_2^{-1} = d_0$. On conclut en appliquant $\gamma_2$ et en utilisant le fait que les allers-retours agissent trivialement. Nous définissons alors $f(c)$ comme la valeur commune des $d_0\gamma$ pour $\gamma$ une quelconque galerie de $\bar{X}$ joignant $\bar{c}_0$ à $c$.

**3.5 Lemme.** *L'application $f : \bar{X} \to Y$ commute aux actions des $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$ données par les atlas commutatifs sur $\bar{X}, Y$. C'est un revêtement d'immeubles locaux.*

**Démonstration**

Par définition de $f$ et d'après le lemme 3.2, pour toute chambre $c \in \bar{X}$ et tout $(i, j) \in I^2$ tels que $m_{ij} = 2$, nous avons $f_{|\bar{X}_{ij}(c)} = \varphi_{c,f(c)}$, l'unique isomorphisme de $\bar{X}_{ij}(c)$ sur $Y_{ij}(f(c))$ envoyant $c$ sur $f(c)$ et commutant aux actions de $\frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q_j\mathbb{Z}}$. Donc $f$ est un morphisme de systèmes de chambres et un isomorphisme sur tout résidu sphérique de rang $\leq 2$.

□

Les lemmes 2.2, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5 démontrent le résultat suivant :

**3.6 Proposition.** *Soit $X$ et $Y$ deux immeubles locaux de type $(W, I)$ propres, finis, de paramètres $(q_i)_{i\in I}$, sans holonomie. Alors $X$ et $Y$ ont un revêtement fini commun.*

**Démonstration de la proposition de l'introduction.**

Supposons $\Gamma$ commensurable à $\Gamma_0$. Alors un revêtement fini $X'$ de $X$ revêt le quotient $Y = \Gamma_1 \backslash \Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$, qui est fini propre sans holonomie d'après 1.4. Donc $X'$ lui-même est propre sans holonomie.

Réciproquement si $X$ admet un revêtement fini $X'$ propre sans holonomie, alors d'après la proposition 3.6 $X'$ admet un revêtement fini $X''$ revêtant $\Gamma_1 \backslash \Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$. Donc $\Gamma$ est commensurable à $\Gamma_1$, et aussi à $\Gamma_0$.

□

## 4. Suppression virtuelle de l'holonomie grâce à la propriété $(QCS)$.

Dans cette section nous montrons la partie directe du théorème 1 de l'introduction :

*Soit $(W, I)$ un système de Coxeter à angle droits hyperbolique au sens de Gromov, et $(q_i)_{i\in I}$ un système de paramè-tres.*

*Soit $\Gamma$ un groupe d'automorphismes de l'immeuble $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$, qui agit avec stabilisateurs de chambres finis, tel que $\Gamma \backslash \Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$ a un nombre fini de chambres.*

*Si $\Gamma$ a la propriété $(QCS)$, alors $\Gamma$ contient un sous-groupe d'indice fini conjugué dans $\Gamma_0$.*

(la réciproque est montrée dans [H]).

**4.1 Lemme.** *Soit $(W, I)$ un système de Coxeter et $\Delta$ un immeuble de type $(W, I)$ dont tous les résidus sphériques sont finis. Si un réseau uniforme $\Gamma$ de $Aut(\Delta)$ est résiduellement fini, alors il possède un sous-groupe d'indice fini $\Gamma'$ sans torsion tel que l'immeuble local $\Gamma' \backslash \Delta$ est propre.*

**Démonstration**

Le diamètre des résidus sphériques de $\Delta$ est uniformément borné par un entier $M$, puisque $\Delta$ admet un réseau uniforme (par exemple $M = 2$ si $(W, I)$ est à angles droits avec des résidus sphériques de rang $\geq 2$). Quitte à remplacer $M$ par $\max(M, 2)$ nous pouvons supposer $M \geq 2$.

Pour tout $\gamma \in$Aut$(\Delta)$ soit $d(\gamma)$ le minimum des distances d'une chambre $c \in \Delta$ à son image $\gamma c$ ; $d$ est constante sur chaque classe de conjugaison.

Si $d(\gamma) > M$ alors $\gamma$ ne préserve aucun résidu sphérique, donc n'est pas de torsion.

Puisque $\Gamma$ a un nombre fini d'orbite dans $\Delta$, soit $c_1, \cdots, c_n$ des chambres telles que $\Gamma c_1 \cup \cdots \cup \Gamma c_n = \Delta$. Pour tout $R \in \mathbb{N}$ soit $B_R$ l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels qu'il existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ avec $d(c_k, \gamma c_k) \leq R$.

Comme $\Delta$ est localement fini et que $\Gamma$ agit avec stabilisateurs finis, $B_R$ est fini.

Par résiduelle finitude de $\Gamma$, il existe un sous-groupe $\Gamma_R$ d'indice fini distingué tel que $\Gamma_R \cap B_R = \{1\}$.

Alors pour $\gamma \in \Gamma_M \setminus \{1\}$ on a $d(\gamma) > M$ (si $d(c, \gamma c) = d(\gamma) \leq M$, il existe $g \in \Gamma$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $gc_k = c$, alors $g^{-1}\gamma g \in B_M \cap \Gamma_M$).

Donc d'abord $\Gamma_M$ est sans torsion. D'après 1.4 (ou plutôt sa généralisation immédiate à $\Delta$), le système de chambre $X = \Gamma_M \backslash \Delta$ est un immeuble local de type $(W, I)$ : vérifions qu'il est propre.

Soit $c, c'$ deux chambres distinctes de $X$ qui sont $i$- et $j$-adjacentes. Soit $\bar{c}$ une chambre relevée de $c$ à $\Delta$ et $c'_i, c'_j$ les relevés de $c'$ respectivement $i$- et $j$-adjacentes à $\bar{c}$. Alors $d(c'_i, c'_j) = 2 < M$ et $c'_j \in \Gamma_M c'_i$ : donc $c'_j = c'_i$ et $i = j$.

□

Le sous-groupe trivial est toujours quasi-convexe : donc $(QCS)$ entraîne la résiduelle finitude. Compte tenu du lemme 4.1, nous pouvons donc supposer, pour établir le théorème 1, que $\Gamma$ est sans torsion et que $X = \Gamma \backslash \Delta(W, I, (q_i)_{i \in I})$ est propre. D'après la proposition de l'introduction, il suffit alors de montrer que $X$ admet un revêtement fini (automatiquement propre) sans holonomie. Pour ce faire nous introduisons une complexité mesurant l'éloignement de $X$ à être sans holonomie, et nous montrons comment la faire diminuer par certains revêtement finis.

Fixons $i \in I$. Soit $Y, Z$ deux immeubles locaux finis propres de paramètres $(q_i)_{i \in I}$ et $f : Y \to Z$ un revêtement. Alors $f$ envoie un $i^\perp$-résidu $R$ de $Y$ sur un $i^\perp$-résidu $R'$ de $Z$ (car $f$ est un isomorphisme sur les résidus sphériques de rang 1). Et $f|_R : R \to R'$ est clairement un revêtement. De plus $f$ commute aux transports : $t(f(\gamma)) \circ f = f \circ t(\gamma)$ sur le $i$-résidu dans $Y$ de l'origine de $\gamma$ (galerie de $R$). Donc $f$ conjugue la représentation d'holonomie sur $R$ dans celle sur $R'$ : et si $f$ est un isomorphisme il conjugue les deux représentations d'holonomie. Faisons alors agir Aut$(Y)$ sur l'ensemble (fini) des $i^\perp$-résidus de $Y$ d'holonomie non triviale, et notons $h_i(Y)$ le nombre d'orbites. Par exemple $Y$ est sans $i$-holonomie $\iff$ $h_i(Y) = 0$.

**4.2 Lemme.** (décroissance de $h_i$ par revêtement caractéristique)

*Supposons que $f : Y \to Z$ soit un revêtement caractéristique d'immeubles locaux finis propres de paramètres $(q_i)_{i \in I}$. Alors $h_i(Y) \leq h_i(Z)$.*

**Démonstration**

Puisque le revêtement est caractéristique, tout autormophisme de $Z$ se relève en un automorphisme de $Y$ et $\mathrm{Aut}(Y, f)$ agit transitivement sur les fibres.

Au dessus des composantes de $\mathcal{G}_i(Z)$ d'holonomie triviale on ne trouve que des composantes de $\mathcal{G}_i(Y)$ d'holonomie triviale.

La préimage d'un $i^\perp$-résidu de $Z$ par $f$ est une union disjointe de $i^\perp$-résidus de $Y$, tous équivalents modulo $\mathrm{Aut}(Y, f)$.

Et deux $i^\perp$-résidus de $Y$ situés au-dessus de $i^\perp$-résidus de $Z$ dans la même orbite modulo $\mathrm{Aut}(Z)$ sont eux-mêmes dans la même orbite modulo $\mathrm{Aut}(Y)$ par caractéricité. Finalement on a bien $h_i(Y) \leq h_i(Z)$.

□

**4.3 Lemme.** *Supposons que $f : Y \to Z$ soit un revêtement fini d'immeubles locaux finis propres de paramètres $(q_i)_{i\in I}$. Supposons que $Y$ contienne un $i^\perp$-résidu d'holonomie triviale au dessus d'un $i^\perp$-résidu de $Z$ d'holonomie non triviale. Alors il existe un revêtement $f' : Y' \to Z$ (factorisant par $f$) tel que $h_i(Y') < h_i(Z)$.*

**Démonstration**

Pointons $Y$ et $Z$ en deux de leurs chambres $c$ et $d$. Soit $\Gamma'$ un sous-groupe d'indice fini caractéristique de $\pi_1(Z, d)$ contenu dans $f_*(\pi_1(Y, c))$ (possible puisque $\pi_1(Z, d)$ est de type fini et contient $f_*(\pi_1(Y, c))$ comme sous-groupe d'indice fini). Considérons le revêtement $f' : Y' \to Z$ associés ; il factorise par $f : Y \to Z$.

Nous pouvons utiliser la méthode de comptage du lemme précédent : nous avons $h_i(Y') \leq h_i(Z)$.

Mais en fait si nous considréons l'un des $i^\perp$-résidu de $Y'$ au dessus du $i^\perp$-résidu d'holonomie triviale de $Y$ revêtant un $i^\perp$-résidu de $Z$ d'holonomie non triviale, nous voyons que $h_i$ a strictement diminué.

□

**4.4 Proposition.** *Soit $Z$ un immeuble local propre fini de paramètres $(q_i)_{i\in I}$. Supposons que $\pi_1(Z)$ ait la propriété $(QCS)$. Soit $R$ un $i^\perp$-résidu de $Z$. Alors $Z$ admet un revêtement fini $f : Y \to Z$ contenant un $i^\perp$-résidu $R'$ avec $f(R') = R$ et $R'$ est sans i-holonomie.*

**Démonstration**

Fixons une chambre de base $c$ dans $R$. Soit $\Lambda = \pi_1(R, c)$. Alors $\Lambda$ est quasi-convexe dans $\Gamma = \pi_1(Z, c)$.

En effet considérons l'action de $\Gamma$ sur l'immeuble $\Delta(W, I, (q_i)_{i\in I})$, fixons une chambre $\tilde{c}$ de $\Delta$ au dessus de $c$, et notons $\tilde{R}$ le $i^\perp$-résidu de $\tilde{c}$. La métrique sur $\Gamma$ donnée par $d(\gamma, \gamma') = d_\Delta(c, \gamma^{-1}\gamma' c)$ est quasi-isométrique aux diverses métriques des mots sur $\Gamma$ (ici $d_\Delta$ dséigne la distance de galerie entre deux chambres de $\Delta$), car $\Gamma$ est un groupe discret cocompact d'automorphismes de $\Delta$.

Le groupe $\Lambda$ apparaît comme le stabilisateur de $\tilde{R}$ dans $\Gamma$; et le passage au quotient par la restriction de l'action de $\Lambda$ à $\tilde{R}$ est le revêtement universel de $R$ : ici encore la métrique sur $\Lambda$ donnée par $d(\gamma, \gamma') = d_{\tilde{R}}(c, \gamma^{-1}\gamma' c)$ est quasi-isométrique aux diverses métriques des mots sur $\Lambda$ .

Or, par convexité des résidus, la métrique $d_\Delta$ induit sur $\tilde{R}$ la métrique $d_{\tilde{R}}$ : donc l'inclusion de $\Lambda$ dans $\Gamma$ est bien une quasi-isométrie sur son image ($\Lambda$ est isométrique-ment plongé dans $\Gamma$ pour les métriques de galerie).

Soit $\Lambda'$ le noyau de la représentation d'holonomie $t : \pi_1(R, c) = \Lambda \to \mathfrak{S}(X_i(c))$. Puisque $X_i(c)$ est fini, $\Lambda'$ est d'indice fini dans $\Lambda$, donc lui aussi quasi-convexe dans $\Gamma$. Par la propriété $(QCS)$ c'est l'intersection des sous-groupes d'indices finis de $\Gamma$ le contenant : si $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ est la famille des sous-groupes d'indices finis de $\Gamma$ contenant $\Lambda'$, on a $\Lambda' = \bigcap_{\alpha\in A} \Gamma_\alpha$.

Les groupes $\Lambda_\alpha = \Lambda \cap \Gamma_\alpha$ sont intermédiaires entre $\Lambda'$ et $\Lambda$. Comme $\Lambda'$ est d'indice fini dans $\Lambda$ il y a un nombre fini de tels groupes : il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in A$ tels que $\{\Lambda_{\alpha_1}, \cdots, \Lambda_{\alpha_n}\} = \{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Alors $\Lambda' = \Lambda' \cap \Lambda = \bigcap_{\alpha \in A} \Lambda_\alpha = \bigcap_1^n \Lambda_{\alpha_i} = (\bigcap_{i=1}^{i=n} \Gamma_{\alpha_i}) \cap \Lambda$. Le groupe $\Gamma' = \bigcap_{i=1}^{i=n} \Gamma_{\alpha_i}$ est d'indice fini dans $\Gamma$ et sa trace sur $\Lambda$ est $\Lambda'$.

Soit $f : (Y, c') \to (Z, c)$ le revêtement (fini) pointé de $Z$ correspondant au sous-groupe $\Gamma'$ et soit $R'$ le $i^\perp$-résidu de $c'$.

On a $f(R') = R$ et $f$ conjugue la $i$-holonomie de $Y$ en $c'$ dans la $i$-holonomie de $Z$ en $c$. Les lacets de $R'$ basés en $c$ correspondent par $f$ aux lacets de $R$ basé en $c$ qui définissent un élément de $\Gamma'$. Autrement dit ils correspondent aux éléments de $\Gamma' \cap \Lambda = \Lambda'$. Donc leur $i$-holonomie est triviale et la $i$-holonomie de $R'$ est triviale.

$\square$

**Fin de la démonstration du théorème 1 de l'introduction (partie directe).**

Soit $X$ un immeuble local de type $(W, I)$ fini propre de paramètres $(q_i)_{i \in I}$. Soit $i \in I$. Alors $X$ admet un revêtement fini $X_i$ tel que $h_i(X_i) = 0$ et pour $j \in I, h_j(X_i) \leq h_j(X)$.

En effet, si $X$ a une $i$-holonomie non triviale (i.e. $h_i(X) > 0$) en appliquant la proposition 4.4 et le lemme 4.3, on obtient un premier revêtement fini $X'$ de $X$ tel que $h_i(X') < h_i(X)$. On peut continuer ce procédé tant que $h_i > 0$. Mais comme $h_i$ est entier, on finit par trouver un revêtement fini $X''$ de $X$ tel que $h_i(X'') = 0$. Il existe alors un revêtement caractéristique fini $X_i \to X$ qui factorise par $X'' \to X$. D'après le lemme 4.2 on a bien pour $j \in I, h_j(X_i) \leq h_j(X)$, et d'autre part $h_i(X_i) = 0$.

En appliquant successivement pour tout $i \in I$ la construction précédente, on obtient un revêtement fini $Y \to X$ tel que $h_i(Y) = 0$ pour tout $i \in I$, i.e. $Y$ est sans holonomie.

$\square$

**Démonstration du théorème 2 de l'introduction.**

D'après [W], pour $p \geq 6$, tous les réseaux uniformes de $I_{p,(q_1,\cdots,q_p)}$ ont la propriété $(QCS)$. Donc d'après le théorème 1, ils sont tous commensurables au produit graphé $\Gamma_0 = \Gamma_{p,(q_1,\cdots,q_p)}$.

$\square$

**Bibliographie.**

[AG] D. Angluin, A. Gardiner, *Finite common coverings of pairs of regular graphs* J. Combin. Theory Ser. B 30 (1981), no. 2, 184–187.

[$B_1$] M. Bourdon, *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow*, GAFA **7** (1997) 245-268.

[$B_2$] M. Bourdon, *Sur les immeubles fuchsiens et leur type de quasi-isomtréie*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 20 (2000) 343-364.

[BM] M. Burger, S. Mozes, *Lattices in product of trees*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 92, (2000), 151–194 (2001).

[D] M. Davis, *Buildings are CAT(0)*, in : Geometry and cohomology in group theory (Durham 1994), Cambridge UP, 1998.

[H] F. Haglund, *Enveloppes convexes dans certains immeubles et applications*, prépubli-cation d'Orsay, 2002.

[HP] F. Haglund, F. Paulin, *Constructions arborescentes d'immeubles*, à paraître dans Mathematische Annalen.

[HW] Tim Hsu and Daniel T. Wise, *On linear and residual properties of graph product*, Michigan Math. J., 46 (2), p 251-259, 1999.

[JS] T. Januszkiewicz, J. Świątkowski, *Commensurability of graph products*, Algebraic and Geometric Topology, Vol 1 (2001) , p 587-603.

[L] F. T. Leighton, *Finite common coverings of graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 33 (1982), no. 3, 231-238.

[R] M.A. Ronan, *Lectures on buildings*, Persp. Math. **7**, Academic Press, 1989.

[$R_2$] M.A. Ronan, *Coverings and automorphisms of chamber systems*, Europ. J. Combinatorics, 1 (1980), p 259-269.

[T] J. Tits, *A local approach to buildings*, in "The geometric vein", pp. 519–547, Springer Verlag, 1981.

[W] Daniel T. Wise, *The residual finiteness of negatively curved polygons of finite groups*, à paraître dans Inventiones Mathematicae.

Frédéric Haglund

URA 1169 du C.N.R.S. : Topologie et Dynamique

Laboratoire de Mathématiques - Université Paris Sud (Bâtiment 425)

F-91405 ORSAY CEDEX

e-mail address: frederic.haglund@math.u-psud.fr