Feuille d'exercices n° 6 : Pot Pourri calculatoire et lemme de Wald

Exercice 1. [Somme de deux dés pipés.] Soit donc X et Y deux variables indépendantes (mais pas nécessairement de même loi) sur $\{1, \dots, 6\}$ telles que $X + Y \sim \mathrm{Unif}(\{2, \dots, 12\})$

1. Calculer ϕ_{X+Y} la fonction génératrice[1] de $X + Y$.
2. Comparer les racines réelles de ϕ_X , ϕ_Y et ϕ_{X+Y} et conclure sur l'existence d'un tel couple (X, Y).
3. Discuter d'une généralisation à deux dés à n faces.

Exercice 2. [Uniforme, somme produit quotient...] Soit $U_1, U_2 \sim \mathrm{Unif}(0, 1)$ i.i.d. selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Calculer la loi de $1/U_1$.
2. Calculer la loi de $U_1 - U_2$.
3. Calculer la loi de $U_1 U_2$.
4. Calculer la loi de U_1/U_2.

Exercice 3. [Quotients remarquables] Calculer la loi de X_1/X_2, où X_1 et X_2 sont i.i.d. selon :

1. $\mathrm{Exp}(1)$ la loi exponentielle de paramètre 1,
2. $\mathcal{N}(0, 1)$ la loi gaussienne centrée réduite.

Exercice 4. [Exponentielle et loi de Poisson] Soit $E_1, E_2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d. selon $\mathrm{Exp}(1)$ la loi exponentielle de paramètre 1. On définit $N = N(t) \in \mathbb{N}$ par :

$$N(t) = \sum_{i \geqslant 1} \mathbb{1}_{E_1 + \ldots + E_i \leqslant t}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(E_1 + \ldots + E_n \leqslant t < E_1 + \ldots + E_{n+1})$.
2. Quelle est la loi de la variable $N(t)$?

Exercice 5. [Putnam 2023, A4] Soit $U_1, U_2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d. selon $\mathrm{Unif}(0, 1)$ la loi uniforme sur l'intrervalle $[0, 1]$. On pose $N = \min\{i \geqslant 1 : U_i < U_{i+1}\}$ puis

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{X_k}{2^k}.$$

1. Calculer $\int_{0<x_n<x_{n-1}<\ldots<x_1<1} x_n dx_1 \dots dx_n$.
2. En déduire $\mathbb{E}[S_N]$.

Exercice 6. [Lemme de Wald] Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, X_2, \dots \in \mathbb{R}$ des variables aléatoires. On forme la nouvelle variable aléatoire :

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

1. pour mémoire, $\phi_X(s) = \sum s^k \mathbb{P}(X = k)$

1. Rappeler pourquoi $\mathbb{E}[N] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geqslant k)$
2. On suppose que $X_1, X_2, \ldots$ sont toutes de même espérance, et indépendantes de la variables N. Montrer que :
$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1].$$
   (a) si $X_1, X_2, \ldots$ sont positives.
   (b) si $X_1, X_2, \ldots$ et N sont intégrables.
3. On suppose que $X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes, de même espérance et que pour tout entier k, $\{N \leqslant k\} \in \sigma\{X_1, \ldots, X_k\}$. Montrer à nouveau que :
$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1].$$
4. On suppose dorénavant que $X_1, X_2, \ldots$ est une suite i.i.d. de carré intégrable indépendante de N, elle aussi supoosée de carré intégrable. Montrer qu'on a alors de plus :
$$\mathrm{Var}(S_N) = \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N)\mathbb{E}[X]^2.$$