Feuille d'exercices n°3 : Réseaux électriques, résistance équivalente, et identité du temps de transport.

Exercice 1. [Un professeur mouillé ?] Chaque jour, un professeur londonien se rend a son bureau le matin, et revient à sa maison le soir (home, sweet home). Le professeur dispose d'un stock important de n parapluies, dont certains sont à sa maison et les autres à son bureau. Lorsqu'il pleut, le professeur prend un parapluie et le transporte avec lui. S'il ne pleut pas en revanche, il ne prend pas de parapluie, si bien que le nombre de parapluies à la maison et au bureau varie avec le temps. On notera X_t le nombre de parapluies stockés à sa maison au matin du jour $t \in \mathbb{N}$. On supposera que les épisodes de pluie sont indépendants entre le matin et le soir, et d'un jour à l'autre également, et qu'ils adviennent avec probabilité $p \in (0,1)$.

1. Préciser l'espace d'état de la chaîne $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et dessiner sur cet espace d'état les transitions de la chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$.
2. Construire un réseau dont la marche aléatoire associée est cette chaîne de Markov, et déterminer son unique mesure de probabilité stationnaire.

Exercice 2. Soit deux réels $p, q \in]0,1[$ tels que $p + q = 1$. On considère la marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ biaisée [1] sur le graphe induit par $\mathbb{Z}$ sur $\{0, 1, \ldots, n\}$, de matrice de transition :

$$P(x, y) = p\mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + q\mathbf{1}_{\{y=x-1\}} \text{ si } x \in \{1, \ldots, n-1\}, y \in \{0, \ldots, n\}$$

On rappelle que $\tau_x = \min\{t \geq 0 : X_t = x\}$ désigne le temps d'atteinte de x. On pose $h(x) = \mathbb{P}_x(\tau_n < \tau_0)$ pour $x \in \{0, \ldots, n\}$.

1. Calculer $h(x)$ à l'aide de la méthode utilisée pour résoudre la ruine du joueur (dite méthode à un pas).
2. Construire un réseau dont la marche aléatoire associée est la chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$
3. Soit $x \in \{1, \ldots, n-1\}$. Calculer les résistances équivalentes $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x)$ et $\mathcal{R}(x \leftrightarrow n)$ dans ce réseau.
4. Interpréter $\mathbb{P}_x(\tau_n < \tau_0)$ comme la tension au sommet x dans ce réseau électrique pour des valeurs des tensions aux bornes que l'on précisera, et retrouver la valeur de $h(x)$.

Exercice 3. On considère le graphe induit par l'ensemble de sommets $V = \{0, 1, 2\}^2$ sur $\mathbb{Z}^2$, soit un carré de côté 2. Chacune des arêtes est munie d'une résistance unité.

1. Calculer en exploitant les symétries du graphe et au moyen de réductions successives du réseau l'extension harmonique de la fonction $f : V \to \mathbb{R}$ avec $f((0,0)) = 0$ et $f((2,2)) = 1$.
2. Calculer aussi la résistance équivalente $\mathcal{R}((0,0),(2,2))$ dans ce réseau.

Exercice 4. Reprendre l'exercice 3 avec le carré de côté 3 cette fois.

Exercice 5. [Transformation Δ-Y] On considère sur l'ensemble de sommets {1,2,3} deux structures de graphes :

1. on dit que la marche est biaisée lorsque p et q sont distincts de $1/2$, heuristiquement cela signifie qu'il existe une direction privilégiée pour la marche aléatoire

— le triangle tout d'abord, et on note alors c_{ij} la conductance de l'arête $\{i,j\}$

— le graphe en forme de Y si l'on ajoute un sommet annexe au milieu (le point d'intersection des trois branches du Y), et on note alors c_i la conductance de l'arête qui relie le sommet annexe à i

On cherche à déterminer les relations liant $\{c_1, c_2, c_3\}$ d'une part et $\{c_{12}, c_{13}, c_{23}\}$ d'autre part, pour que les deux graphes soient "équivalents".

1. En choisissant pour $\{a,z\}$ les trois couples possibles, et en exprimant que les fonctions hamoniques associées ont même valeur en l'unique point libre, prouver que

$$c_1 c_{23} = c_2 c_{13} = c_3 c_{12}$$

2. Pour déterminer la valeur commune λ de ces 3 produits, exprimer la conductance entre les sommets $\mathcal{C}(1 \leftrightarrow \{2,3\}), \mathcal{C}(2 \leftrightarrow \{1,3\}), \mathcal{C}(3 \leftrightarrow \{1,2\})$ et en déduire les relations :

$$\lambda = \frac{c_1 c_2 c_3}{c_1 + c_2 + c_3} = c_{12}c_{13} + c_{12}c_{23} + c_{13}c_{23}$$

Exercice 6. Reprendre l'exercice 3 avec le carré de côté 4 cette fois (plus délicat, nécessite la transformation Δ-Y de l'exercice 5, ainsi qu'une calculatrice).

Exercice 7. [Temps de transport dans le n-cycle] On considère le n-cycle, c'est-à-dire le graphe de sommets $\{0, 1 \ldots, n-1\}$ où deux sommets forment une arête si $y - x \equiv 1$ modulo n ou $y - x \equiv -1$ modulo n, et on pose $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur le n-cycle.

1. Calculer $\mathbb{E}_k[\tau_0]$ à l'aide de l'identité du temps de transport.
2. Faire le lien avec la question 5 de l'exercice sur la ruine du joueur ; on rappelle qu'on avait obtenu que $\mathbb{E}_k[\tau_{\{0,n\}}] = k(n-k)$, avec $\tau_{\{0,n\}} = \min\{t \in \mathbb{N}, X_t \in \{0,n\}\}$.

Exercice 8. [Temps de transport dans les chaînes de naissance et mort] Soit $\{G, c\}$ le réseau associé au graphe $V = \{0, \ldots, n\}$ et

$$E = \{\{i, i+1\}, i \in \{0, \ldots, n-1\}\} \cup \{\{i,i\}, i \in \{0, \ldots, n\}\}$$

et on pose $c_{i,i+1} = \alpha_i$ et $c_{i,i} = \beta_i$.

1. Exprimer le temps de transport $t_{0\leftrightarrow k}$ pour la marche aléatoire sur ce réseau en fonction de la collection $(\alpha_i)_{1\le i\le n-1}$ et $(\beta_i)_{0\le i\le n}$.

Soit la chaîne de Markov dite de naissance et mort, de matrice de transition P définie sur $V \times V$ par $P(i,j) = 0$ si $|i-j| \geq 2$ par : $p_i = P(i, i+1)$, $q_i = P(i,i)$ et $r_i = P(i, i-1)$

2. Exprimer le temps de transport $t_{0\leftrightarrow k}$ pour cette chaîne de Markov.
3. Soit $\delta \in]0,1[$. On pose $p_i = \delta$ et $r_i = 1 - \delta$. Proposer des équivalents de $t_{0\leftrightarrow k}$ lorsque $n \to \infty$ a k fixé (on distinguera les cas $\delta < 1/2$, $\delta = 1/2$ et $\delta > 1/2$).

Exercice 9. Soit $x, a, z \in V^3$ trois sommets d'un réseau $\{G, c\}$. On veut montrer que

$$\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a) = \frac{\mathcal{R}(a \leftrightarrow x) - \mathcal{R}(x \leftrightarrow x) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow z)}{2\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)}$$

1. On rappelle la notation $\tau_{a,z} = \tau_a + \tau_z \circ \theta_{\tau_a}$. Montrer qu'on a l'identité trajectorielle suivante :

$$\tau_{a,z} = \tau_z + \mathbf{1}_{\tau_z<\tau_a} \tau_{a,z} \circ \theta_{\tau_z}.$$

2. En déduire :
$$\mathbb{E}_x[\tau_{a,z,x}] = t_{x\leftrightarrow z} + \mathbb{P}_z(\tau_z < \tau_a)\, t_{a\leftrightarrow z}.$$
3. En déduire :
$$t_{x\leftrightarrow a} + t_{a\leftrightarrow z} - t_{x\leftrightarrow z} = 2\mathbb{P}_z(\tau_z < \tau_a)\, t_{a\leftrightarrow z}.$$
4. Conclure.

Exercice 10. [Résistance équivalente d'une "échelle"] On considère le graphe induit par les sommets de coordonnées
$$V_n = \{(0,j) : 0 \le j \le n\} \cup \{(1,j) : 0 \le j \le n\}$$
sur $\mathbb{Z}^2$, que l'on note G_n.

1. Supposons $n \ge 1$. Montrer que la résistance équivalente $\mathcal{R}_n$ dans le graphe G_n satisfait à
$$1/2 \le \mathcal{R}_n((0,0) \leftrightarrow (0,1)) \le 3/4.$$
2. Justifier l'existence de la limite de la suite $(\mathcal{R}_n((0,0) \leftrightarrow (0,1)))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer cette limite lorsque $n \to \infty$.

Exercice 11. [Bornes sur la résistance équivalente d'un sous-réseau $\mathbb{Z}^2$] Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note B_n l'ensemble des sommets (x,y) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $|x| + |y| \le n$, et G_n le graphe induit par $\mathbb{Z}^2$ sur V. On note aussi ∂B_n l'ensemble des sommets (x,y) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $|x| + |y| = n$.

On s'intéresse à la résistance équivalente $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n)$, dont on cherche un minorant et un majorant qui ne diffèrent que d'une constante multiplicative lorsque $n \to \infty$.

1. Prouver que :
$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \ge \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4(2k+1)}$$
et en déduire :
$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \ge \frac{1}{8}\log(n).$$
2. À l'aide de l'exercice [Urne de Polya II], définir un flot θ sur les arêtes orientées de G, et en déduire la majoration :
$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \le \left(\frac{1}{6} - o(1)\right)\log(n)$$

Feuille d'exercices n°4 : Temps de transport et temps de couverture

Exercice 12. Soit $G = (V, E)$ un graphe, $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible sur A de matrice P et

1. Montrer que la fonction $x \mapsto h(x) = \mathbb{E}_x[\tau_A]$ satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} h(x) & = 1 + \sum_y P(x,y)h(y) \quad \text{si } x \notin A, \\ h(x) & = 0 \quad \text{si } x \in A \end{cases}$$

2. Montrer que ces équations admettent une unique solution.

Exercice 13. On considère un carré de côté 2 dans le réseau $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire (par exemple) le graphe induit par l'ensemble de sommets $V = \{0, 1, 2\}^2$ sur $\mathbb{Z}^2$. Les arêtes sont munies d'une résistance unité.

1. Calculer en exploitant les symétries du graphe la valeur de la fonction $h(x) = \mathbb{E}_x(\tau_{(2,2)})$ en tout sommet x du graphe.

Exercice 14. [Temps de couverture du tore 1d] On considère à nouveau le n-cycle, dont on cherche maintenant à estimer/calculer le temps de couverture.

1. A l'aide des formules du temps de transport et de Matthews, donner des bornes inférieures et supérieures pour le temps de couverture du tore 1-d.
2. On pose maintenant $Y_t = |X_t|$ et $\tau_k = \min\{t \geq 0 : Y_t = k\}$. Calculer $\mathbb{E}[\tau_{k+1} - \tau_k]$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
3. Que dire de la qualité des bornes de Matthews sur cet exemple ? Commenter.

Exercice 15. Trouver un graphe G avec deux sommets distingués $\{a, z\}$ tel que le graphe ne puisse pas être "réduit", c'est-à-dire transformé en une arête entre les deux sommets $\{a, z\}$ au moyen des opérations :

1. transformation en série,
2. transformation en parallèle,
3. transformation Δ-Y,
4. élimination des arêtes dont le degré d'un des deux sommets vaut 1.