Feuille d'exercices n° 5 : Borel-Cantelli, séries aléatoires.

Exercice 1. 1. Rappeler la preuve de Borel-Cantelli sens direct, à savoir :

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

2. Montrer que la réciproque est fausse en général.
3. On suppose de plus les événements $(A_n)_n$ indépendants [1] Montrer que

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

Exercice 2. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendantes avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$. Montrer que

1. $X_n \to 0$ en proba ssi $p_n \to 0$.
2. $X_n \to 0$ p.s. ssi $\sum_n p_n < \infty$.

Exercice 3. Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles i.i.d. avec $\mathbb{E}[|X_1|] = \infty$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n| \geqslant n\}) = 1$.
2. En déduire $\mathbb{P}(\lim_n \frac{S_n}{n}$ existe et $\in]-\infty, +\infty[) = 0$.

Exercice 4. Soient $A_1, A_2, \ldots$ des événements deux à deux indépendants avec $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. On cherche à montrer le renforcement suivant de la réciproque de Borel-Cantelli :

$$\frac{\sum_{m=1}^{n} 1_{A_m}}{\sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(A_m)} \to 1 \text{ p.s.}$$

On pose $S_n = \sum_{m=1}^{n} 1_{A_m}$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

2. Soit $n_k = \min\{n : \mathbb{E}[S_n] \geqslant k^2\}$. Montrer que

$$\frac{S_{n_k}}{\mathbb{E}[S_{n_k}]} \to 1 \text{ p.s.}$$

3. Observer que, pour $n_k \leqslant j \leqslant n_{k+1}$:

$$\frac{S_{n_k}}{\mathbb{E}[S_{n_{k+1}}]} \leqslant \frac{S_j}{\mathbb{E}[S_j]} \leqslant \frac{S_{n_{k+1}}}{\mathbb{E}[S_{n_k}]}$$

puis conclure.

1. on verra à l'exercice 4 que la conclusion vaut encore sous l'hypothèse plus faible d'événements deux à deux indépendants.

Exercice 5. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles positives indépendantes. Supposons qu'il existe $\delta \in]0,1[$ et $x > 0$ tel que, pour tout k :

$$\mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{X_k > x}] \leqslant \delta \mathbb{E}[X_k] \tag{6}$$

1. Montrer que
$$\sum_{k \geqslant 1} X_k < \infty \text{ p.s. } \Rightarrow \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{E}[X_k] < \infty.$$
2. Donner un exemple pour montrer la nécessité de la condition (6).

Exercice 7. [Lemme de Kronecker] Soit $x_1, x_2, \ldots$ des réels et $a_1, a_2, \ldots$ une suite de réels telle que $\lim a_n = \infty$. Montrer que

$$\left(\sum_n \frac{x_n}{a_n} \text{ converge} \right) \Rightarrow \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{a_n} \to 0 \right)$$

On pose $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k}$.

1. Montrer que
$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{a_n} = b_n - \sum_{m=1}^n \frac{(a_m - a_{m-1})}{a_n} b_{m-1}$$
2. Conclure.

Exercice 8. [Inégalité maximale de Kolmogorov]

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes avec $\mathbb{E}[X_i] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_i) < \infty$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que :
   (a) $\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}] \geqslant \mathbb{E}[S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}] \geqslant x^2 \mathbb{P}(A_k)$ si $A_k = \{|S_1| < x, \ldots, |S_{k-1}| < x, |S_k| \geqslant x\}$
   (b) En déduire :
$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j| \geqslant x \right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{x^2}.$$
2. Application :
   (a) Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $\mathbb{E}[X_i] = 0$ et $\sum_n \mathrm{Var}(X_n) < \infty$; montrer la convergence p.s. de $\sum_i^n X_i$ à partir des 3 éléments suivants :
      i. $\mathbb{P}(\sup_{n \geqslant M} |S_n - S_M| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sum_{n \geqslant M} \mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2}$.
      ii. $\mathbb{P}(\sup_{m,n \geqslant M} |S_m - S_n| > 2\varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(\sup_{n \geqslant M} |S_n - S_M| > \varepsilon)$.
      iii. $(\sup_{m,n \geqslant M} |S_m - S_n|)_{M \geqslant 1}$ est décroissante.
   (b) Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_i = i^{-\alpha}) = \mathbb{P}(X_i = -i^{-\alpha}) = 1/2$ pour $\alpha > 1/2$; montrer la convergence p.s. de $\sum_i^n X_i$. Pour quelles valeurs de α a-t-on absolue convergence ?