

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
MAGISTÈRE DE MATHÉMATIQUES

Rapport de magistère

Julie FOURNIER

OCTOBRE 2014

Ce rapport commence par une description commentée de mon parcours dans le magistère de mathématiques de la faculté Paris-Sud, de 2010 à 2014. Les comptes-rendus des différents travaux que j'ai accomplis pendant ces quelques années sont placés en annexe du présent rapport. Ils sont restés dans l'état dans lequel je les ai remis à mes professeurs. La deuxième partie présente le domaine de recherche dans lequel j'ai commencé à me plonger pendant mon stage de M2, qui est également celui de mon doctorat.

Sommaire

1	Description du parcours	9
2	Étude géométrique des champs aléatoires anisotropes	13
	Annexes	24
A	Projet en L3 - Démonstrations d'existence grâce au théorème de Baire	25
A.1	Théorème de Baire	25
A.1.1	Enoncé et démonstration	25
A.1.2	Enoncé équivalent	26
A.1.3	Utilité	26
A.2	Existence de nombres transcendants	26
A.2.1	Définitions : nombres algébriques, nombres transcendants	26
A.2.2	Première preuve utilisant la dénombrabilité des nombres algébriques	27
A.2.3	Seconde preuve grâce aux nombres de Liouville	27
A.3	Existence de fonctions continues nulle part dérivables	31
B	Apprentissage hors murs, en L3 - Modélisation analytique de la méthode de Ramsey des champs oscillants alternés : rapport de stage de magistère de mathématiques réalisé au CSNSM d'Orsay	33
B.1	Quelques explications physiques pour saisir l'intérêt du stage	34
B.2	Les cinq étapes de la méthode de Ramsey.	35
B.3	Comment obtenir une expression théorique de la polarisation finale en fonction de ω	36
B.3.1	Les équations de Bloch dans le référentiel tournant	36
B.3.2	Principe général	36
B.3.3	Hypothèses simplifiant le système différentiel	37
B.3.4	Une inconnue supplémentaire : le basculement aux étapes 2 et 4	37
B.4	Synthèse de mes résultats : expressions de la polarisation à la fin des différentes étapes	37
B.4.1	Résultats	37
B.4.2	Commentaires sur le résultat final	38
B.5	Bilan de mon travail	39
B.5.1	Utilisation de mes résultats pour parvenir à une valeur expérimentale de ω_L	39
B.5.2	Utilité de Mathematica	39

A	TER en M1 - Première partie d'une preuve du théorème de Poncelet utilisant l'analyse complexe	41
A.1	Réseau et équation différentielle associée	42
A.1.1	Réseau et fonctions elliptiques	42
A.1.2	Fonction de Weierstraß associée à un réseau	42
A.1.3	Equation différentielle vérifiée par la fonction de Weierstraß	43
A.1.4	Propriétés des constantes associées à un réseau	45
A.2	Existence d'un réseau associé à des constantes	45
A.2.1	La fonction modulaire J	45
A.2.2	Le groupe modulaire Γ	45
A.2.3	Domaine fondamental pour Γ	46
A.2.4	Développement en série de Fourier de J	46
A.2.5	Valeurs prises par J	47
A.2.6	Résolution du problème inverse	47
A.3	Preuve du lemme : modèle algébrique d'un réseau	48
B	Projet en M2 MSV	51
B.1	Modélisation	53
B.1.1	Cadre de l'étude	53
B.1.2	Mouvement de l'abeille	53
B.1.3	Ordre de grandeur des paramètres	55
B.2	Recherche d'une fleur	56
B.2.1	Impact des paramètres	56
B.2.2	Quelques résultats théoriques dans le cas d'une dérive nulle	63
B.3	Nombre de fleurs visitées avant un temps fixé	70
B.3.1	Modèle pour la répartition des fleurs	70
B.3.2	Influence des paramètres	71
B.3.3	Problème de temps de calcul	76
B.4	Autres esquisses de recherche	77
B.4.1	Complexification du modèle relatif aux fleurs	77
B.4.2	Modélisation du mouvement du pollinisateur par une marche aléatoire	77
B.4.3	Trajectoire et spirale archimédienne	78
B.4.4	<i>Drift</i> et équation différentielle stochastique	80
B.4.5	Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck	81
B.5	Conclusion	82
B.6	Annexe	83
C	Mémoire de stage de master	89
C.1	Diverses notions sur les champs aléatoires	91
C.1.1	Stationnarité et accroissements stationnaires, isotropie	91
C.1.2	Champs aléatoires gaussiens	92
C.1.3	Représentation spectrale de la covariance	92
C.1.4	Fonction variogramme	93
C.1.5	Régularité des champs aléatoires	94
C.2	Compte-rendu de l'article de Bartz, Kou et Adler ([1])	100
C.2.1	Présentation du problème et de l'objet de l'article	100
C.2.2	Méthode proposée	101
C.2.3	Précisions sur le modèle	105

C.2.4	Mise en œuvre de la méthode sur des données simulées et choix des facteurs expérimentaux	107
C.2.5	Application de la méthode aux données d'IRM	110
C.2.6	Conclusion	111
C.3	Compte-rendu de l'article de Xue et Xiao ([2])	112
C.3.1	Modèle de champ gaussien à accroissements stationnaires	112
C.3.2	Majoration du variogramme	115
C.3.3	Existence de dérivées partielles et différentiabilité	118
C.3.4	Dimensions fractales d'ensembles liés aux champs	124
C.3.5	Application des résultats à des modèles stationnaires espace-temps	126
C.3.6	Conclusion	132
C.4	Quelques résultats supplémentaires inspirés de [2]	134
C.4.1	Condition pour une dérivabilité à l'ordre 2, au sens L^2	134
C.4.2	Estimation des H_j	136

Chapitre 1

Description du parcours

J'ai étudié à la faculté d'Orsay de 2010 à 2014. Après trois ans de classes préparatoires au lycée Faidherbe, à Lille, j'avais suivi le conseil de mon professeur de mathématiques. Il m'avait recommandé le magistère d'Orsay pour le niveau élevé de la formation qui y était dispensée.

Je me suis donc inscrite en troisième année de licence de mathématiques fondamentales et appliquées et j'ai aussi intégré le magistère de mathématiques. Ont suivi une première année en master MFA et la deuxième année du magistère de mathématiques. En 2012-2013, j'ai préparé à Orsay l'agrégation de mathématiques, option « probabilités et statistiques », et je l'ai passée avec succès. Ma dernière année sur les bords de l'Yvette s'est déroulée en M2 « Mathématiques pour les sciences du vivant ». C'est au laboratoire de mathématiques appliquées de l'université Paris-Descartes (MAP5) que j'ai effectué mon stage de M2, encadrée par Anne Estrade, sur le sujet : « Champs aléatoires gaussiens : étude de la caractéristique d'Euler d'ensembles d'excursion, modèle anisotrope de type espace-temps » (voir l'annexe C). Actuellement, je commence un doctorat au MAP5, sous la direction d'Anne Estrade, sur la « caractérisation géométrique de champs aléatoires anisotropes ».

La suite de ce chapitre comporte une description plus détaillée et chronologique ainsi que mon point de vue sur les cours que j'ai suivis et la formation que j'ai reçue pendant ces quelques années. J'évoque plus particulièrement la formation reçue dans le cadre du magistère.

L3 MFA

À mon arrivée en L3, j'ai été très intéressée par les cours portant sur des sujets qui m'étaient encore inconnus, en particulier le cours sur l'intégrale de Lebesgue et l'introduction aux probabilités au second semestre. J'ai également apprécié d'approfondir des sujets abordés en classe préparatoire et sur lesquels je me sentais un peu plus à l'aise que la première fois qu'ils m'avaient été présentés : la topologie, le calcul différentiel et les équations différentielles. J'ai choisi de suivre le cours « Algèbre et graphes ».

En magistère, le cours dispensé par Nicolas Burke et Wendelin Werner portait sur la topologie générale, avec des applications en analyse fonctionnelle. Il donna lieu à une étude de quelques ensembles fractals classiques tels que l'ensemble triadique de Cantor, ainsi qu'à une présentation de la dimension de Hausdorff que j'allais retrouver pendant mon stage de M2, puis mon doctorat. J'apprécie donc aujourd'hui de connaître grâce à

ce cours quelques notions sur les ensembles dits fractals et sur le calcul de dimensions de Hausdorff.

Mon projet de L3 était proposé par Frédéric Le Roux, alors enseignant-chercheur dans l'équipe « Topologie et dynamique » du laboratoire de mathématiques d'Orsay, et il avait pour titre « Démonstrations d'existence grâce au théorème de Baire ». L'objectif du travail était de montrer par des exemples que des démonstrations d'existence peuvent se faire grâce au théorème de Baire. Mon rapport de projet, présenté en annexe A, commence par une démonstration du théorème et se poursuit par son application aux démonstrations de l'existence de nombres transcendants parmi les réels et de celle de fonctions nulle part dérivables dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Frédéric Le Roux m'avait proposé d'écrire le rapport sous Latex, et c'est donc à cette occasion que j'ai utilisé pour la première fois ce logiciel.

Mon stage hors murs a eu lieu au centre de spectrométrie nucléaire et de spectrométrie de masse (CSNSM) d'Orsay, dans le groupe « Structure nucléaire », où j'ai été encadrée par Stéphanie Rocchia, enseignante-chercheuse dans ce laboratoire.

Je devais établir par des calculs l'expression théorique de la polarisation créée par un groupe de spins de neutrons. Ce groupe de spins subit une série d'étapes pendant lesquelles l'évolution de leur polarisation est régie par un système différentiel et l'objectif était de connaître l'état final. Les calculs consistaient en partie en la résolution d'équations différentielles de façon approchée, à l'aide de développements limités. Pour les mener à bien, j'avais à ma disposition le logiciel de calcul formel Mathematica que j'ai dû prendre en main à l'occasion de ce stage. Néanmoins, ce logiciel ne m'a pas aidé autant que je l'aurais souhaité, et ne m'a pas permis d'obtenir un résultat à la précision espérée. Le rapport du stage se trouve en annexe B.

Ce stage a été l'occasion de découvrir le quotidien d'un laboratoire de recherche en physique expérimentale. Même si ce quotidien est différent de celui d'un laboratoire de mathématiques, que je devais découvrir plus tard, je suis contente d'en avoir eu un aperçu. Par ailleurs, il m'a permis de me rendre compte que la résolution d'un problème physique à l'aide des mathématiques ne pouvait se faire sans une certaine compréhension du mécanisme physique en question, sans laquelle on ne peut faire les hypothèses raisonnables, en adéquation avec le phénomène modélisé.

M1 MFA

En M1, au premier semestre, j'ai choisi les cours d'algèbre et de probabilités et, au second, les cours de statistiques et de géométrie. J'ai été particulièrement intéressée par le cours de probabilité de Jean-François Legall, dans lequel se trouvaient en particulier étudiées les martingales et les chaînes de Markov. J'ai apprécié de me voir proposer un cours d'histoire des mathématiques : pour la première fois, on me parlait des mathématiciens comme de personnes réelles, des interactions entre ces personnes, et de la façon dont se faisaient les mathématiques il y a quelques siècles.

Le cours du magistère du premier semestre, dispensé par Frédéric Paulin, donnait des compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique. Tout en présentant une théorie que je ne connaissais pas, il m'a permis de m'entraîner aux manipulations dans les espaces de Hilbert.

Au second semestre, le cours du magistère proposé par Pierre Pansu portait sur la théorie mathématique de l'entropie, très liée à la théorie de l'information. Il donnait lieu à l'utilisation des probabilités, en particulier de la notion de chaînes de Markov.

Mon TER de M1, encadré par Patrick Billot, consistait à comprendre une portion

de la preuve du théorème de Poncelet utilisant l'analyse complexe. La seconde partie de la preuve, établissant un lien étonnant entre le lemme 1 du rapport (placé en annexe A) et le théorème géométrique, n'apparaît pas dans la rédaction car je n'ai pas eu le temps de la comprendre dans les détails.

Préparation à l'agrégation

J'ai choisi de présenter le concours de l'agrégation avec l'option « probabilités et statistiques ».

Pendant la préparation de l'agrégation, nous devons accomplir un stage de recherche ou pédagogique. J'ai choisi la seconde possibilité, dans l'idée de vivre une première expérience de l'enseignement devant un groupe d'élèves. Ce stage a eu lieu au lycée Lakanal, à Sceaux. J'ai pu assister à des cours de Terminale scientifique, dans la classe d'Annie-Claude Créhange qui m'a encadrée et m'a permis de réaliser quelques séances ou portions de séances dans le cours de la spécialité « mathématiques ». Même si j'ai dû consacrer trop de temps à mon goût à ce stage, pendant une année où la quantité de travail était déjà grande, il m'a apporté une expérience positive de l'enseignement, expérience que je renouvelle actuellement en ce début de doctorat, grâce au monitorat.

M2 MSV

Le M2 « mathématiques pour les sciences du vivant » m'intéressait car la formation proposée y était très diversifiée : probabilités, statistiques, équations aux dérivées partielles et optimisation au premier semestre, parcours au choix au second semestre. L'idée de présenter les objets mathématiques pouvant être utilisés en biologie ou médecine me plaisait beaucoup. Enfin, ce master contenait des enseignements en probabilités, domaine que je pensais choisir pour le doctorat.

Les interventions de biologistes et de médecins qui venaient présenter leur travail et leur utilisation des mathématiques m'ont permis de découvrir des problèmes biologiques d'actualité.

Au deuxième semestre, j'ai choisi exclusivement des cours de probabilités et de statistiques. Leur contenu était encore plus tourné vers les applications en sciences du vivant, puisqu'il s'agissait parfois de modèles spécifiques à appliquer à un problème précis (par exemple, le cours de statistique pour la génomique). Les professeurs étaient parfois eux-mêmes biologistes, c'était par exemple le cas d'Hélène Morlon chargée d'une partie du cours « arbres aléatoires et modèles d'évolution » En guise de cours supplémentaire que je devais suivre dans le cadre du magistère, j'ai choisi le cours de Sylvie Méléard et Vincent Bansaye proposé dans le cadre du master : « modélisation stochastique des populations structurées ». Les cours de probabilité du premier et second semestre avaient pour objet des processus stochastiques. Les statistiques spatiales, présentées par Liliane Bel, donnaient des outils d'étude de données spatiales modélisées par des champs aléatoires. C'est donc ce cours qui m'a le plus aidé lorsque j'ai commencé mon stage.

Nous avions à réaliser en binôme un projet portant sur un problème issu des sciences du vivant. J'ai réalisé ce projet, dont le compte-rendu est situé en annexe B, avec Laure Pedeches. Le sujet était la modélisation de la recherche de nourriture par un pollinisateur et nous avons donc bénéficié de l'encadrement d'un mathématicien et d'une biologiste, Vincent Bansaye du CMAP et Emmanuelle Porcher du Museum d'histoire

naturelle. Dès le début, la modélisation du mouvement du pollinisateur s'est faite par un mouvement brownien avec dérive, et nous avons placé dans le domaine une fleur en un point fixé ou suivant une certaine loi de probabilité. Malgré la simplicité du modèle, nous avons été confrontées à des limitations théoriques et nous avons donc principalement étudié ce modèle à l'aide de simulations.

Au cours de cette année de M2, j'ai apprécié de pouvoir m'entraîner à plusieurs reprises à l'amélioration de mon aisance à l'oral, grâce aux diverses présentations que j'ai eu à faire. En outre, je pense aussi avoir appris des choses utiles à la rédaction de documents, à l'utilisation de Latex (notamment pour la conception de beamers) et à l'utilisation de logiciels (en particulier Scilab utilisé pendant mon projet en binôme sur les pollinisateurs, ainsi que R).

Chapitre 2

Étude géométrique des champs aléatoires anisotropes

Je commence un doctorat au MAP5, le laboratoire de mathématiques appliquées de la faculté Paris-Descartes, sous la direction d'Anne Estrade. L'intitulé de mon projet de thèse est « Caractérisation géométrique des champs aléatoires anisotropes ». Les pages qui suivent constituent une présentation du domaine de recherche duquel relèvera mon travail : celui des champs aléatoires anisotropes étudiés par le biais de propriétés géométriques d'ensembles liés à leurs réalisations. Elles présentent les objets mathématiques en jeu, les avancées historiques dans le domaine, les applications possibles de la théorie développée par les mathématiciens dans d'autres sciences ; elles évoquent aussi les problèmes qui m'intéresseront particulièrement dans les années à venir.

Les livres [3] de R. Adler, ainsi que [4] de J.-M. Azaïs et M. Wschebor offrent à eux deux une bonne présentation du domaine. Le livre [5], écrit par R. Adler et J. Taylor, est aussi une référence, au contenu moins facile d'accès.

Dans le texte qui suit, j'ai voulu restreindre la quantité de définitions, ne faisant figurer que celles qui me paraissent indispensables à la compréhension des explications.

Champs aléatoires

Un champ aléatoire est une collection de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités, à valeurs dans un même espace et indexées par un paramètre décrivant un ensemble multi-dimensionnel fixé qui, dans le cadre de mon travail, sera continu.

Définition 1 (champ aléatoire). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, d, d' deux entiers naturels non nuls. L'espace \mathbb{R}^d est muni de sa structure euclidienne standard et l'espace $\mathbb{R}^{d'}$ est muni de sa structure euclidienne standard et de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d'}}$. Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^d .

Un champ aléatoire est une famille

$$X = \{X(s), s \in S\},$$

indexée par un espace mesurable (S, \mathcal{S}) , de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{d'}$, telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : (S \times \Omega, \mathcal{S} \times \mathcal{A}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{d'}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d'}}) \\ (s, \omega) &\longmapsto \mathbf{X}(s, \omega) \end{aligned}$$

soit mesurable.

L'ensemble S est appelé ensemble des paramètres du champ aléatoire X , lui-même également noté $X(\cdot)$.

La notion de champ aléatoire prolonge celle de processus stochastique, que l'on pourrait définir de la même manière, à la différence près que cette dernière appellation est en général réservée au cas où l'ensemble des paramètres est une partie de \mathbb{R} et qu'un processus permet donc la description d'une évolution temporelle. On considérera un espace des paramètres qui pourra être \mathbb{R}^d tout entier ou une partie de \mathbb{R}^d , présentant parfois des propriétés topologiques et de régularité.

De nombreuses sciences utilisent la théorie des champs aléatoires comme un outil de description de phénomènes spatiaux qui présentent un caractère aléatoire. On a notamment recours à eux pour la modélisation et l'analyse d'images en deux ou trois dimensions, de surfaces et, plus généralement, de toute structure spatiale. Par conséquent, les domaines d'application de ces objets mathématiques sont extrêmement variés. En imagerie médicale, les niveaux de gris d'une image, ou le signal obtenu par IRM dans un certain volume corporel peuvent être vus comme la réalisation d'un champ aléatoire. Les surfaces que l'on a besoin de modéliser sont multiples : par exemple, les surfaces de matériaux industriels vus à l'échelle microscopique (le papier, par exemple) ou les surfaces terrestre ou océanique à une échelle macroscopique. En chaque point du domaine, la variable aléatoire associée correspond à une certaine grandeur ponctuelle : l'épaisseur du papier, la hauteur du relief terrestre, l'amplitude des vagues par rapport à un niveau zéro fixé... On peut éventuellement associer à chaque point plusieurs grandeurs : hauteur, température, vitesse, etc.. Dans ce cas, le champ aléatoire utilisé pour la modélisation est multi-dimensionnel ($d' > 1$). Les domaines d'application de la théorie des champs aléatoires ne se limitent pas à l'analyse de texture en imagerie médicale, à la physique des matériaux, à la géophysique et à l'océanographie : ils incluent également la biologie, l'astrophysique, l'agronomie, les sciences environnementales, l'hydrologie, l'épidémiologie, les sciences sociales, etc.

Il existe différentes classes de champs aléatoires. Un théorème de Kolmogorov (voir [6], théorème 2.2) permet de caractériser la loi d'un champ aléatoire par ses lois marginales de dimension finie : c'est-à-dire, pour un champ X défini sur un ensemble des paramètres S , par la donnée de toutes les lois des vecteurs $(X(s_1), \dots, X(s_m))$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout m -uplet $(s_1, \dots, s_m) \in S^m$.

Par exemple, les champs aléatoires dits gaussiens sont ceux dont les lois marginales de dimension finie sont toutes gaussiennes. Ainsi, la loi d'un tel champ $(X_s)_{s \in S}$ est caractérisée par une fonction de covariance $(\text{Cov}(X_s, X_t))_{(s,t) \in S^2}$ et par une fonction d'espérance $(\mathbb{E}[X_s])_{s \in S}$. Se restreindre à cette classe de champs permet de simplifier les notions et les calculs et d'obtenir des formules explicites. Par exemple, pour les champs gaussiens centrés, les propriétés d'isotropie, de stationnarité, ou de stationnarité des accroissements, et d'autres propriétés concernant la loi de ces champs, peuvent être étudiées grâce à la fonction de covariance. Des formules explicites permettent aussi de comparer des résultats expérimentaux à la théorie. Cela explique l'intérêt porté aux champs gaussiens et la profusion des résultats les concernant. D'ailleurs, dans un premier temps de mon travail, je m'intéresserai à des champs gaussiens. Cependant, d'autres types de champs aléatoires existent, qui se construisent différemment : les processus ponctuels et les champs aléatoires de type « shot-noise » sont eux aussi utilisés en modélisation. Leur étude relève du domaine de la géométrie stochastique.

Pour la modélisation, des hypothèses portant sur la loi des champs aléatoires sont parfois faites - et sont plus ou moins en adéquation avec le phénomène à modéliser. Ces hypothèses sont la stationnarité du champ, la stationnarité de ses accroissements, ou l'isotropie du champ (cette dernière notion sera définie dans la dernière partie). Dans la définition suivante, la notation $Y \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} Z$ signifie l'égalité en loi des champs aléatoires Y et Z .

Définition 2 (stationnarité et stationnarité des accroissements). Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^d , à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Le champ X est dit *stationnaire* si, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$,

$$X(\cdot + h) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} X(\cdot).$$

On dit que le champ X est à *accroissements stationnaires* ou que les accroissements de X sont stationnaires si, pour tout $s_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$X(s_0 + \cdot) - X(s_0) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} X(\cdot) - X(0).$$

Pour les champs stationnaires ou à accroissements stationnaires, le théorème de représentation spectrale de la covariance est un outil puissant. Il s'agit en fait d'une reformulation d'un théorème de Bochner. Voici son énoncé dans le cas d'un champ à accroissements stationnaires à valeurs réelles (voir [7], chapitre 4, partie 23).

Théorème 3 (représentation spectrale de la fonction de covariance d'un champ à accroissements stationnaires). Soit $X = \{X(s) : s \in \mathbb{R}^d\}$ un champ aléatoire à valeurs réelles, centré, à accroissements stationnaires et admettant une fonction de covariance $C(s, t) := \text{Cov}(X(s), X(t))$ continue.

Il existe alors une mesure F positive et symétrique sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\|\lambda\|^2}{1 + \|\lambda\|^2} F(d\lambda) < \infty,$$

et une matrice M , carrée de taille $d \times d$, symétrique positive, telles que :

$$C(s, t) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (e^{i\langle s, \lambda \rangle} - 1)(e^{-i\langle t, \lambda \rangle} - 1) F(d\lambda) + \langle s, Mt \rangle.$$

Réciproquement, si F vérifie les hypothèses ci-dessus, la formule (C.2) définit la fonction de covariance d'un champ à accroissements stationnaires.

Ce théorème permet notamment la construction de modèles gaussiens à accroissements stationnaires (voir par exemple [8] ou [2]).

Géométrie des champs aléatoires

Comme l'indique l'intitulé de la thèse, je m'intéresserai aux propriétés géométriques liées aux réalisations de champs aléatoires, et donc à des ensembles tels que les ensembles de niveau ou d'excursion, l'image ou le graphe, mais aussi aux extrema des champs. Les étudier permet de mieux connaître le champ lui-même et éventuellement de le caractériser.

Parmi les ensembles d'intérêt se trouvent donc les ensembles de niveau du champ : si l'ensemble S des paramètres de X est une sous-variété compacte de \mathbb{R}^d de dimension N

et si l'espace où X prend ses valeurs est \mathbb{R}^N (autrement dit si $d' = N$) alors, pour tout u dans \mathbb{R}^N , l'ensemble de niveau u de X est $X^{-1}(\{u\}) = \{s \in S : X(s) = u\}$ et son cardinal est noté $N_u(X, S)$. Dans la suite, et jusqu'à mention contraire, le champ X sera supposé présenter des propriétés de régularité presque sûres suffisantes. On peut alors s'intéresser à l'espérance ou aux moments factoriels de la variable $N_u(X, S)$, en cherchant à établir une « formule de Rice » : une expression du k^e moment factoriel comme l'intégrale sur S^k d'une fonction dépendant de la distribution jointe du processus et de sa dérivée, évaluée en les k -uplets (s_1, \dots, s_k) . L'appellation « formule de Rice » rend hommage aux travaux innovants (voir [9]) de S.O. Rice, qui calcula l'espérance de $N_u(X, S)$ dans le cas d'un champ gaussien stationnaire et à paramètre réel, vers 1940, et qui appliqua son résultat au domaine alors naissant de la télécommunication. Si de telles formules sont connues pour des classes particulières de champs aléatoires, ce n'est pas le cas de la loi de la variable aléatoire $N_u(X, S)$.

Voici la formule de Rice donnant le moment d'ordre 1 de $N_u(X, B) = \#\{s \in B : X(s) = u\}$, lorsque l'ensemble des paramètres est un ouvert de \mathbb{R}^d et que B est un borélien inclus dans S .

Théorème 4. *Soient un entier naturel d , un ouvert S de \mathbb{R}^d , un point u dans \mathbb{R}^d et un champ aléatoire $X = \{X(s) : s \in S\}$.*

On suppose que X est gaussien, que l'application $S \rightarrow \mathbb{R}^d$ $s \mapsto X(s)$ est continûment différentiable, presque sûrement, et que, pour tout $s \in S$, la matrice symétrique positive $\text{Var}(X(s))$ est définie. De plus, en notant $X'(t)$ la matrice jacobienne de X en s , on suppose que

$$\mathbb{P}(\exists s \in S : X(s) = u, \det(X'(s)) = 0) = 0.$$

Alors, pour tout borélien B inclus dans S , en notant $p_{X(s)}$ la densité de la variable aléatoire $X(s)$,

$$\mathbb{E}[N_u(X, B)] = \int_B \mathbb{E}[|\det(X'(s))| | X(s) = u] p_{X(s)}(u) ds.$$

Si B est un compact, les deux termes de part et d'autre de l'égalité sont finis.

Lorsque la dimension N de l'espace S des paramètres est strictement inférieure à celle d' de l'espace où le champ prend ses valeurs, on aura en général $X^{-1}(\{u\}) = \emptyset$ presque sûrement, et donc l'étude des ensembles de niveau présente peu d'intérêt. Si elle est strictement supérieure, il n'est pas pertinent de compter le nombre de points de $X^{-1}(\{u\})$, qui peut être infini (et $X^{-1}(\{u\})$ de dimension $N - d'$), et on s'intéresse donc à des propriétés géométriques de $X^{-1}(\{u\})$, telles que sa mesure géométrique - pour laquelle on cherche des formules analogues aux formule de Rice, donnant l'espérance des moments factoriels - la longueur de sa frontière ou encore ses propriétés topologiques. Pour cela, la caractéristique d'Euler est un outil possible particulièrement intéressant.

Lorsque le champ considéré est à valeurs réelles ($d' = 1$), on s'intéresse également aux ensembles d'excursion du champ au-dessus d'un niveau fixé : si $u \in \mathbb{R}^{d'}$, l'ensemble d'excursion au-dessus de u est l'ensemble aléatoire des points de l'ensemble des paramètres où X dépasse la valeur u :

$$A_u(X, S) := \{s \in S : X(s) \geq u\}.$$

Le livre [3] de R. Adler, publié en 1981, rassemble les résultats connus à l'époque sur l'espérance de la caractéristique d'Euler des ensembles d'excursion. La caractéristique

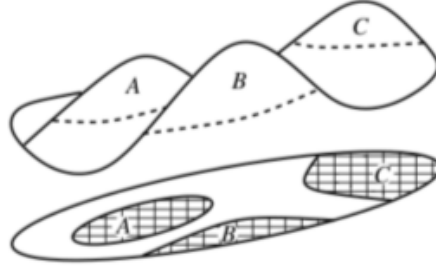


FIGURE 2.1 – Représentation d’une réalisation d’un champ aléatoire à valeurs réelles défini sur un espace des paramètres de dimension deux où apparaît l’ensemble d’excursion au-dessus d’un certain niveau ([5]).

d’Euler, notée χ , est une fonctionnelle définie sur une certaine classe de compacts d’un espace euclidien, celle des complexes basiques, et elle donne des renseignements sur la topologie de chacun de ces ensembles.

Des résultats sur la caractéristique d’Euler des ensembles d’excursion de champs aléatoires, souvent supposés gaussiens, sont rassemblés et étoffés dans le livre [5] de R. J. Adler et J. E. Taylor. Les auteurs utilisent l’approche novatrice qui consiste à munir l’ensemble des paramètres du champ aléatoire étudié, une variété régulière par morceaux, d’une métrique dépendant du champ gaussien lui-même.

Plusieurs résultats du type théorème central limite, portant sur des quantités géométriques liées aux champs, ont déjà été démontrés : par exemple, dans [10], A. Estrade et J. R. León démontrent un théorème central limite sur la caractéristique d’Euler de l’ensemble d’excursion au-dessus d’un seuil fixé $u \in \mathbb{R}^d$ d’un champ aléatoire X défini sur \mathbb{R}^d , gaussien, stationnaire, isotrope et vérifiant notamment des hypothèses de différentiabilité presque sûre. Considérant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les restrictions de X au pavé $[-n, n]^d$, ils montrent que la variable aléatoire

$$\frac{\chi(A_u(X, [-n, n]^d)) - \mathbb{E}[\chi(A_u(X, [-n, n]^d))]}{(2n)^{d/2}}$$

converge en loi, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une variable aléatoire gaussienne centrée.

L’étude des caractéristiques géométriques de champs aléatoires présente un intérêt statistique : la connaissance de résultats théoriques permet de tester l’adéquation d’un phénomène réel avec un certain modèle ou d’estimer les paramètres d’un modèle. Par exemple, dans [11], H. Biermé et F. Richard modélisent la répartition des niveaux de gris sur une mammographie par un champ aléatoire dépendant de paramètres ; ils testent l’isotropie du modèle en prouvant un résultat de convergence en loi d’estimateurs des paramètres.

D’ailleurs, un intérêt des théorèmes de la limite centrale, tels que ceux présentés dans [10] et [12], est qu’ils permettent la construction d’estimateurs statistiques.

Enfin, étudier $\mathbb{E}[\chi(A_u(X, S))]$ permet certes d’obtenir des informations sur la topologie des ensembles d’excursion, mais ce n’est pas tout. En effet, sous certaines hypothèses sur le champ, $\mathbb{E}[\chi(A_u(X, S))]$ constitue une approximation de $\mathbb{P}\left(\sup_{s \in S} X(s) \geq u\right)$, la probabilité d’excursion au-dessus du seuil u :

$$\left| \mathbb{P} \left(\sup_{s \in S} X(s) \geq u \right) - \mathbb{E}(\chi(A_u(X, S))) \right| =: \text{erreur}_{X,S}(u),$$

où le terme $\text{erreur}_{X,S}(u)$ est petit devant les deux autres termes à gauche de l'inégalité, d'autant plus que u est grand.

Ce résultat, avéré sous certaines hypothèses sur le champ et l'espace des paramètres, est parfois utilisé comme une heuristique reposant sur l'idée suivante. Pour une grande valeur de u , l'ensemble d'excursion A_u de X devrait avoir une topologie simple ou être l'ensemble vide, et donc $\chi(A_u)$ devrait valoir soit 1 dans le cas où $A_u \neq \emptyset$ - c'est-à-dire $\sup_{s \in S} X(s) \geq u$, soit 0 dans le cas contraire. Cela peut également s'écrire : $\mathbb{1}_{\sup_{s \in S} X(s) \geq u} = \chi(A_u)$. En prenant l'espérance de chacun des termes, on obtient : $\mathbb{P}(\sup_{s \in S} X(s) \geq u) = \mathbb{E}(\chi(A_u))$, égalité censée être vraie approximativement lorsque u est grand.

Cette approximation permet d'obtenir une estimation de la p-valeur p_{val} d'un test d'une hypothèse H_0 contre une hypothèse H_1 , pour lequel la statistique choisie est $\sup_{s \in S} X(s)$. En effet, p_{val} est la probabilité sous H_0 que $\sup_{s \in S} X(s)$ appartienne à un certain intervalle. (Dans [13], J. Taylor et K. Worsley utilisent une telle méthode).

Par ailleurs, une autre façon d'accéder à des informations sur un champ aléatoire aux trajectoires presque sûrement régulières, à valeurs réelles, est d'en étudier les extrema. Si un tel champ est noté X et a pour espace des paramètres un ensemble noté S , on étudie et on cherche à déterminer la loi de la variable aléatoire $M_S = \sup_{s \in S} X(s)$, ce qui revient à étudier sa fonction de répartition : pour tout réel u , $F_{M_S}(u) = \mathbb{P}(M_S \leq u)$ (très liée à la probabilité d'excursion au-dessus du seuil u). Il s'agit d'une question difficile : la loi de la borne supérieure n'est connue que pour un nombre très restreint de champs. Dans [4], publié en 2009, Jean-Marc Azaïs et Mario Wschebor présentent les différents types de résultats que l'on cherche à obtenir sur F_{M_S} , à défaut de pouvoir la connaître exactement : un encadrement de $F_{M_S}(u)$ pour tout réel u , ou le comportement asymptotique de cette fonction, ou encore sa régularité. L'étude des extrema des champs aléatoires a des applications dans les domaines où l'évaluation des risques est importante (finance, économie, hydrologie...).

Pour les champs aléatoires dont les trajectoires ne sont pas suffisamment régulières (mais quand même continues), il est plus pertinent de développer des méthodes d'analyse fractale pour déterminer des formules pour la dimension de Hausdorff ou la mesure de Hausdorff de dimension fixée des ensembles évoqués plus haut : l'image, le graphe, les ensembles de niveau ou d'excursion du champ (voir la figure 2.2). Par ailleurs, on étudie aussi la régularité (ou plutôt le type d'irrégularité) du champ. Pour les champs localement höldériens (d'exposant strictement inférieur à 1), on cherche donc à déterminer l'exposant de Hölder. Pour des champs à l'irrégularité plus complexe, comme les champs à caractère multi-fractal, pour lesquels l'exposant de Hölder dépend du point considéré, on cherche également des informations sur ces exposants.

Là encore, cela fournit des outils pour estimer certains paramètres des champs. Par exemple, dans [15], Claude-Laurent Benhamou *et al.* proposent d'évaluer le risque de fracture liée à l'ostéoporose par le biais de l'analyse fractale. Ils considèrent un certain nombre de lignes parallèles sur la radiographie d'un os et modélisent sur chacune la variation du niveau de gris par un champ brownien fractionnaire (un modèle présenté plus précisément dans la partie suivante), dont l'exposant de Hurst H est estimé grâce

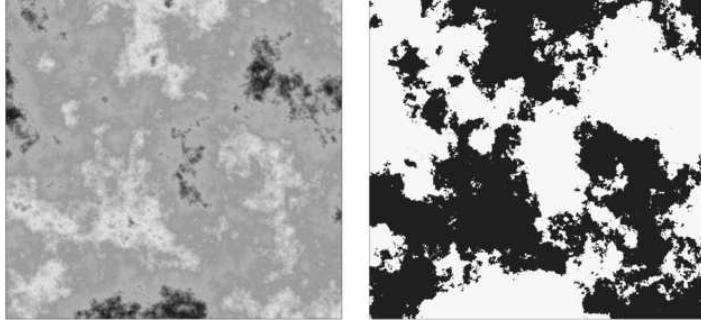


FIGURE 2.2 – À gauche : simulation d’une réalisation d’un champ gaussien centré stationnaire de matrice de covariance $\text{Cov}(X(s), X(t)) = \exp(-\|s-t\|_2)$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme 2. Les couleurs sont d’autant plus claires que les valeurs sont élevées. À droite : l’ensemble d’excursion au-dessus du niveau 0 correspondant à cette réalisation ; il est représenté en noir. ([14]).

à la relation qui le lie à la dimension fractale D du graphe de la trajectoire : $D = 2 - H$. Par la mesure des dimensions fractales pour chacune des lignes parallèles, ils estiment donc les différents exposants de Hurst dont ils considèrent la moyenne \bar{H} . Une étude statistique leur permet de constater que \bar{H} est un indicateur du risque de fracture de l’os : il est plus bas dans la population des personnes chez qui une fracture survient, par rapport à ses valeurs dans la population témoin.

Champs aléatoires anisotropes

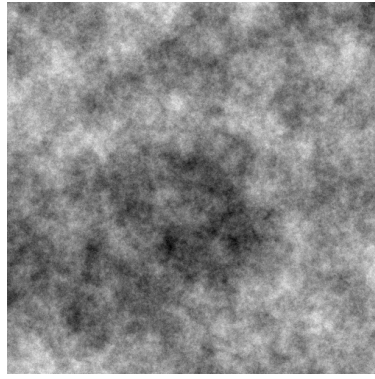
L’anisotropie est une propriété de la loi de certains champs aléatoires. En termes non mathématiques, on pourrait la traduire par un comportement du champ dépendant de la direction considérée. Commençons par donner la définition d’un champ aléatoire isotrope, l’anisotropie étant exactement la propriété de non-isotropie, et à l’illustrer par un exemple.

Définition 5 (isotropie). Soit X un champ aléatoire, défini sur \mathbb{R}^d , à valeurs dans \mathbb{R}^d . Le champ aléatoire X est dit *isotrope* si, pour toute rotation r de \mathbb{R}^d (élément du groupe spécial orthogonal de \mathbb{R}^d), le champ aléatoire $\{X(r(s)), s \in \mathbb{R}^d\}$ a même loi que X .

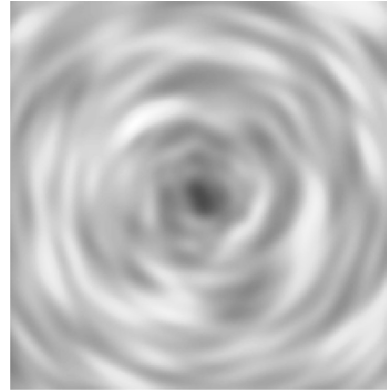
La propriété d’isotropie d’un champ X implique une forme simple de la fonction de covariance du champ : si s et t sont deux points de l’espace des paramètres, la covariance entre $X(s)$ et $X(t)$ s’exprime non pas comme une fonction de (s, t) mais comme une fonction de $\|s - t\|$.

Le mouvement brownien fractionnaire est un champ aléatoire gaussien isotrope largement étudié. Introduit par Kolomogorov en 1940, il a notamment intéressé Mandelbrot et Van Ness dans un premier article ([16]) publié en 1968. Depuis, sa généralisation en dimension quelconque est souvent utilisée, en particulier pour modéliser un milieu poreux, à cause de ses propriétés d’irrégularité et fractales (voir la simulation de la figure 2.3a). La dimension fractale de son graphe s’exprime très simplement en fonction de son paramètre de Hurst mesurant sa régularité. Cependant, il s’agit d’un champ aléatoire isotrope, ce qui limite considérablement les structures qu’il peut modéliser : il ne convient pas pour celles dont les propriétés varient suivant la direction.

Pour pallier ce manque, une généralisation du champ brownien fractionnaire a été

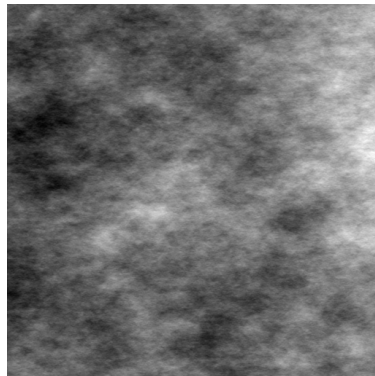


(a) Simulation d'un champ aléatoire stationnaire et isotrope : un mouvement brownien fractionnaire ([11]).

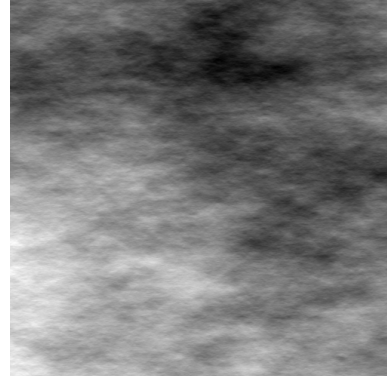


(b) Simulation d'un champ aléatoire non stationnaire et isotrope ([17]).

FIGURE 2.3 – Des simulations de champs aléatoires isotropes.



(a) $(H_1; H_2) = (0, 3; 0.5)$.



(b) $(H_1; H_2) = (0, 3; 0, 7)$

FIGURE 2.4 – Deux simulations de champs aléatoires anisotropes : des champs browniens fractionnaires anisotropes dont les couples de paramètres (H_1, H_2) diffèrent ([11]).

introduite par Aline Bonami et Anne Estrade, dans [8], en 2003 : le champ brownien fractionnaire anisotrope qui possède la propriété d'anisotropie. Ce modèle a été utilisé par H. Biermé et F. Richard dans leur article déjà cité ([11]) pour réfuter l'hypothèse suivant laquelle les mammographies ont une structure isotrope. Parmi d'autres, Yun Xue et Yimin Xiao se sont également intéressés à l'anisotropie : ils proposent dans [2] un modèle de champs à accroissements stationnaires anisotropes.

Les structures anisotropes sont omniprésentes. Autre exemple, encore en médecine : les os, dont la structure est, en général, anisotrope. Dans [18], une mesure du « degré d'anisotropie » est faite et il s'avère que celui-ci est plus élevé chez les sujets qui souffriront d'une fracture, au sein de la population testée. L'anisotropie pourrait donc permettre la construction d'un test de dépistage de l'ostéoporose. En océanographie, si l'on souhaite modéliser l'amplitude des vagues à un instant fixé, il est clair que celles-ci, au moins près du rivage, ont une direction de déplacement privilégiée. C'est donc encore un modèle anisotrope qui s'impose. Enfin, pour la modélisation de phénomènes spatio-temporels que l'on peut décrire par un champ aléatoire dépendant d'un paramètre

spatial et d'un paramètre temporel $\{X(x, t), (x, t) \in S \times T\}$, on ne peut pas faire la supposition de l'isotropie car les dépendances spatiales et temporelles n'ont pas de raison d'être liées par une telle propriété.

Les méthodes de construction de champs aléatoires anisotropes sont variées. La méthode de construction du champ brownien fractionnaire anisotrope consiste à modifier la densité spectrale - la densité de la mesure spectrale, si cette dernière est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d - d'un champ brownien fractionnaire de façon à lui faire perdre son caractère radial. Grâce au théorème 33, cela détermine la fonction de covariance, et donc la loi du champ, puisque celui-ci est gaussien et centré (méthode tirée de [8]). Cette méthode ne s'applique pas seulement au champ brownien et permet en fait de construire une multitude de champs aléatoires anisotropes, si on se limite à des champs gaussiens centrés stationnaires ou à accroissements stationnaires.

L'étude des champs aléatoires anisotropes occupe depuis une vingtaine d'années déjà une part importante de la recherche en théorie des probabilités. Elle comprend l'étude des propriétés de ces champs, la recherche de résultats permettant l'estimation des paramètres de modèles anisotropes, ainsi que le développement de méthodes de simulation (voir les simulations de la figure 2.4).

La connaissance de propriétés géométriques d'un champ aléatoire contribue à la connaissance de sa loi. De nombreux ensembles aléatoires sont donc objets d'intérêt. Des estimateurs peuvent être construits à partir de quantités géométriques liés à ces ensembles et permettre d'estimer des paramètres d'un modèle ou de tester ses propriétés.

La propriété d'isotropie constitue une hypothèse permettant la simplification des calculs et donc l'obtention de résultats. Cependant, pour de nombreuses structures réelles, la modélisation par des champs isotropes ne convient pas. L'étude de propriétés géométriques des champs aléatoires anisotropes, moins développée que celle se limitant au cas isotrope, s'avère donc nécessaire.

Annexes

Annexe A

Projet en L3 - Démonstrations d'existence grâce au théorème de Baire

L'objectif de ce travail est de montrer que des démonstrations d'existence peuvent se faire grâce au théorème de Baire. On commencera par donner une preuve de ce théorème puis on l'appliquera pour démontrer l'existence des nombres transcendants parmi les réels et celle de fonctions nulle part dérivables dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$.

A.1 Théorème de Baire

A.1.1 Énoncé et démonstration

Théorème A.1.1. Dans un espace métrique complet, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est dense.

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace métrique complet et $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses dans E . Soit U un ouvert non vide de E . On va montrer que U rencontre $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$.

Pour cela on va démontrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E et d'une suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant :

1. $\overline{B(x_0, \epsilon_0)} \subset U$,
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \epsilon_n \leq 2^{-n}$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \overline{B(x_n, \epsilon_n)} \subset \overline{B(x_{n-1}, \epsilon_{n-1})} \cap O_n$.

Le point 1. provient du fait que U est non vide et qu'il est ouvert : il existe donc $x_0 \in U$ et $\alpha > 0$ tels que $B(x_0, \alpha) \subset U$. On pose $\epsilon_0 = \min(1, \alpha/2)$. On suppose maintenant construits $(x_k)_{k \leq n-1}$ et $(\epsilon_k)_{k \leq n-1}$. Comme O_n est dense dans E , il rencontre n'importe quel ouvert non vide, donc $O_n \cap B(x_{n-1}, \epsilon_{n-1}) \neq \emptyset$. On choisit x_n dans cette intersection. Comme $O_n \cap B(x_{n-1}, \epsilon_{n-1})$ est un ouvert, il existe $\beta > 0$ tel que $B(x_n, \beta) \subset O_n \cap B(x_{n-1}, \epsilon_{n-1})$. On pose $\epsilon_n = \min(\beta/2, 2^{-n})$.

Montrons maintenant que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Par construction, $\overline{B(x_n, \epsilon_n)} \subset \overline{B(x_{n-1}, \epsilon_{n-1})}$ donc pour $m > n$:

$$\overline{B(x_m, \epsilon_m)} \subset \overline{B(x_n, \epsilon_n)} \quad \text{et donc} \quad \|x_m - x_n\| < 2^{-n}.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy et converge donc vers $x \in E$ puisque E est complet.

$$\forall n \geq 0 \quad x_n \in \overline{B(x_0, \epsilon_0)} \subset U \quad \text{donc} \quad x \in U.$$

$$\text{De plus : } \forall n \geq p \quad x_n \in \overline{B(x_p, \epsilon_p)} \subset O_p \quad \text{donc} \quad x \in O_p.$$

Finalement $x \in U \cap \left(\bigcap_{p \in \mathbb{N}} O_p \right) = U \cap G$. Donc $U \cap G \neq \emptyset$.

Donc G est dense dans E . □

A.1.2 Enoncé équivalent

Théorème A.1.2. Dans un espace vectoriel normé complet, l'union d'une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vide est d'intérieur vide.

Démonstration. On obtient ce résultat à partir du précédent par passage au complémentaire. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide dans $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé complet. Posons, pour tout entier naturel n , $O_n = \mathring{C}_E F_n$. Sachant que si $B = \mathring{C}_E A$, $\overline{B} = \mathring{C}_E \overline{A}$, et que $\mathring{F}_n = \emptyset$,

$$\begin{aligned} \overline{O_n} &= \mathring{C}_E \mathring{F}_n \\ &= E. \end{aligned}$$

Donc O_n est dense dans E . D'après le théorème de Baire, $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n} = E$.

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad \widehat{\bigcup F_n} &= \mathring{C}_E \widehat{\bigcap O_n} \\ &= \mathring{C}_E \overline{\bigcap O_n} \\ &= \mathring{C}_E E \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

□

A.1.3 Utilité

Ce théorème permet même de montrer qu'il existe dans un espace vectoriel normé complet E des éléments vérifiant une certaine propriété \mathcal{P} . En effet, il suffit pour cela de montrer que l'ensemble G des éléments de E vérifiant cette propriété peut s'écrire comme l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses. G est alors dense dans E . On obtient donc l'existence d'une classe d'éléments de E vérifiant \mathcal{P} mais aussi l'idée informelle que la plupart des éléments de E vérifient \mathcal{P} puisque l'on trouve des éléments de G dans n'importe quel ouvert non vide de E .

A.2 Existence de nombres transcendants

A.2.1 Définitions : nombres algébriques, nombres transcendants

Définition A.2.1. Un nombre complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Le *degré* d'un nombre algébrique z est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que z soit racine d'un polynôme à coefficients entiers de degré n .

On appelle *nombre transcendant* un nombre réel non algébrique.

Remarque. Les réels algébriques de degré 1 sont exactement les rationnels.

La méthode basée sur l'utilisation du théorème de Baire dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ (complet) permet de prouver l'existence de nombres transcendants. Mais il existe aussi une preuve plus directe et plus récente basée sur le résultat suivant : un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point n'est pas dénombrable. Ce résultat peut être vu comme une conséquence du second énoncé du théorème de Baire. En effet si un intervalle non vide non réduit à un point $I \subset \mathbb{R}$ était dénombrable, il existerait une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$. Les $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant des fermés d'intérieurs vides, cela impliquerait que I est d'intérieur vide, ce qui est exclu.

A.2.2 Première preuve utilisant la dénombrabilité des nombres algébriques

Théorème A.2.1. L'ensemble des réels algébriques est dénombrable.

Démonstration. Définissons, pour tout polynôme à coefficients entiers non tous nuls $\sum_{i=0}^N a_i X^i$, son poids : $N + \sum_{i=0}^N |a_i|$. L'ensemble des polynômes à coefficients entiers ayant un poids donné est fini. Si $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé, on ordonne l'ensemble des polynômes de poids p par N croissant, puis à égalité par a_0 croissant, etc. On obtient ainsi une énumération des polynômes à coefficients entiers non tous nuls : P_1, P_2, P_3, \dots . Chacun des P_i a un nombre fini de racines réelles. En écrivant les racines réelles de P_1 dans l'ordre croissant, puis celles de P_2 dans l'ordre croissant (en oubliant les éventuelles racines communes avec P_1), et ainsi de suite, on obtient une énumération des nombres algébriques réels. Cet ensemble est infini car il contient tous les nombres rationnels (racines de polynômes à coefficients entiers de degré 1). \square

On en déduit l'existence de nombres transcendants dans n'importe quel intervalle non trivial de \mathbb{R} , donc en particulier dans n'importe quel intervalle ouvert non vide : les nombres transcendants sont donc denses dans \mathbb{R} .

A.2.3 Seconde preuve grâce aux nombres de Liouville

Introduction des nombres de Liouville

Lemme A.2.2. Pour tout nombre algébrique de degré $n > 1$, il existe un entier naturel non nul M tel que, pour tous entiers p et q , $q > 0$:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Démonstration. Soit x un nombre algébrique de degré $n > 1$. Soit f un polynôme à coefficients entiers de degré n tel que $f(x) = 0$ et $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $M \geq \sup_{y \in [x-1, x+1]} |f'(y)|$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Si $|x - p/q| > 1$, puisque $1 / Mq^n \leq 1$, on a bien le résultat voulu. Supposons donc $|x - p/q| < 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f(x) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq M \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

$$\text{Donc } \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{M} \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right|.$$

f ne peut avoir p/q pour racine, sinon on pourrait factoriser f en :

$$f(y) = (y - p/q) g(y)$$

avec g polynomiale de degré $n - 1$; $x \neq p/q$ (car x est de degré ≥ 1) donc x annulerait g et $q^{n-1}g$, polynôme à coefficients entiers de degré $n - 1$: exclu. Donc $q^n f(\frac{p}{q})$, qui est entier car f est de degré n , est non nul, donc $q^n f(\frac{p}{q}) \geq 1$. Cela permet de conclure :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{M q^n},$$

l'égalité large étant en fait stricte car x n'est pas un rationnel. \square

Définition A.2.2. Un nombre réel x est appelé nombre de Liouville si :

- x est irrationnel ;
- pour tout entier naturel non nul n , il existe des entiers p et q , $q \geq 2$, tels que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Théorème A.2.3. Tout nombre de Liouville est transcendant.

Démonstration. Soit x un nombre de Liouville. Procédons par l'absurde en supposant x algébrique. Soit n son degré, $n > 1$ car x est irrationnel. Soit M la constante donnée par le lemme. D'après le lemme et la définition des nombres de Liouville, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe des entiers p et q , $q > 1$, tels que :

$$\frac{1}{Mq^n} < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}. \quad (*)$$

Choisissons $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq n + \log_2(M)$ et soient p et q les entiers donnés par la définition d'un nombre de Liouville. Comme $q \geq 2$, $k \geq n + \log_q(M)$ et $q^k > q^n M$, donc

$$(*) \text{ nous donne la contradiction : } \frac{1}{Mq^n} < \frac{1}{Mq^n}.$$

Donc x est transcendant. \square

Seconde preuve de l'existence des nombres des nombres transcendants

Démonstration. Soit L l'ensemble des nombres de Liouville. La traduction de la définition des nombres de Liouville en terme d'ensembles permet d'écrire :

$$L = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} G_n \quad \text{où} \quad G_n = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \bigcup_{q=2}^{+\infty} \left] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right[.$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{x \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{x\}$ est intersection d'ouverts denses dans \mathbb{R} . Pour tout entier naturel non nul n , G_n est ouvert comme union dénombrable d'ouverts et il est dense car il contient l'ensemble des rationnel qui est dense dans \mathbb{R} . Le théorème de Baire nous permet donc d'affirmer que L est dense dans \mathbb{R} . Il existe donc des nombres de Liouville, et le théorème précédent nous permet de conclure qu'il existe des nombres transcendants, et que cet ensemble est dense dans \mathbb{R} puisqu'il contient un ensemble dense. \square

Remarque. L'existence de nombres transcendants aurait pu être avérée avant cette démonstration si on avait réussi à exhiber un nombre de Liouville : on peut par exemple montrer que $\sum_{i=1}^{+\infty} 1/10^{i!}$ en est un.

Autres propriétés de l'ensemble des nombres de Liouville

Proposition 6. *L'ensemble des nombres de Liouville est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. On note \mathcal{L} la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Montrons que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{L}(L \cap]-m, m[) = 0$$

Comme la suite $(L \cap]-m, m[)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et $L = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} L \cap]-m, m[$, on pourra conclure :

$$\mathcal{L}(L) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(L \cap]-m, m[) = 0.$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. $L \subset G_n$, donc :

$$\begin{aligned} L \cap]-m, m[&\subset G_n \cap]-m, m[= \bigcup_{q=2}^{+\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{+\infty} \left] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right[\cap]-m, m[\\ &\subset \bigcup_{q=2}^{+\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} \left] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right[. \end{aligned}$$

Donc, comme les intervalles $\left] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right[$ sont de longueur $2/q^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L \cap]-m, m[) &\leq \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \frac{2}{q^n} \\ &= \sum_{q=2}^{+\infty} (2mq + 1) \frac{2}{q^n} \\ &\leq \sum_{q=2}^{+\infty} (4mq + q) \frac{1}{q^n} \quad (\text{car } q \geq 2) \\ &\leq (4m + 1) \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q^{n-1}} \\ &\leq (4m + 1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx \\ &\leq \frac{4m + 1}{n - 2}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\mathcal{L}(L \cap]-m, m[) = 0$$

□

Proposition 7. *La dimension de Hausdorff de l'ensemble des nombres de Liouville est 0.*

Démonstration. On rappelle la définition de la mesure de Hausdorff d'un ensemble E :

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) := \inf\{\alpha > 0 / \mathcal{H}_{\infty}^{\alpha}(E) = 0\}$$

$$\text{où } \mathcal{H}_{\infty}^{\alpha}(E) := \inf\left\{\sum_{i \in I} (\text{diam}(E_i))^{\alpha}, (E_i)_{i \in I} \text{ recouvrement dénombrable de } E\right\}.$$

La dimension de Hausdorff vérifie la propriété suivante : si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable d'ensembles,

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \sup\{\dim_{\mathcal{H}}(X_i), i \in I\}.$$

Comme $L = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} L \cap]-m, m[$, on va montrer que la dimension de Hausdorff de chacun des $L \cap]-m, m[$ est nulle et appliquer cette propriété.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$. On va voir que $\mathcal{H}_{\infty}^{\alpha}(L \cap]-m, m[) = 0$ en exhibant, pour tout $\epsilon > 0$, un recouvrement $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $L \cap]-m, m[$ tel que $\sum_{i \in I} (\text{diam}(E_i))^{\alpha} < \epsilon$.

Soient $\epsilon > 0$. Lors de la démonstration précédente, on a vu que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\left[\bigcup_{q=2}^{+\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq}\right] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \left[$$

était un recouvrement de $L \cap]-m, m[$. Il est constitué des intervalles $J_{p,q} = \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right]$ et vérifie :

$$\begin{aligned} \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} (\text{diam}(J_{p,q}))^{\alpha} &= \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{2}{q^n}\right)^{\alpha} \\ &= \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{(2mq+1) 2^{\alpha}}{q^{n\alpha}} \\ &\leq (2mq+1) 2^{\alpha} \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q^{n\alpha-1}}. \end{aligned}$$

En choisissant n tel que :

$$\begin{cases} n\alpha - 1 > 1 & \text{soit } n > 2/\alpha, \\ (2mq+1)2^{\alpha}/(n\alpha-2) < \epsilon & \text{(possible car cette quantité tend vers 0 en l'infini)} \end{cases},$$

on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} (\text{diam}(J_{p,q}))^{\alpha} &\leq (2m+1) 2^{\alpha} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n\alpha-1}} dx \\ &= \frac{(2m+1) 2^{\alpha}}{n\alpha-2} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\alpha > 0$, $\mathcal{H}_{\infty}^{\alpha}(L \cap]-m, m[) = 0$, donc $\dim_{\mathcal{H}}(L \cap]-m, m[) = 0$ et $\dim_{\mathcal{H}}(L) = \sup\{\dim_{\mathcal{H}}(L \cap]-m, m[), m \in \mathbb{N}^*\} = 0$. \square

A.3 Existence de fonctions continues nulle part dérivables

Le théorème de Baire appliqué dans l'ensemble E des fonctions continues sur $[0, 1]$, complet pour la norme de la convergence uniforme, va permettre de prouver qu'il existe une fonction continue et nulle part dérivable sur cet ensemble, et même de montrer que, d'une certaine façon, la plupart des éléments de E sont nulle part dérivables. On a même un résultat plus fort :

Théorème A.3.1. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ dont les demi-taux d'accroissement ne sont bornés en aucun point de $[0, 1]$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$.

Démonstration. Soit F constitué des fonctions de E dont les demi-taux d'accroissement à droite et à gauche en tout point de $[0, 1]$ ne sont pas bornés : $f \in F$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\forall x \in [0, 1[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists h \in]0, 1 - x] \quad \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \geq n, \quad (\text{A.1})$$

$$\forall x \in]0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists h \in]0, x] \quad \frac{|f(x-h) - f(x)|}{h} \geq n. \quad (\text{A.2})$$

En particulier, les éléments de F ne sont dérivables en aucun point x de $[0, 1]$ (en effet, les fonctions $h \mapsto \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h}$ et $h \mapsto \frac{|f(x-h) - f(x)|}{h}$ ne peuvent avoir une limite lorsque h tend vers 0, sinon elles seraient bornées sur un voisinage de 0, et donc bornées respectivement sur $]0, 1 - x]$ et $]0, x]$ puisqu'elles sont continues).

Le complémentaire de F dans E est constitué des fonctions continues sur $[0, 1]$ ne vérifiant pas la condition (1) ou la condition (2), c'est-à-dire ayant un demi-taux d'accroissement à droite ou à gauche borné en au moins un point de $[0, 1]$:

$$\mathfrak{C}_{EF} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n \right)$$

où les X_n et les Y_n sont définis par :

$$\begin{aligned} f \in X_n &\Leftrightarrow \exists x \in [0, 1 - 1/n] \quad \forall h \in]0, 1 - x] \quad |f(x+h) - f(x)| \leq nh, \\ f \in Y_n &\Leftrightarrow \exists x \in [1/n, 1] \quad \forall h \in]0, x] \quad |f(x-h) - f(x)| \leq nh. \end{aligned}$$

Montrons que les X_n et les Y_n sont des fermés d'intérieur vide.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f un élément de l'adhérence de X_n . Il existe donc une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X_n convergeant uniformément vers f sur $[0, 1]$. A chaque f_p correspond un $x_p \in [0, 1 - 1/n]$ tel que :

$$\forall h \in]0, 1 - x_p] \quad |f_p(x_p+h) - f_p(x_p)| \leq nh.$$

La suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ étant bornée, on peut considérer, quitte à extraire une sous-suite de (x_p) , qu'elle converge vers un élément x de $[0, 1 - 1/n]$.

$$\forall h \in]0, 1 - x[,$$

$$\forall p \in \mathbb{N} / h \in]0, 1 - x_p] \quad (\text{vrai pour } p \text{ suffisamment grand}),$$

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq |f(x+h) - f(x_p+h)| + |f(x_p+h) - f_p(x_p+h)| \\ &\quad + |f_p(x_p+h) - f_p(x_p)| + |f_p(x_p) - f(x_p)| \\ &\quad + |f(x_p) - f(x)| \\ &\leq |f(x+h) - f(x_p+h)| + \|f - f_p\|_\infty + nh \\ &\quad + \|f - f_p\|_\infty + |f(x_p) - f(x)|. \end{aligned}$$

Par continuité de f aux points x et $x + h$ et par convergence uniforme de (f_p) vers f , on obtient en faisant tendre p vers l'infini :

$$|f(x + h) - f(x)| \leq nh.$$

Donc $f \in X_n$ donc X_n est fermé.

Montrons maintenant que X_n est d'intérieur vide, c'est-à-dire :

$$\forall f \in X_n \quad \forall \epsilon > 0 \quad B(f, \epsilon) \cap \mathcal{C}_E X_n \neq \emptyset.$$

Les fonctions affines par morceaux sur $[0, 1]$ sont denses dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, il suffit donc de montrer le résultat pour f affine par morceaux sur $[0, 1]$. Soit M le maximum de la valeur absolue des pentes de f et soit m tel que $\epsilon m > M + n$. On introduit la fonction $\phi : x \mapsto \min(x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x)$, continue affine par morceaux, de pente 1 sur $[0, 1/2]$ et -1 sur $[1/2, 1]$ et on pose :

$$h : x \mapsto f(x) + \epsilon \phi(mx).$$

h est une fonction continue affine par morceaux sur $[0, 1]$ (comme f et ϕ). En tout point de $[0, 1]$, la pente à droite de f est en valeur absolue inférieure à M , celle de $x \mapsto \epsilon \phi(mx)$ vaut en valeur absolue $\epsilon m > M + n$ donc h a une pente à droite strictement supérieure à n . De plus $\|\phi\|_\infty < 1/2$ donc $\|h - f\|_\infty \leq \epsilon/2$. Donc $h \in B(f, \epsilon) \cap \mathcal{C}_E X_n$.

Ainsi, X_n est d'intérieur vide.

On montre exactement de la même manière que les (Y_n) sont des fermés d'intérieur vide.

Le théorème de Baire s'applique donc à $\mathcal{C}_E F$ et nous dit que cet ensemble est d'intérieur vide. Il ne contient donc aucun ouvert non vide de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ donc F rencontre tout ouvert non vide de E : il est dense dans E . \square

Remarque. On peut donc aussi trouver des fonctions continues non dérivables sur \mathbb{R} : il suffit de prolonger n'importe quel élément de F en une fonction paire sur $[-1, 1]$, puis par 2-périodicité sur \mathbb{R} tout entier.

Conclusion. Dans les deux exemples donnés ici, on a non seulement montré que les nombres transcendants (respectivement les fonctions continues nulle part dérivables sur $[0, 1]$) étaient denses dans \mathbb{R} (respectivement dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$), mais aussi qu'ils contenaient une intersection d'ouverts denses. Or les ensembles contenant un sous-ensemble G_δ dense (c'est-à-dire qui est intersection d'ouverts denses) sont agréables à manipuler car ils sont stables par intersection. Ainsi l'intersection de deux ensembles contenant chacun un G_δ dense contient un G_δ dense : d'après le théorème de Baire, il est donc non vide, et même dense.

Annexe B

Apprentissage hors murs, en L3 - Modélisation analytique de la méthode de Ramsey des champs oscillants alternés : rapport de stage de magistère de mathématiques réalisé au CSNSM d'Orsay

Introduction

J'ai effectué mon stage au centre de spectrométrie nucléaire et de spectrométrie de masse (CSNSM) d'Orsay, dans le groupe « Structure nucléaire », où j'ai été encadrée par Stéphanie Roccia, enseignante-chercheuse dans ce laboratoire. Le but de mon stage était d'établir par des calculs l'expression théorique de la polarisation créée par un groupe de spins de neutrons. Ce groupe de spins subit une série d'étapes pendant lesquelles l'évolution de leur polarisation est régie par un système différentiel ; je devais déterminer l'état final.

Les calculs consistaient en partie en la résolution d'équations différentielles, en partie en des développements limités. Pour les mener à bien, j'avais à ma disposition le logiciel de calcul formel Mathematica que j'ai dû prendre en main à l'occasion de ce stage.

Une expression avait déjà été établie par Stéphanie Roccia, dans le cadre de sa thèse, mais sous des hypothèses simplifiant les calculs. Mon travail était de voir si, en supprimant certaines de ces hypothèses, il était possible d'arriver à une expression qui soit, en vue de son utilisation, suffisamment simple.

Les chapitres 1 et 2 présentent quelques notions physiques nécessaires à la compréhension de l'intérêt expérimental de mon travail. Le chapitre 3 décrit précisément comment je m'y suis prise pour établir mes résultats dont une synthèse est donnée au chapitre 4. Au chapitre 5, je mets ces résultats en perspective en montrant comment ils seront utilisés et j'explique dans quelle mesure Mathematica m'a aidée. Tous les documents faits grâce à Mathematica et auxquels je fais référence dans ce rapport sont placés en annexe.

B.1 Quelques explications physiques pour saisir l'intérêt du stage

Essayons d'expliquer l'intérêt physique de mon travail. Chaque noyau d'atome est caractérisé par son rapport gyromagnétique noté γ . Cette constante est proportionnelle à la pulsation de précession ω_L des spins des neutrons lorsque ceux-ci sont plongés dans un champ magnétique constant \vec{B}_0 , que l'on appelle pulsation de Larmor.

En effet, en règle générale, les spins cherchent à s'aligner sur le champ magnétique environnant. Dans un champ magnétique constant \vec{B}_0 , les spins précessent autour de ce champ en décrivant un cône, à la pulsation $\omega_L = \gamma B_0$ (voir la figure B.1).

Pour mesurer γ pour un certain noyau, on est donc amené à mesurer ω_L .

Comme la quantité à laquelle on a accès expérimentalement, s'agissant de spins de neutrons, est le champ magnétique créé par ces spins (appelé polarisation), on voudrait faire en sorte que ce dernier dépende de leur pulsation de précession ω_L . Cela est possible, grâce à la méthode de Ramsey des champs alternés. Cette dernière consiste à faire subir à un groupe de spins de neutrons une série de modifications du champ magnétique environnant, de façon à ce que la polarisation finale dépende de ω_L . On détaillera précisément et on expliquera les différentes étapes de la méthode de Ramsey au chapitre suivant.

Une série de mesures de la polarisation finale couplée à une expression théorique de la polarisation finale dépendant de ω_L (que j'étais chargée d'établir) permet de déterminer ω_L par une méthode d'interpolation effectuée automatiquement. Pour être plus précis, aussi bien pour l'établissement de la formule théorique que pour les mesures, on ne s'intéresse qu'à la composante de la polarisation finale suivant la direction donnée par \vec{B}_0 .

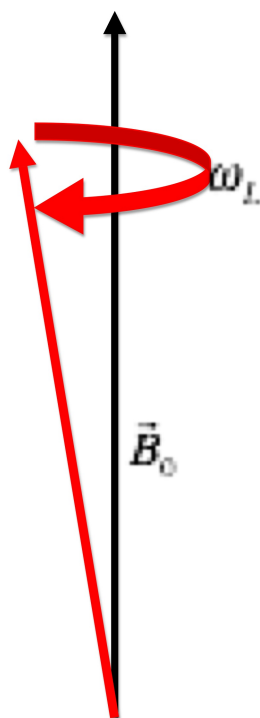


FIGURE B.1 – Spins en précession

En résumé, les mesures de polarisation permettent de calculer ω_L qui donne accès à γ .

B.2 Les cinq étapes de la méthode de Ramsey.

Plus précisément, la méthode de Ramsey met en jeu un champ magnétique tournant \vec{B}_1 à la pulsation ω fixée dans le plan perpendiculaire à la direction du champ magnétique principal \vec{B}_0 . Précisons quels sont les deux référentiels qui nous intéressent : le référentiel fixe, auquel est attaché le repère $(Oxyz)$, et le référentiel tournant avec \vec{B}_1 , auquel est attaché le repère $(Ox'y'z')$. L'axe (Oz) , confondu avec l'axe (Oz') , est dirigé par \vec{B}_0 et le champ \vec{B}_1 , qui donne la direction (Ox') , est tournant dans le plan (Oxy) . Voir la figure B.2.

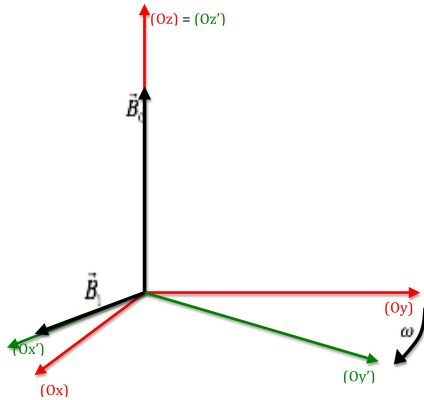


FIGURE B.2 – Repères fixe et tournant ; champ principal et champ en rotation.

Détaillons à présent les cinq étapes de la méthode de Ramsey.

1. La première étape consiste à préparer nos spins de manière à ce qu'ils soient tous « up » dans le champ magnétique principal, c'est-à-dire pour que la polarisation n'ait qu'une composante positive suivant l'axe (Oz) .
2. La deuxième étape consiste à faire un basculement de spins de $\pi/2$. Pour cela, on applique pendant un temps τ valant 2 s le champ magnétique \vec{B}_1 . Les spins cherchent alors à s'aligner avec la somme des deux champs $\vec{B}_0 + \vec{B}_1$. Le vecteur polarisation, qui était vertical, s'abaisse dans le plan (Oxy) en décrivant une spirale.
3. La troisième étape est dite de précession libre. Seul le champ magnétique \vec{B}_0 est présent. Il s'agit d'une étape longue comparativement aux étapes 3 et 5 car elle dure typiquement $T = 100$ s, soit 50 fois plus longtemps que les étapes suivante et précédente.

4. La quatrième étape consiste en un second basculement de spin de $\pi/2$, réalisée de la même manière qu'à l'étape 2. Le vecteur polarisation s'abaisse en suivant une spirale vers la direction (Oz), dans le sens négatif.
5. La cinquième et dernière étape consiste en l'analyse de la polarisation selon la direction (Oz).

En réalité, on n'arrive pas à réaliser un basculement de spin de $\pi/2$ exactement mais, dans la thèse, les calculs se faisaient avec cette approximation. Mon travail devait se faire sans conserver cette hypothèse simplificatrice.

Voir le document *Mathematica* « Représentation des différentes étapes ».

B.3 Comment obtenir une expression théorique de la polarisation finale en fonction de ω

B.3.1 Les équations de Bloch dans le référentiel tournant

Pendant les étapes 2, 3 et 4, la polarisation suit les équations de Bloch. Ce sont des équations phénoménologiques décrivant l'évolution de la polarisation en présence de phénomènes de dépolarisation. Dans le référentiel tournant, elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{x'}}{dt} &= P_{y'}\delta\omega & -\frac{1}{T_2}P_{x'} \\ \frac{dP_{y'}}{dt} &= -P_{x'}\delta\omega + P_{z'}\Omega_R & -\frac{1}{T_2}P_{y'} \\ \frac{dP_{z'}}{dt} &= & -P_{y'}\Omega_R -\frac{1}{T_1}(P_{z'} - P_0) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \delta\omega = \omega - \omega_L, \quad \omega_L = \gamma B_0 \quad \text{et} \quad \Omega_R = \gamma B_1.$$

Commentaire mathématique - Il s'agit d'un système linéaire du premier ordre à trois inconnues. Il admet donc une solution unique si on fixe des conditions initiales pour les trois composantes de la polarisation.

Commentaire physique - Expliquons les différents termes apparaissant dans le membre de droite de l'égalité. On en distingue de trois types, alignés verticalement. Les deux premiers termes décrivent les effets des champs \vec{B}_0 et \vec{B}_1 . Le troisième terme permet de décrire les phénomènes de relaxation dus à la tendance des spins à rester dans leur état de minimum d'énergie. Ici, la relaxation est de deux types : la relaxation dite longitudinale, caractérisée par la constante de temps T_1 , et la relaxation dite transversale, caractérisée par la constante T_2 .

Comme on l'a vu au chapitre précédent, le champ magnétique principal \vec{B}_0 est toujours présent mais le champ magnétique tournant \vec{B}_1 est nul pendant la troisième étape, ce qui permet de simplifier ce système.

B.3.2 Principe général

Le principe pour arriver à une expression théorique de la polarisation finale est simple : on connaît bien sûr les conditions initiales au début de l'étape 1 ; il faut à chaque étape résoudre le système différentiel de manière à connaître les conditions finales à la fin de cette étape, qui sont les conditions initiales de l'étape suivante. De proche en proche, on arrive au résultat voulu.

B.3.3 Hypothèses simplifiant le système différentiel

Par ailleurs, parce qu'autrement les calculs seraient très lourds et que l'on veut aboutir à une expression relativement simple de la polarisation finale suivant l'axe (Oz'), on fait certaines hypothèses simplificatrices.

Dans la thèse, les calculs de la polarisation du groupe de spins de neutrons mis en jeu dans la méthode de Ramsey ont été menés en ne prenant pas en compte, aux étapes 2 et 4, la relaxation (T_1 et T_2 sont considérés infinis) et en considérant que l'on est à la résonance (soit $\delta\omega = 0$: la pulsation du champ oscillant coïncide avec la pulsation de Larmor). Si on ne fait pas ces hypothèses à l'étape 3, c'est parce que cette dernière a une durée $T = 100\text{ s}$ plus importante que $\tau = 2\text{ s}$, la durée des étapes 2 et 4 ; la relaxation et le déphasage des spins sont donc plus importants pendant l'étape 3. En outre, on supposait que le basculement de spin est exactement de $\pi/2$ aux étapes 2 et 4. Cela permettait d'arriver à l'expression suivante pour $P_{z'}$ à l'étape 5 :

$$(P_{final})_1 = -e^{-T/T_2} \cos(\delta\omega T).$$

Dans mon travail, j'ai maintenu les mêmes hypothèses que dans la thèse concernant la relaxation et la résonance.

Tableau récapitulatif de l'état du champ et des hypothèses simplificatrices à chaque étape :

	Présence ou absence de champ tournant	hypothèses sur la relaxation	hypothèses sur la résonance
Etape 1	$B_1 = 0$ donc $\Omega_R = 0$	$T_1, T_2 = \infty$	$\delta\omega = 0$
Etape 2	$B_1 \neq 0$	$T_1, T_2 = \infty$	$\delta\omega = 0$
Etape 3	$B_1 = 0$ donc $\Omega_R = 0$	$T_1, T_2 < \infty$	$\delta\omega \neq 0$
Etape 4	$B_1 \neq 0$	$T_1, T_2 = \infty$	$\delta\omega = 0$
Etape 5	$B_1 = 0$ donc $\Omega_R = 0$	$T_1, T_2 = \infty$	$\delta\omega = 0$

B.3.4 Une inconnue supplémentaire : le basculement aux étapes 2 et 4

En pratique, on ne peut obtenir un basculement de spin valant exactement $\pi/2$ aux étapes 2 et 4 de la méthode de Ramsey, et l'on ne connaît pas exactement la valeur de ce basculement. J'ai donc considéré qu'il était de $\pi/2 + \epsilon$ (c'est-à-dire $\Omega_R\tau = \pi/2 + \epsilon$), où ϵ est petit, et inconnu. Cela m'a conduit à faire un développement limité à la fin des étapes 2 (respectivement 4) pour connaître l'expression de la polarisation en début d'étape 3 (respectivement 5). A la fin, j'ai donc obtenu une expression de $P_{z'}(\tau + T + \tau)$ en fonction de $\delta\omega$ et de ϵ .

B.4 Synthèse de mes résultats : expressions de la polarisation à la fin des différentes étapes

B.4.1 Résultats

Première étape (état initial)

$$\begin{aligned}P_{x'}(0) &= 0, \\P_{y'}(0) &= 0, \\P_{z'}(0) &= 1.\end{aligned}$$

Deuxième étape

Voir le document *Mathematica* « Etape 2 ».

Avec les hypothèses, le système se trouve simplifié. On évalue sa solution à la fin de l'étape, au temps τ et après développement limité, on obtient :

$$\begin{aligned}P_{x'}(\tau) &= 0, \\P_{y'}(\tau) &= 1, \\P_{z'}(\tau) &= -\epsilon.\end{aligned}$$

Troisième étape

Voir le document *Mathematica* « Etape 3 ».

La solution du système simplifié selon nos hypothèses, est évaluée en $\tau + T$:

$$\begin{aligned}P_{x'}(\tau + T) &= e^{-T/T_2} \sin(\delta\omega T), \\P_{y'}(\tau + T) &= e^{-T/T_2} \cos(\delta\omega T), \\P_{z'}(\tau + T) &= 1 - e^{-T/T_1}(1 + \epsilon).\end{aligned}$$

Quatrième étape

Voir le document *Mathematica* « Etape 4 ».

La solution du système, avec nos hypothèses, est évaluée en $\tau + T + \tau$, ce qui donne, après développement limité :

$$\begin{aligned}P_{x'}(\tau + T + \tau) &= e^{-T/T_2} \sin(\delta\omega T), \\P_{y'}(\tau + T + \tau) &= 1 - e^{-T/T_1} - \epsilon (e^{-T/T_2} \cos(\delta\omega T) + e^{-T/T_1}), \\P_{z'}(\tau + T + \tau) &= -e^{-T/T_2} \cos(\delta\omega T) - \epsilon (1 - e^{-T/T_1}).\end{aligned}$$

Cinquième étape (état final)

Théoriquement et avec nos hypothèses, la composante de la polarisation mesurée à la fin des différentes étapes est :

$$P_{z'}(\tau + T + \tau) = (P_{final})_2 = -e^{-T/T_2} \cos(\delta\omega T) - \epsilon (1 - e^{-T/T_1}).$$

B.4.2 Commentaires sur le résultat final

Dans la nouvelle expression de $P_{z'}(\tau + T + \tau)$, on constate la présence d'un terme supplémentaire par rapport à l'expression $(P_{final})_1$ obtenue dans la thèse, lié au fait que l'on n'a plus considéré que le basculement de spins était exactement de $\pi/2$. On obtient le même cosinus, mais translaté sur l'axe vertical. Le facteur $(1 - e^{-T/T_1})$ est positif d'après les ordres de grandeur de T_1 et de T (voir l'annexe), donc le terme correcteur est négatif si $\epsilon > 0$, positif si $\epsilon < 0$.

Voir le document *Mathematica* : « "Pz' en fonction de o (pour différentes valeurs des paramètres) ».

B.5 Bilan de mon travail

B.5.1 Utilisation de mes résultats pour parvenir à une valeur expérimentale de ω_L

Le but est d'avoir accès à ω_L . On met en oeuvre la méthode de Ramsey un certain nombre de fois, avec à chaque fois un champ \vec{B}_1 différent (et donc une pulsation ω différente), mais le même ϵ , dont on ne connaît pas la valeur. On obtient ainsi une série de valeurs expérimentales pour $P_{z'}(\tau + T + \tau)$, et l'ordinateur fournit la valeur de ω_L (et de ϵ) qui fait que ces dernières soient compatibles avec l'expression théorique de $P_{z'}(\tau + T + \tau)$.

B.5.2 Utilité de Mathematica

J'ai dû prendre en main le logiciel Mathematica que je ne connaissais pas. Malheureusement, il ne m'a pas aidée autant que je l'espérais. En effet, il était capable de résoudre les équations différentielles mais les expressions des solutions pouvaient être très longues et peu simplifiées, même lorsque j'utilisais une commande de simplification. En outre, je n'ai pas réussi à faire en sorte qu'il effectue un développement limité des solutions évaluées en τ et en $\tau + T + \tau$ (soit parce qu'il n'en est réellement pas capable sur des expressions compliquées, soit parce que j'étais moi-même incapable de le lui demander correctement). Je devais donc effectuer les simplifications à la main et les développements limités à la main. Avec les hypothèses simplificatrices que j'ai finalement choisi de conserver, ces calculs étaient simples (pour la plupart des systèmes différentiels correspondant aux différentes étapes, j'aurais pu me passer de Mathematica) mais lorsque j'ai voulu cesser de négliger la relaxation aux étapes 2 et 4 (ce qui revenait à cesser de faire abstraction des termes où apparaissent T_1 et T_2 dans le système d'équations), les calculs devenaient trop lourds, ce qui m'a empêchée de voir quelle est l'expression finale de $P_{z'}(\tau + T + \tau)$ lorsqu'on enlève cette hypothèse sur la relaxation.

Voir le document Mathematica "Etape 2 sans négliger la relaxation".

Conclusion

Ce stage m'a donné un aperçu de la manière dont la recherche physique a recours aux mathématiques, ici par le biais d'un logiciel de calcul formel. La théorie mathématique ne peut se faire sans prendre en compte les données physiques et expérimentales : je devais choisir les hypothèses raisonnables permettant d'obtenir un résultat suffisamment simple pour qu'il soit utile expérimentalement.

Par ailleurs, ce stage a été pour moi l'occasion de découvrir ce qu'était un laboratoire de physique expérimentale.

Bibliographie

S. Roccia, *La co-magnétométrie mercure pour la mesure du moment électrique dipolaire du neutron : optimisation et application au test de l'invariance de Lorentz*, thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble I, 2009.

Documents Mathematica

Sur les documents Mathematica, on a utilisé pour certaines des quantités présentées précédemment des notations différentes :

R	\leftrightarrow	Ω_R
o	\leftrightarrow	$\delta\omega$
tau	\leftrightarrow	τ
eps	\leftrightarrow	ϵ
$(x2, y2, z2)$	\leftrightarrow	Vecteur polarisation dans le repère (Ox'y'z') au cours de l'étape 2
$(x3, y3, z3)$	\leftrightarrow	Vecteur polarisation dans le repère (Ox'y'z') au cours de l'étape 3
$(x4, y4, z4)$	\leftrightarrow	Vecteur polarisation dans le repère (Ox'y'z') au cours de l'étape 4.

Ordre de grandeur des différentes constantes

Constante	τ	T	T_1	T_2	Ω_R
Ordre de grandeur	2 s	100 s	900 s	de 200 s à 400 s	$\pi/2$

Annexe A

TER en M1 - Première partie d'une preuve du théorème de Poncelet utilisant l'analyse complexe

Introduction

On s'intéresse au théorème suivant, dû à Poncelet.

Théorème A.0.1 (Poncelet). Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux coniques lisses en position générale du plan projectif complexe. S'il existe un polygone à n sommets inscrit dans \mathcal{C} et circonscrit à \mathcal{D} alors, pour tout point x_0 de \mathcal{C} , il existe un polygone à n sommets inscrit dans \mathcal{C} et circonscrit à \mathcal{D} tel que x_0 soit un des sommets de ce polygone.

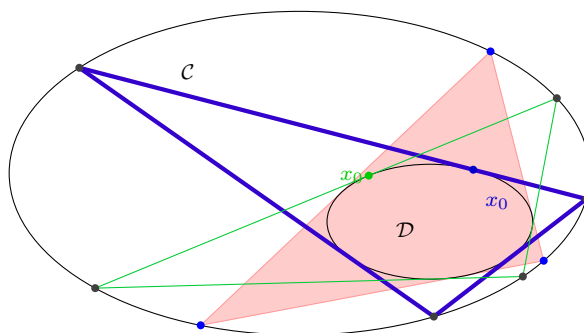


FIGURE A.1 – Un cas d'application du théorème de Poncelet

Une méthode pour démontrer ce théorème consiste à utiliser le lemme suivant :

Lemme. Toute courbe algébrique d'équation $y^2 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ est isomorphe en tant que surface de Riemann à un tore.

Nous présentons ici une preuve de ce lemme fortement inspirée de [21] qui aura recours aux *réseaux* du plan complexe.

A.1 Réseau et équation différentielle associée

A.1.1 Réseau et fonctions elliptiques

Définition 8 (Réseau). Deux nombres complexes non nuls ω_1 et ω_2 tels que ω_1/ω_2 ne soit pas réel permettent de définir un réseau $\Lambda = (\omega_1, \omega_2)$. ω_1 et ω_2 sont appelées périodes du réseau Λ .

On appelle parallélogramme fondamental du réseau le parallélogramme de sommets $0, \omega_1, \omega_2$ et $\omega_1 + \omega_2$.

Définition 9 (Fonction elliptique). Soit f une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . f est une fonction elliptique de période ω_1, ω_2 si

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda, \quad f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$$

Les fonctions constantes sont des exemples triviaux de fonctions elliptiques. Si f et g sont des fonctions elliptiques de périodes ω_1, ω_2 , alors $f + g, f.g, f/g$ (pour g non identiquement nulle) et la dérivée f' sont des fonctions elliptiques de périodes ω_1, ω_2 .

Théorème 10. Soit f une fonction elliptique non constante de périodes ω_1, ω_2 . Alors :

1. f admet des pôles ;
2. la somme des résidus aux pôles de f vaut 0 ;
3. Le nombre de zéros et le nombre de pôles de f sont les mêmes (en comptant un zéro ou un pôle autant de fois que sa multiplicité).
4. Il existe la relation suivante entre les zéros $\{a_i, 1 \leq i \leq r\}$ de f et ses pôles $\{b_i, 1 \leq i \leq r\}$:

$$\sum_{i=1}^r a_i \equiv \sum_{i=1}^r b_i \pmod{\Lambda}.$$

Remarque - Le quatrième point du théorème précédent n'est utilisé que dans la seconde partie de la preuve du théorème de Poncelet.

Il résulte du théorème 10 qu'une fonction elliptique non constante est surjective dans \mathbb{C} et que dans n'importe quel translaté du parallélogramme fondamental du réseau, elle prend chaque valeur un nombre fixe de fois. Ce nombre est appelé ordre de la fonction elliptique.

A.1.2 Fonction de Weierstraß associée à un réseau

Dans ce paragraphe, on définit la fonction de Weierstraß et d'un réseau et on liste ces propriétés principales ainsi que celles de sa dérivée.

Théorème et définition A.1.1 (Fonction de Weierstraß). On définit la fonction de Weierstraß p d'un réseau $\Lambda = \{\omega_1, \omega_2\}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda, \quad p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega} \right)$$

la somme portant sur tous les points ω du réseau distincts de 0.

La démonstration du caractère bien défini de p utilise le lemme suivant :

Lemme 11. Soit Λ un réseau. Alors, pour tout réel $r > 2$,

$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^r} < \infty.$$

Démonstration. Soit $\Lambda = \{\omega_1, \omega_2\}$. Pour tout entier $k \geq 1$, posons :

$$\begin{aligned} A_k &= \{m\omega_1 + n\omega_2, m, n \in \mathbb{Z}, |m| + |n| = k\}; \\ S_k &= \{x\omega_1 + y\omega_2, x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = k\}. \end{aligned}$$

Ces ensembles vérifient les propriétés suivantes :

$$\text{card}(A_k) = 4k; \tag{A.1}$$

$$\text{et } A_k \subset S_k \text{ et } S_k = S_1^k,$$

$$\text{donc en posant } c := \min\{|z|, z \in S_1\} > 0, \quad \forall \omega \in A_k, |\omega| \geq ck, \tag{A.2}$$

On conclut grâce à A.1 et A.2 :

$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^r} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_k} \frac{1}{|\omega|^r} \leq \frac{4}{c^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{r-1}} < \infty$$

□

Théorème 12. 1. La série définissant p converge uniformément sur tout compact ne rencontrant pas Λ , donc p est analytique, avec des pôles de multiplicité 2 en tout point du réseau.

2. p est paire.

3. p est elliptique de périodes ω_1, ω_2 . Donc, d'après le théorème 10 et 1), p est d'ordre 2.

4. $p(z_1) = p(z_2)$ ssi $z_2 \equiv \pm z_1 \pmod{\Lambda}$.

5. p' est une fonction elliptique impaire d'ordre 3.

A.1.3 Equation différentielle vérifiée par la fonction de Weierstraß

Soient $g_2 = g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\omega \neq 0} \omega^{-4}$ et $g_3 = g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\omega \neq 0} \omega^{-6}$. Ces séries sont absolument convergentes d'après le lemme 11.

Théorème 13. La fonction p satisfait l'équation différentielle :

$$p'^2 = 4p^3 - g_2p - g_3. \tag{A.3}$$

Démonstration. Pour $\omega \neq 0$ et $|z| < |\omega|$, la fraction $\frac{1}{(z - \omega)^2}$ se développe en série entière et on a :

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} = \frac{1}{\omega^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \frac{z^n}{\omega^{n+2}} \tag{A.4}$$

Notons $r = \min_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} |\omega|$. En remplaçant $\frac{1}{(z - \omega)^2}$ par son développement dans la définition de la fonction p (théorème et définition A.1.1), on obtient, après calculs, un développement de Laurent pour p :

$$\forall z, 0 < |z| < r, p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (\text{A.5})$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = (n+1) \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{n+2}}. \quad (\text{A.6})$$

Comme p est une fonction paire, pour tout entier naturel $n > 0$, $a_{2n+1} = 0$. Notons, pour tout $n > 1$, $G_n := \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{2n}}$.

En combinant (A.5) et (A.6), on obtient :

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{1}{z^2} + 3G_2 z^2 + 5G_3 z^4 + \dots \\ p'(z) &= \frac{-2}{z^3} + 6G_2 z + 20G_3 z^3 + \dots \\ p^3(z) &= \frac{1}{z^6} + \frac{9G_2}{z^2} + 15G_3 + \dots \\ p'^2(z) &= \frac{4}{z^6} + \frac{-24G_2}{z^2} + (-80G_3) + \dots \end{aligned}$$

On obtient alors

$$p'^2 - 4p^3 + g_2 p = -g_3 + \dots \quad (\text{A.7})$$

Notons h la fonction elliptique du membre de gauche de l'équation (A.7). Les fonctions p et p' sont analytiques sur le parallélogramme fondamental, à l'exception d'un pôle en 0. Ainsi, l'unique pôle éventuel de h sur le parallélogramme fondamental est en 0. Toutefois, le membre de droite de l'équation (A.7) est analytique en 0 : h ne possède donc aucun pôle sur le parallélogramme fondamental et, par le théorème 10, h est une fonction elliptique constante (c'est la contraposée du premier point).

Lorsque z tend vers 0 dans l'équation (A.7), on obtient que la limite de h en 0 est $-g_3$ et donc h est toujours égale à $-g_3$ sur le parallélogramme fondamental. □

Théorème 14. 1. Soient

$$e_1 = p\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = p\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right).$$

Les nombres $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ et $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ et tous les complexes congruant à l'un d'eux modulo Λ sont appelés demi-périodes du réseau, et sont exactement les zéros de p' . De plus, les e_i sont distincts et sont les trois racines de $f(X) := 4X^3 - g_2 X - g_3$.

2. Soit $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Alors $\Delta \neq 0$.

A.1.4 Propriétés des constantes associées à un réseau

Les constantes g_2 et g_3 associées au réseau Λ sont en fait des fonctions de ω_1, ω_2 :

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum' \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4}, \quad g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum' \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6}$$

où \sum' signifie une somme sur tous les couples d'entiers relatifs (m, n) distincts de $(0, 0)$.

Proposition 15. *Les fonctions g_k , $k = 2, 3$, ont les propriétés suivantes :*

1. g_k est homogène de degré $-2k$;
2. soient a, b, c, d des entiers tels que $ad - bc = \pm 1$, alors :

$$g_k(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = g_k(\omega_1, \omega_2).$$

A.2 Existence d'un réseau associé à des constantes

Pour tout réseau Λ , on a défini des quantités $g_2(\Lambda)$ et $g_3(\Lambda)$ qui vérifient $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. On se pose maintenant le problème suivant :

étant donnés deux complexes c_2 et c_3 tels que $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$, existe-t-il un réseau qui ait pour constantes associées c_2 et c_3 ?

La réponse est oui, et la démonstration utilise les propriétés de la fonction modulaire J .

A.2.1 La fonction modulaire J

Pour $\tau \in \mathbb{H}$ et $k=2,3$, soient $g_k := g_k(1, \tau)$ et $\Delta(\tau) := g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)$.

Définition 16 (Fonction modulaire). La fonction modulaire J est définie par :

$$\forall \tau \in \mathbb{H}, \quad J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

La fonction J est bien définie car, par la deuxième proposition du théorème 14, $\Delta(\tau) \neq 0 \in \mathbb{H}$.

Théorème 17. *J est analytique sur \mathbb{H} .*

A.2.2 Le groupe modulaire Γ

Notons \mathbb{H} le demi-plan complexe supérieur $\{\tau / \text{Im}(\tau) > 0\}$.

Soient a, b, c, d entiers vérifiant $ad - bc = 1$ et soit γ définie par :

$$\forall \tau \in \mathbb{H}, \quad \gamma(\tau) = \frac{a\tau + b\tau}{c\tau + d\tau}.$$

\mathbb{H} est stable par γ et l'ensemble Γ des transformations γ telles que définie ci-dessus forme un groupe pour l'opération de composition.

A.2.3 Domaine fondamental pour Γ

Théorème 18. Soit $F = \{\tau / -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1\} \cup \{\tau / -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\tau) \leq 0, |\tau| = 1\}$. Alors F est un domaine fondamental pour Γ .

dessin ?

On appelle sommets de F les points $\rho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\rho + 1$.

Corollaire A.2.1. Tout réseau Λ admet une base ω_1, ω_2 telle que $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in F$.

Théorème A.2.1.

$$\forall \tau \in \mathbb{H}, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad J(\gamma(\tau)) = J(\tau)$$

A.2.4 Développement en série de Fourier de J

Comme $T : \tau \mapsto \tau + 1$ est dans Γ , on déduit du théorème A.2.1 que J est de période 1 sur \mathbb{H} . De plus, J est analytique, donc elle admet un unique développement en une série de Fourier absolument convergente.

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \mathbb{H}, \quad J(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2i\pi n\tau} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \quad \text{où } t = e^{2i\pi\tau}. \end{aligned}$$

Cela permet de déduire un résultat sur le comportement asymptotique (corollaire A.2.2) de J lorsque $\operatorname{Im}(\tau) \rightarrow \infty$, utilisé dans la section suivante pour prouver que J est une bijection de F dans \mathbb{C} .

Lemme 19. 1. Pour τ non entier,

$$\pi \cot(\pi\tau) = \sum_{m \neq 0} \left(\frac{1}{\tau + m} - \frac{1}{m} \right),$$

série convergeant uniformément sur tout compact ne contenant pas d'entier.

2. Les identités suivantes sont vérifiées :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

3. Soit $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$ série convergeant sur le disque unité ouvert $D(0, 1)$. Alors

$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t^n)$ converge uniformément sur tout compact de $D(0, 1)$. g est donc analytique sur $D(0, 1)$, son développement en série entière s'obtenant formellement en additionnant ceux de $f(t)$, $f(t^2)$, etc.

Théorème 20. Pour $\tau \in \mathbb{H}$,

$$J(\tau) = \frac{1}{1728t} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

où $t = e^{2i\pi\tau}$, la série convergeant pour $|t| < 1$.

Corollaire A.2.2. Soit $\tau = x + iy$ tel que $-\infty < x < +\infty$ et $y > 0$, alors

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} tJ(\tau) = \frac{1}{1728}, \quad \text{uniformément en } x.$$

A.2.5 Valeurs prises par J

Théorème 21. J prend chaque valeur complexe une fois et une seule sur F .

Théorème 22. Les égalités :

$$g_2(\rho) = 0, \quad g_3(i) = 0$$

sont vérifiées et sont respectivement équivalentes à

$$J(\rho) = 0, \quad J(i) = 1.$$

A.2.6 Résolution du problème inverse

Théorème 23. Soient c_2, c_3 deux complexes tels que $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$. Alors il existe un unique réseau Λ tel que :

$$\forall k \in \{2, 3\}, \quad g_k(\Lambda) = c_k. \quad (\text{A.8})$$

Démonstration. Par le corollaire A.2.1, tout réseau Λ admet une base $\{\omega, \omega\tau\}$ telle que $\omega \neq 0$ et $\tau \in F$. A.8 se réécrit donc :

$$\forall k \in \{2, 3\}, \quad g_k(\omega, \omega\tau) = c_k. \quad (\text{A.9})$$

On cherche les solutions de (A.9) satisfaisant à $\omega \neq 0$ et $\tau \in F$ en distinguant les cas : $c_2, c_3 \neq 0$, $c_2 = 0$ et $c_3 = 0$. On ne traite ici que le premier cas. Supposons donc $c_2, c_3 \neq 0$.

(A.9) est équivalent au système :

$$\frac{g_2(\omega, \omega\tau)}{g_2(\omega, \omega\tau)^3 - 27g_3(\omega, \omega\tau)^2} = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2}, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{g_3(\omega, \omega\tau)}{g_2(\omega, \omega\tau)} = \frac{c_3}{c_2}. \quad (\text{A.11})$$

lui-même équivalent, par la premier point de la propriété 15, à :

$$J(\tau) = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2}, \quad (\text{A.12})$$

$$\omega^2 = \frac{c_2 g_3(\omega, \omega\tau)}{c_3 g_2(\omega, \omega\tau)}. \quad (\text{A.13})$$

Le théorème 21 permet d'affirmer que (A.12) admet une unique solution $\tau_0 \in F$. $c_2, c_3 \neq 0$, donc $J(\tau) \neq 0, 1$, donc $g_2(\omega, \omega\tau), g_3(\omega, \omega\tau) \neq 0, 1$. Le terme de droite de l'égalité (A.13) est donc non nul. Il admet donc deux racines carrées que l'on note $\pm\omega_0$. $\omega_0, \omega_0\tau$ et $-\omega_0, -\omega_0\tau$ génèrent le même réseau Λ_0 qui est l'unique solution de (A.8). \square

A.3 Preuve du lemme : modèle algébrique d'un réseau

On peut maintenant résoudre le problème initial.

Définition 24 (Courbe elliptique). Une surface de Riemann est appelée courbe elliptique si elle est isomorphe à un tore \mathbb{C}/Λ .

Si on note $\tilde{t}_i := t_i + \Lambda, i \in \{1, 2\}$ les classes de congruence de deux complexes $t_i, i \in \{1, 2\}$, on peut définir une structure de groupe sur \mathbb{C}/Λ pour l'opération dérivant de l'addition sur \mathbb{C} :

$$\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 := t_1 \tilde{=} t_2.$$

L'isomorphisme entre une courbe elliptique \mathcal{S} et un tore \mathbb{C}/Λ permet donc de porter sur \mathcal{S} une structure de groupe héritée de la structure de groupe sur \mathbb{C}/Λ .

Soient a_1, a_2, a_3 trois complexes distincts et $\mathcal{S} = \mathcal{S}(a_1, a_2, a_3)$ la courbe algébrique d'équation $y = \sqrt{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}$. Il s'agit d'une surface de Riemann.

Théorème 25. 1. $\mathcal{S} = \mathcal{S}(a_1, a_2, a_3)$ est une courbe elliptique, c'est-à-dire que \mathcal{S} est isomorphe à un certain réseau \mathbb{C}/Λ .

2. Réciproquement, pour tout réseau Λ , il existe a_1, a_2, a_3 complexes distincts tels que \mathbb{C}/Λ soit isomorphe à $\mathcal{S}(a_1, a_2, a_3)$.

Démonstration. 1) Posons $s = \sum a_i$. Le changement de variables $x = z + s/3, y = w/2$ transforme l'équation $y^2 = \prod (x - a_i)$ en $w^2 = 4 \prod (z - e_i)$ où $e_i = a_i - s/3$. Les e_i sont distincts et vérifient $\sum e_i = 0$. Donc, d'après le théorème 23, il existe un réseau Λ dont la fonction p de Weierstraß vérifie :

$$p'^2 = 4 \prod (p - e_i). \quad (\text{éq})$$

Pour tout $\tilde{t} \in \mathbb{C}/\Lambda$, posons :

$$\phi(\tilde{t}) = (x(t), y(t)) := (p(t) + s/3, p'(t)/2),$$

bien définie puisque, p et p' étant elliptiques sur le réseau Λ , x et y sont constantes sur chaque classe de congruence modulo \tilde{t} . ϕ envoie \mathbb{C}/Λ sur \mathcal{S} , puisque $x(\tilde{t}), y(\tilde{t})$ vérifient l'équation de \mathcal{S} . Montrons que ϕ est un isomorphisme de \mathbb{C}/Λ dans \mathcal{S} , c'est-à-dire :

a. ϕ est surjective ;

b. ϕ est injective ;

c. ϕ est localement conforme en tout point de $\mathcal{C} \setminus \Lambda$.

a) Tout d'abord, $(\infty, \infty) = \phi(\tilde{0})$. Soit maintenant $(x_0, y_0) \in \mathcal{S} \setminus (\infty, \infty)$. Puisque x est surjective à valeurs dans \mathbb{C} et paire, il existe $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ tel que

$$x(t_0) = x(-t_0) = x_0.$$

$$\text{Donc } y^2(t_0) = \prod (x_0 - a_i) = y_0^2, \quad \text{donc } y(t_0) = \pm y_0.$$

Comme y est impaire, on en déduit $\phi(t_0) = (x_0, y_0)$ ou $\phi(-t_0) = (x_0, y_0)$.

Donc ϕ est surjective.

b) Soient \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 tels que $\phi(\tilde{t}_1) = \phi(\tilde{t}_2)$. Cette égalité équivaut à :

$$p(t_1) = p(t_2) \quad (*)$$

$$p'(t_1) = p'(t_2). \quad (**)$$

(*) implique $t_1 \equiv \pm t_2 \pmod{\Lambda}$, d'après le quatrième point du théorème 12.

Supposons $t_1 \equiv -t_2 \pmod{\Lambda}$. p' étant une fonction elliptique impaire, on déduit de (***) que $p'(\tilde{t}_1) = -p'(\tilde{t}_2)$, donc :

- soit $p'(t_2) = 0$, auquel cas, d'après (éq), $t_2 \in \{e_k, k = 1..3\}$, c'est-à-dire que t_2 est une demi-période du réseau (cf. théorème ...);
- soit $p'(t_2) = \infty$ et t_2 est alors t_0 est une période du réseau.

Dans les deux cas, $t_2 \equiv -t_2 \pmod{\Lambda}$, ce qui, avec notre hypothèse $t_1 \equiv -t_2 \pmod{\Lambda}$, donne $t_1 \equiv t_2 \pmod{\Lambda}$.

Donc ϕ est injective.

c) Soit $\phi(\tilde{t}_0) = (x_0, y_0)$. On distinguera trois cas :

- i. (x_0, y_0) est un point régulier, et alors, d'après (éq), $p(t_0) \neq \infty$ et $p'(t_0) \neq 0$ donc t_0 n'est ni une période ni une demi-période du réseau;
- ii. $(x_0, y_0) \in \{(a_1, 0), (a_2, 0), (a_3, 0)\}$, et alors, d'après (éq), $p'(t_0) = 0$ donc t_0 est une demi-période du réseau;
- iii. $(x_0, y_0) = (\infty, \infty)$, et alors, d'après (éq), $p'(t_0) = \infty$ donc t_0 est une période du réseau.

Pour prouver que ϕ est localement conforme en \tilde{t}_0 , on utilise les coordonnées locales suivantes :

- au voisinage de $\tilde{t}_0 : t$;
- au voisinage de (x_0, y_0) , dans le cas (i) : x ; dans le cas (ii) : y ; dans le cas (iii) : x/y .

En terme de coordonnées locales, ϕ s'exprime de la façon suivante :

- i. $x = p(t) + s/3$;
- ii. $y = p'(t)/2$;
- iii. $\frac{x}{y} = \frac{p(t) + s/3}{p'(t)/2}$.

En dérivant ces expressions en $t = t_0$, on obtient :

- i. $x'(t_0) = p'(t_0) \neq 0$;
- ii. $y'(t_0) = p''(t_0)/2 \neq 0$;
- iii. $(x/y)'(t_0) = -1 \neq 0$.

Les inégalités des cas i) et ii) et l'égalité du cas iii) proviennent du fait que les zéros de p' sont exactement les demi-périodes du réseau et de développements limités de p et p' au voisinage de t_0 . Dans les trois cas, ϕ est donc localement conforme en t_0 .

2) Soit $\Lambda = \{\omega_1, \omega_2\}$. La preuve de la partie 1) du théorème montre que $\Lambda = \{\omega_1, \omega_2\}$ est isomorphe à $\mathcal{S}(e_1, e_2, e_3)$, où les e_i sont respectivement les valeurs de la fonction de Weierstraß aux points $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ et $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

□

Annexe B

Projet en M2 MSV

M2 MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES DU VIVANT

Recherche de nourriture par un pollinisateur

Julie FOURNIER - Laure PEDECHES

RAPPORT DE PROJET

Encadrants : Vincent BANSAYE - Emmanuelle PORCHER

Mars 2014

Introduction

Les plantes et les pollinisateurs entretiennent des relations à bénéfices réciproques : les seconds recueillent le pollen des premières tout en permettant sa propagation. Les pollinisateurs sont sélectionnés pour optimiser leur gain d'énergie par unité de temps : il s'agit pour eux de repérer les espèces de plantes ou les individus fournissant le maximum de ressources (nectar ou pollen) et d'effectuer le trajet le plus efficacement possible entre ces plantes.

Pendant notre projet, nous nous sommes concentrées sur le problème suivant : en modélisant le mouvement d'un pollinisateur ainsi que la répartition d'une ou plusieurs fleurs dans un domaine borné, nous avons cherché à déterminer l'impact des paramètres du modèle sur « l'efficacité » d'une abeille partant d'un point donné - sa ruche. Les quantités choisies pour mesurer cette « efficacité » vont bientôt être présentées.

Nous avons tenté de répondre à cette question grâce à la théorie mais, comme cela s'est avéré assez difficile, des simulations nous ont quand même permis d'obtenir des résultats et de pointer les problèmes qu'il serait intéressant d'approfondir.

Notre travail a été encadré par Vincent BANSAYE, chercheur au Centre de Mathématiques Appliquées de l'école Polytechnique et par Emmanuelle PORCHER, chercheuse au Museum National d'Histoire Naturelle ; nous les remercions pour leur aide et leur disponibilité.

Nous commençons par présenter plus en détail le cadre de l'étude et le modèle stochastique choisi pour représenter le mouvement d'un pollinisateur - appelé aussi abeille dans la suite -, du moins celui sur lequel nous sommes le plus attardées : un mouvement brownien plan dilaté avec dérive (ou *drift*).

Nous présentons ensuite les principaux résultats obtenus qui sont des éléments de réponse à deux questions :

- on ne considère qu'une fleur dans le domaine, dont les coordonnées sont soit déterministes, soit aléatoires. Quelle est la probabilité que le pollinisateur visite cette fleur avant un temps fixé ?
- on considère que le domaine est parsemé de plusieurs fleurs, suivant une répartition aléatoire. Quel est le nombre moyen de fleurs visitées avant un temps fixé ?

Ces deux questions sont respectivement traitées dans les deuxième et troisième parties. Dans la dernière partie, nous présentons quelques pistes de recherche qu'il serait intéressant d'approfondir. Nous y évoquons également des améliorations envisageables de notre modèle ainsi que d'autres modèles possibles.

Nos simulations ont été effectuées sur les logiciels **Matlab** (version R2012a) ou son équivalent libre **Scilab** (version 5.3.3). Nous n'avons pas jugé nécessaire de faire figurer nos programmes dans le corps de ce rapport ; certains, représentatifs des types de simulation fréquemment employés lors de notre travail, peuvent être trouvés en annexe.

B.1 Modélisation

B.1.1 Cadre de l'étude

Les pollinisateurs jouent un rôle crucial dans de nombreux phénomènes écologiques, particulièrement dans la... pollinisation, même si cette dernière peut s'effectuer, dans une bien moindre mesure, avec l'assistance du vent ou de l'eau ; leur déclin actuel, dû entre autres à un emploi excessif de pesticides, pourrait avoir des conséquences drastiques sur les productions agricoles dont ils sont des acteurs majeurs.

On s'intéressera ici, en se plaçant dans un espace à deux dimensions, au mouvement d'un pollinisateur partant de sa ruche et cherchant des fleurs, sans prendre en considération ni sa mémoire, fût-elle à court ou à long terme, ni la nature du terrain.

B.1.2 Mouvement de l'abeille

Nous avons modélisé le mouvement de l'abeille $(A_t)_{t \geq 0}$ par un mouvement brownien du plan dilaté par un écart-type σ , partant d'un point $x = (x_1, x_2)$, avec un *drift* (ou dérive) dans la direction $u = (u_1, u_2)$. Ainsi, on suppose qu'il existe un mouvement brownien du plan $(B_t)_{t \geq 0}$ tel que :

$$\forall t \geq 0, \quad A_t = \sigma B_t + tu + x.$$

D'un point de vue écologique, le *drift* peut être interprété comme l'effet d'un vent constant dans une direction u particulière, ou comme une direction privilégiée par l'abeille pour tout autre raison. Pour t grand, il a tendance à éloigner l'abeille de son point de départ plus que de raison.

Instinctivement, la variance σ^2 pourrait être vue comme codant la « vitesse du mouvement brownien », si cela voulait dire quelque chose.

La présence du *drift* a souvent beaucoup compliqué nos recherches théoriques. Il semble que des propriétés du mouvement brownien ne se généralisent pas facilement lorsque l'on ajoute une dérive au mouvement.

Le point de départ, la variance et le *drift* sont les paramètres du mouvement. On s'intéressera aux dépendances entre les probabilités évaluées et ces paramètres.

Le pollinisateur évolue dans un domaine Ω borné (rectangulaire ou circulaire).

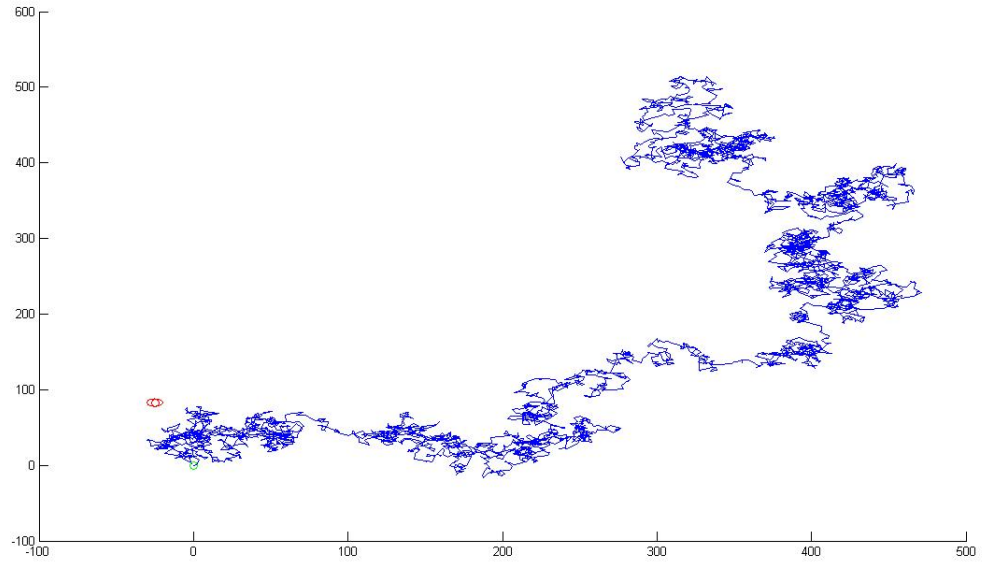
Le domaine contient une ou plusieurs fleurs, chacune entourée d'un « disque d'attraction » - également appelé « disque de détection » - centré en la fleur et de rayon r , constante identique quelle que soit la fleur. D'un point de vue biologique, le rayon de ce disque modélise la distance à laquelle le pollinisateur constate la présence d'une fleur. D'un point de vue mathématique, un mouvement brownien plan atteint presque sûrement un ouvert fixé et il atteint avec probabilité nulle un point donné. Il fallait donc placer chaque fleur dans un ouvert pour qu'elle puisse être « repérée » par le pollinisateur, à cause de notre choix de modèle (et cela correspond en outre davantage à la réalité : une abeille repère une fleur à une certaine distance).

On dira que le pollinisateur « visite » une fleur dès que sa trajectoire entre dans le disque d'attraction de cette fleur. Le temps - noté t - auquel on décide d'arrêter la simulation est appelé durée du mouvement ; c'est aussi un paramètre de notre modèle.

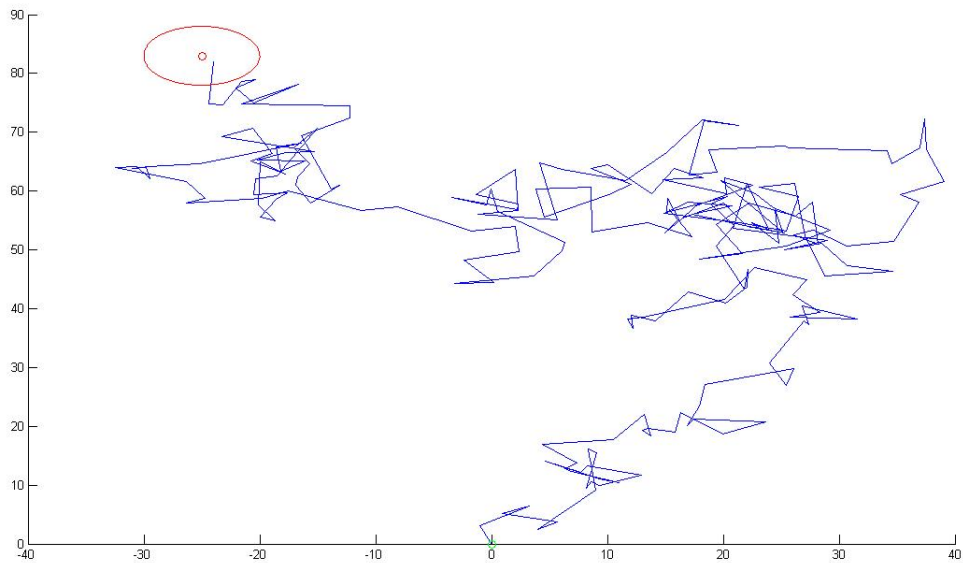
Les simulations du mouvement d'un pollinisateur ont été effectuées en discrétisant le temps avec un pas très petit. Il faut remarquer que cette simulation est imparfaite : en effet, elle ne simule pas le processus choisi pour modéliser le phénomène voulu, puisque celui-ci est continu, et elle peut donc induire des erreurs dans les probabilités calculées

par simulations, en plus de celles liées au nombre fini de simulations (en particulier pour le calcul de probabilités empiriques ou de temps moyen).

Ci-dessous, la simulation d'une trajectoire qui atteint la fleur (en rouge) en partant de la ruche (en vert), et d'une trajectoire qui y échoue (au temps $t = 500$). Ici, la ruche est à l'origine ($x = 0$), le pas vaut 0.1, la fleur est en $(-25, 83)$, $r = 5$, $\sigma = 10$ et $u = (0.5, 1.4)$.



Document B.1 – Trajectoire n'atteignant pas la fleur située en $(-25, 83)$, pour $r = 5$, $\sigma = 10$ et $u = (0.5, 1.4)$.



Document B.2 – Trajectoire atteignant la fleur située en $(-25, 83)$, pour $r = 5$, $\sigma = 10$ et $u = (0.5, 1.4)$.

B.1.3 Ordre de grandeur des paramètres

Rayon du disque d'attraction Un pollinisateur peut repérer une fleur grâce à son odorat ou à sa vue. Dans le premier cas, des expériences ont permis de constater que la détection pouvait se faire à plusieurs centaines de mètres de distance, si le vent soufflait dans la bonne direction. Nous n'avons pas considéré ce type de détection et nous avons seulement pris en compte la détection par la vue qui se fait à quelques centimètres de distance. Ainsi, r est de l'ordre du centimètre. (NB : nombre des simulations présentées par la suite ont été effectuées avec des paramètres plus importants, d'une part par souci de lisibilité des graphiques et d'autre part par ignorance de ce fait (même si les paramètres n'ont pas d'unité ici)).

Durée du mouvement Un pollinisateur, pour butiner, peut quitter son lieu d'habitation pour une durée allant d'une vingtaine de minutes à une heure (voir la figure 1 de [22]). On peut considérer que la durée du mouvement a cet ordre de grandeur, même si, avec notre choix de modèle, nous laissons de côté le problème du retour au point de départ.

Rayon du domaine Il peut être de l'ordre du kilomètre.

B.2 Recherche d'une fleur

B.2.1 Impact des paramètres

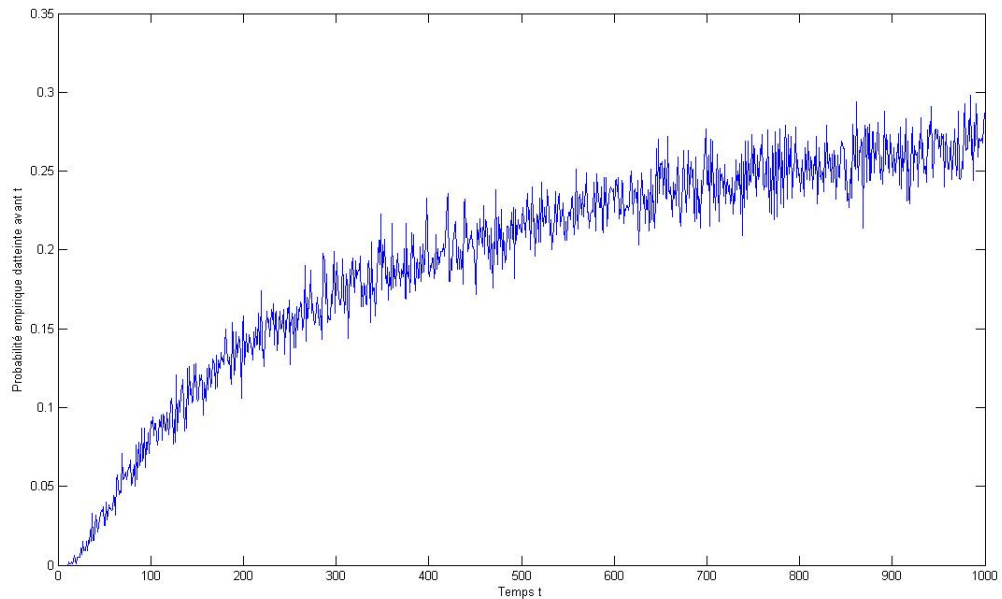
On note T_r le temps d'atteinte du disque d'attraction de la fleur par notre processus. On s'intéresse ici à l'évolution de la probabilité $\mathbb{P}_x(T_r \leq t)$ pour un processus $A_t = \sigma B_t + tu$, en fonction des paramètres du modèle, et de la distribution de la fleur.

Évolution temporelle

On considère ici un processus sans *drift* ($u = 0$), partant de la ruche située à l'origine.

La fleur est fixe, en $(f_1, f_2) = (100, 50)$.

Pour $r = 10$ et $\sigma = 10$, on obtient la courbe suivante (les scripts correspondants sont placés en annexe) :



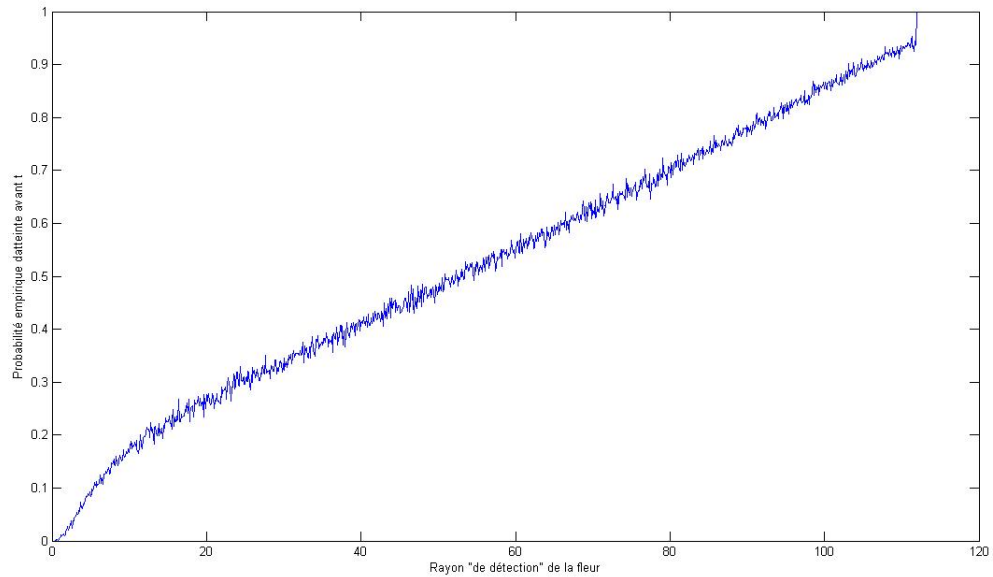
Document B.3 – Évolution temporelle de la probabilité d'atteinte pour $r = 10$, $\sigma = 10$ et la fleur en $(100, 50)$.

Sans surprise, $\mathbb{P}_x(T_r \leq t)$ croît avec le temps, de moins en moins rapidement.

D'autres simulations en introduisant un *drift* ou une distribution aléatoire pour la fleur (uniforme ou normale, par exemple) produisent des résultats similaires.

Impact du rayon de détection de la fleur

Sous les mêmes conditions, on étudie le lien entre la distance r à laquelle la fleur est détectée par l'abeille et la probabilité d'atteinte de cette fleur.



Document B.4 – Évolution de la probabilité d’atteinte en fonction de r pour $\sigma = 10$, $t = 300$ et la fleur en $(100, 50)$.

Ci-dessus, la fleur est située en $f = (100, 50)$, pour $\sigma = 10$, $t = 300$ et la courbe est réalisée à partir de 2000 itérations pour le calcul de la probabilité empirique, avec un incrément de r de 0.1 pour chaque nouveau point. L’évolution semble pseudo-linéaire pour r compris entre 10 et 110 (au-delà, on a atteint presque sûre, car $\|f\| \approx 112$).

Impact de la distance entre fleur et ruche

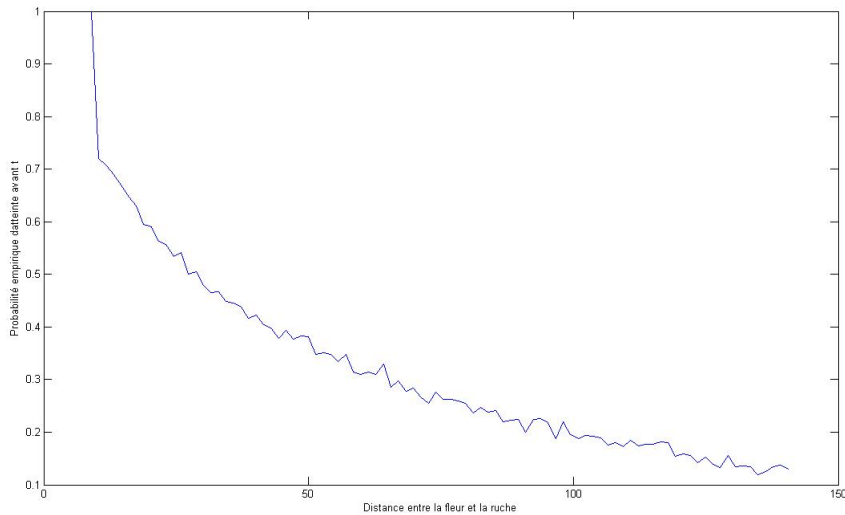
Comme précédemment, le processus est de la forme $A_t = \sigma B_t$ et la fleur est fixe. On fait varier la distance entre l’origine et la position de la fleur, pour un rayon de détection et un instant fixés, à savoir $r = 10$ et $t = 300$.

La courbe ci-dessus est obtenue pour $\sigma = 10$, pour une probabilité empirique obtenue à partir de 2000 itérations.

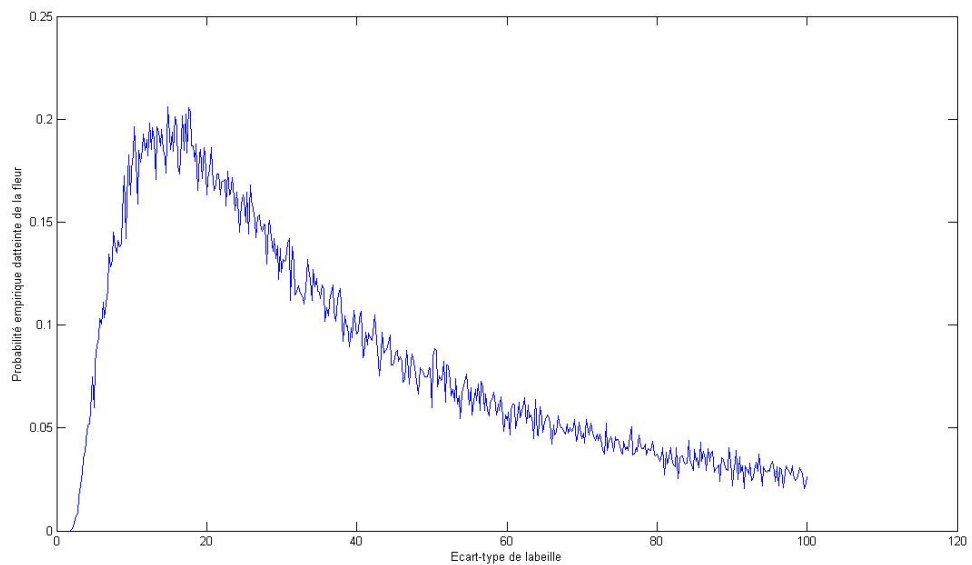
Là encore, l’intuition est confirmée : plus la distance est importante, plus la probabilité que l’abeille atteigne la fleur est faible, avec une diminution rapide dès que la fleur sort du disque $D(0, r)$.

Impact de la variance de l’abeille pour une fleur fixe

Dans un premier temps, on reste dans le cadre d’un mouvement sans dérive ($u = 0$), avec une fleur à position fixe. On s’intéresse à l’évolution de la probabilité d’atteinte de la fleur avant l’instant test choisi en fonction de l’écart-type σ associé au mouvement de l’abeille.



Document B.5 – Évolution de la probabilité d’atteinte en fonction de la distance entre la fleur et la ruche, pour $r = 10$ et $\sigma = 10$.

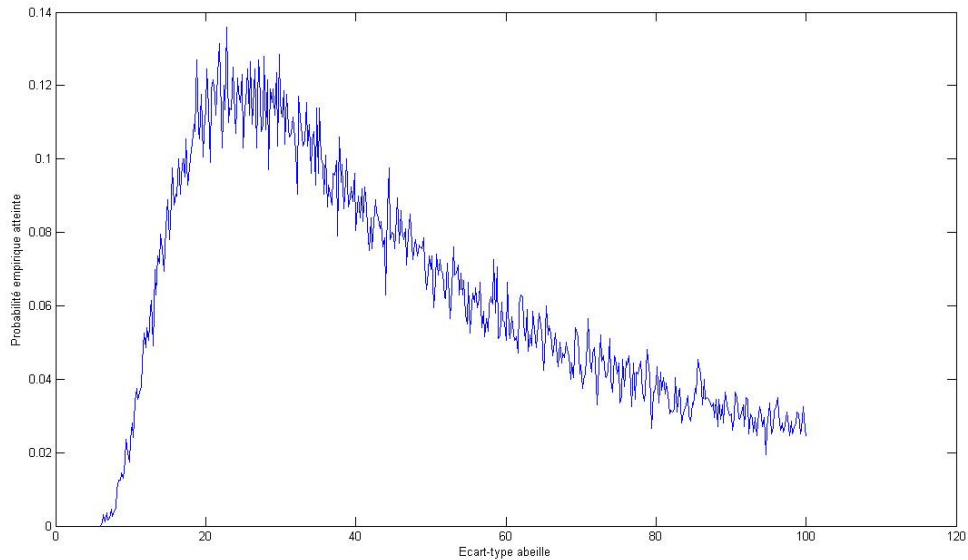


Document B.6 – Évolution de la probabilité d’atteinte en fonction de la variance de l’abeille pour $t = 300$, $r = 10$ et la fleur en $(100, 50)$.

Ici on observe un résultat davantage inattendu, une augmentation violente avec la variance jusqu’à un maximum (ici atteint pour σ entre 15 et 20) après lequel on a une décroissance progressive ; pour des jeux de paramètres différents, l’allure des courbes obtenues reste identique.

Ainsi il y aurait une valeur optimale pour la variance du mouvement de l’abeille pour la détection d’une fleur fixe lorsqu’il n’y a pas de *drift*.

L'introduction d'un *drift*, $u = (1, -2)$, entraîne une altération de la probabilité d'atteinte, selon les directions relatives du *drift* et de la fleur, ainsi qu'un brouillage des données collectées, mais le pic, pour une valeur relativement faible de la variance, reste nettement visible (les paramètres sont les mêmes que lors de la simulation précédente).



Document B.7 – Évolution de la probabilité d'atteinte en fonction de la variance de l'abeille pour $t = 300$, $r = 10$, $u = (1, -2)$ et la fleur en $(100, 50)$.

Dans ce cas précis, on remarque que le pic est atteint pour un écart-type de l'ordre de 25 et que la probabilité d'atteinte maximale est environ réduite de moitié.

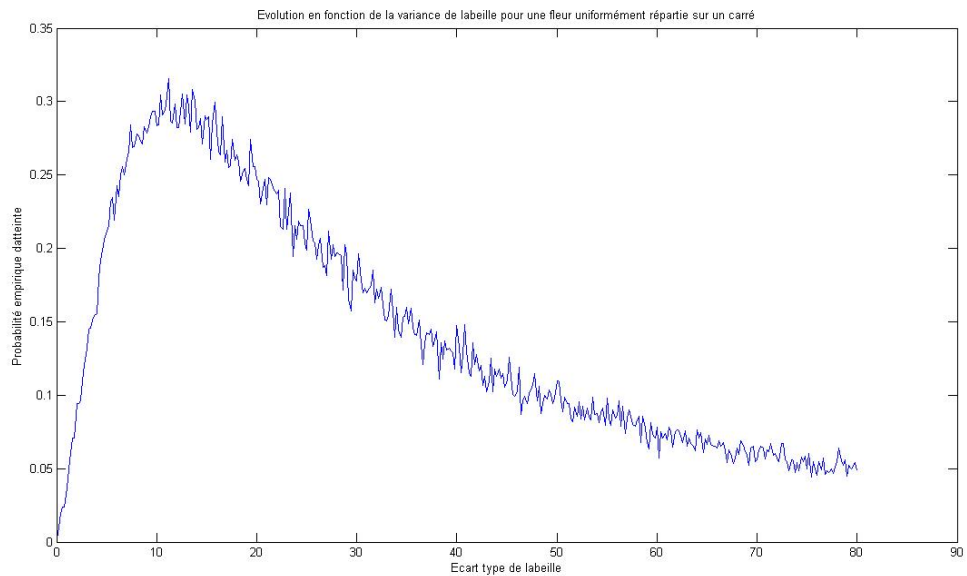
Impact de la distribution de la fleur

Jusqu'ici, on a supposé largement que la fleur était fixée. On va dorénavant lui attribuer une distribution aléatoire.

En particulier, on considérera deux cadres : celui d'une répartition uniforme sur un carré centré en l'origine, et celui d'une répartition gaussienne avec indépendance entre les deux axes.

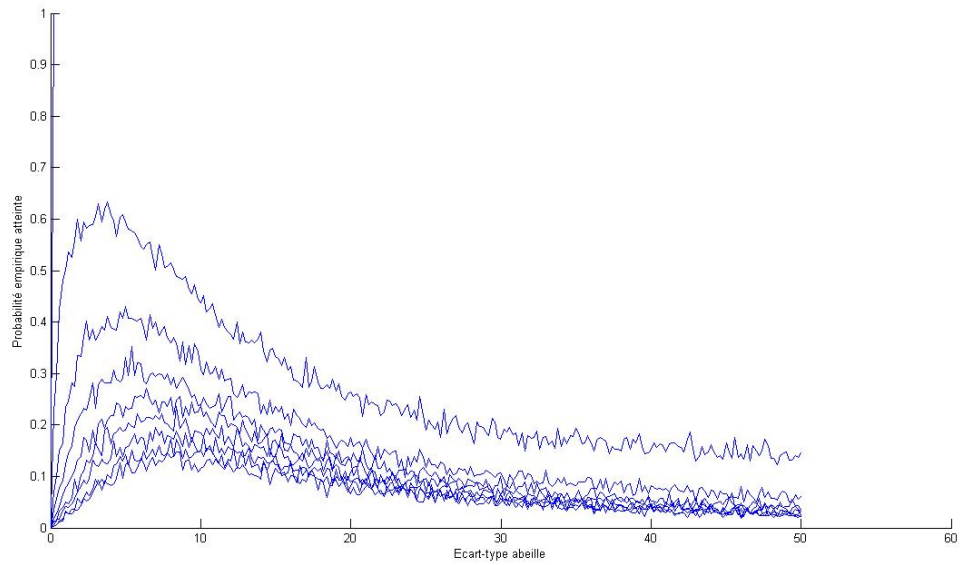
Les évolutions en fonction du temps ou de la distance de détection de la fleur restent semblables aux représentations obtenues plus tôt, tout comme l'allure générale de l'évolution en fonction de la variance de l'abeille, dont on donne un exemple ci-après.

Ici, $u = 0$, $t = 300$, $r = 10$ et la position de la fleur suit une loi uniforme sur le carré de côté $10r$ centré en l'origine.



Document B.8 – Évolution en fonction de la variance de l'abeille de la probabilité d'atteinte pour une distribution uniforme de la fleur et $r = 10$, $t = 300$.

Ce mystérieux pic est toujours présent et on le retrouve également lorsque la distribution de la fleur suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \varphi^2 I_2)$, comme le montrent les courbes superposées ci-dessous, chacune pour une valeur de φ variant par incrément de 10 entre 0 et 80 : plus la variance de la fleur est grande, plus la probabilité empirique d'atteinte est faible, ce qui ne contredit pas l'intuition.

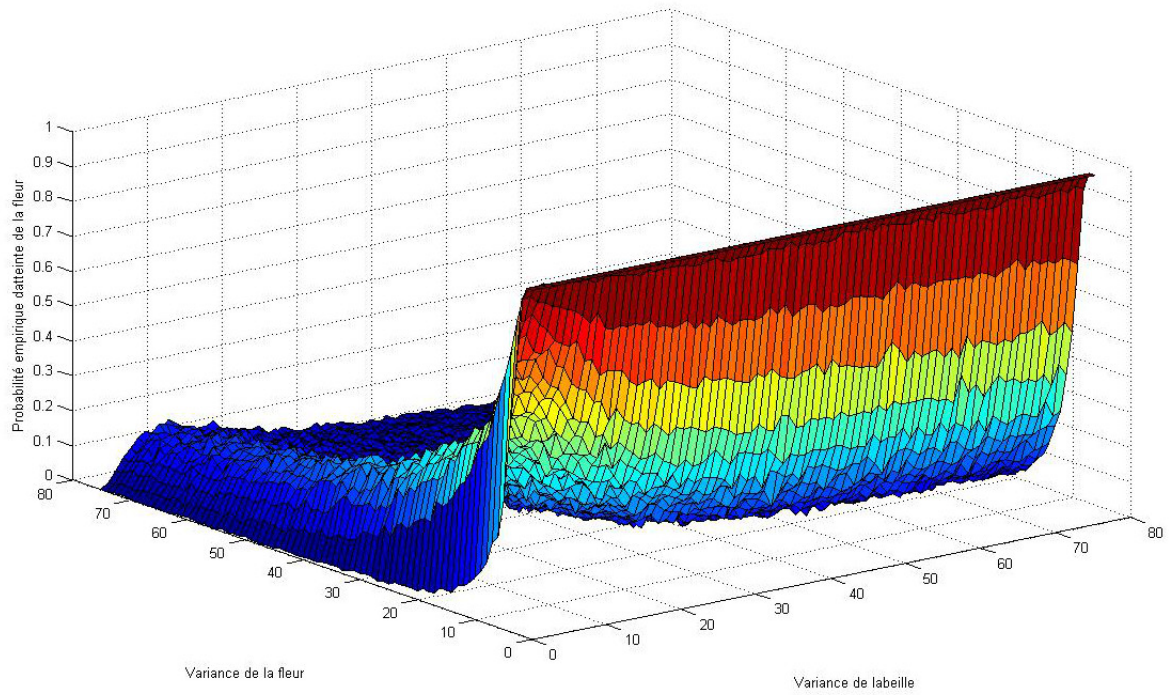


Document B.9 – Évolution en fonction de la variance de l’abeille de la probabilité d’atteinte pour plusieurs valeurs de la variance de la fleur et $r = 10$, $t = 300$.

Alternativement, le graphique suivant (le second est la vue transposée, pour une meilleure clarté), présente la probabilité empirique en fonction des valeurs des écarts-types σ et φ pour $r = 5$, $t = 300$ et 1000 itérations pour le calcul de chaque point.

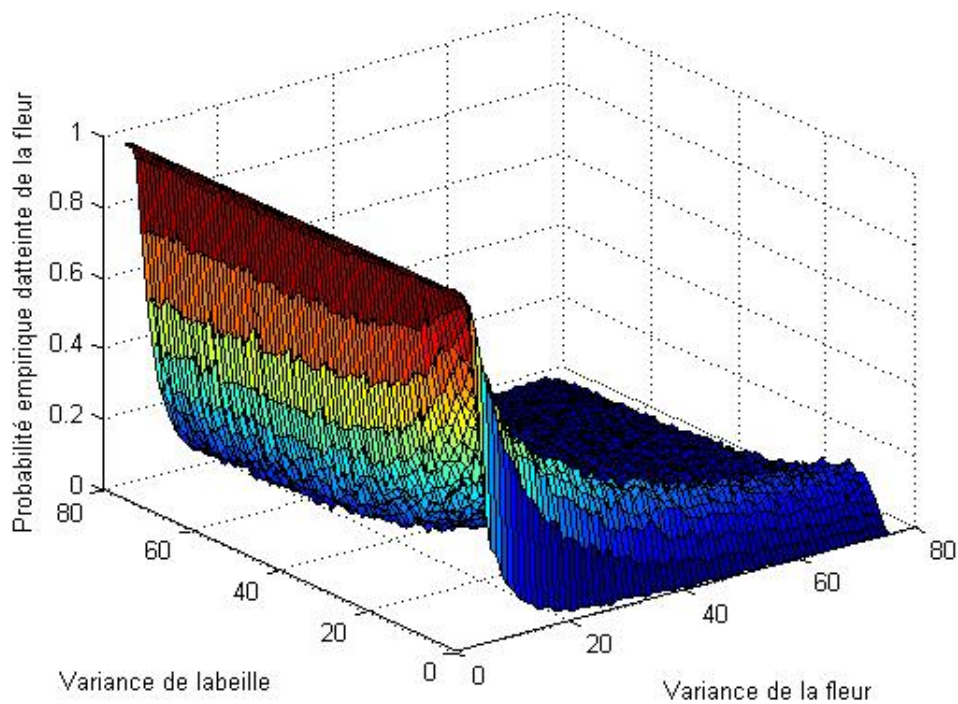
Les scripts permettant sa réalisation se trouvent en annexe.

Pour chaque valeur de φ , un maximum semble être atteint pour une certaine valeur de σ , située dans ce cas précis entre 10 et 20. Il ne semble pas y avoir de corrélation entre les valeurs des variances σ^2 et φ^2 , et donc pas de valeur optimale pour l’une connaissant l’autre.

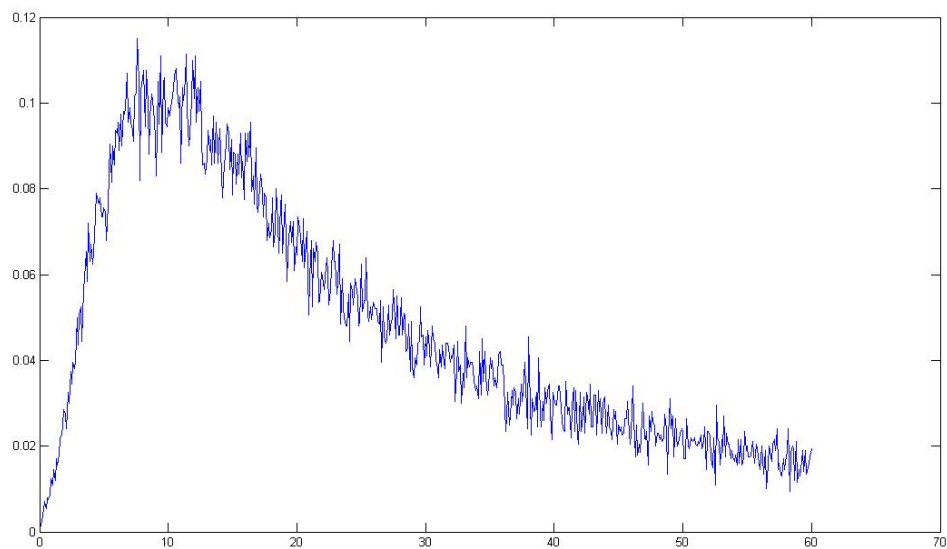


Document B.10 – Évolution en fonction de la variance de l'abeille et de la variance de la fleur pour $r = 5$ et $t = 300$.

Pour une loi normale non centrée, $\mathcal{N}(m, \varphi^2 I_2)$, avec ici $m = (20, -15)$:



Document B.11 – Évolution en fonction de la variance de l'abeille et de la variance de la fleur pour $r = 5$ et $t = 300$.



Document B.12 – Évolution de la probabilité d'atteinte avant $t = 300$ en fonction de la variance de l'abeille pour une fleur suivant une loi normale non centrée, de moyenne $(20, -15)$.

B.2.2 Quelques résultats théoriques dans le cas d'une dérive nulle

Cette partie regroupe quelques résultats théoriques sur les temps d'atteinte du processus stochastique de notre modèle, lorsque ce dernier a une dérive nulle. Dans un pre-

mier temps, on prouve quelques résultats. Dans un second temps, on exploite le contenu d'un article proposant l'expression d'une densité approchée pour le temps d'arrêt T_1 .

Dans les trois paragraphes suivants, les paramètres de notre processus (A_t) sont une dérive $u = (0, 0)$ et une variance σ^2 quelconque. On fait également des hypothèses sur le domaine et la position de la fleur, située en 0 , au centre d'un disque d'attraction de rayon r , et au centre du domaine $D(0, R)$. Le point de départ x de l'insecte vérifie $r < \|x\| < R$.

En plus de $T_r = \inf \{t \geq 0 / \|A_t\| = r\}$, on introduit les temps d'arrêt suivants : $T_R := \inf \{t \geq 0 / \|A_t\| = R\}$ le temps d'atteinte de la frontière du domaine et $T_{inf} = \inf(T_R, T_r)$.

Espérance du temps de sortie du domaine

On note encore (B_t) le mouvement brownien en dimension 2 intervenant dans la définition de notre modèle. Commençons par donner une expression du temps moyen de sortie du domaine.

Soit $W_t = \|A_t\|^2 - 2\sigma^2 t$. Montrons que $(W_t)_{t \geq 0}$ est une martingale. On décompose notre mouvement brownien à deux dimensions selon ses coordonnées dans la base canonique de \mathbb{R}^2 : $(B_t) = ((B_1)_t, (B_2)_t)$. $(B_1)_t$ et $(B_2)_t$ sont deux mouvements browniens standards indépendants.

$$\begin{aligned} W_t &= (A_1)_t^2 + (A_2)_t^2 - 2\sigma^2 t \\ &= (\sigma(B_1)_t + x_1)^2 + (\sigma(B_2)_t + x_2)^2 - 2\sigma^2 t \\ &= \sigma^2((B_1)_t^2 - t) + \sigma^2((B_2)_t^2 - t) + 2\sigma x_1(B_1)_t + 2\sigma x_2(B_2)_t + x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

On reconnaît ici une somme de martingales : $(B_1)_t$ et $(B_2)_t$ sont bien sûr des martingales et on montre facilement que $((B_1)_t^2 - t)$ et $((B_2)_t^2 - t)$ aussi. On en déduit que (W_t) est une martingale et on lui applique le théorème d'arrêt, T_R étant fini presque sûrement, par propriété de récurrence du mouvement brownien en dimension 2. On obtient :

$$\mathbb{E} [\|A_{T_R}\|^2 - 2\sigma^2 T_R] = \mathbb{E} [W_0]$$

ce qui donne :

$$\mathbb{E} [T_R] = \frac{R^2 - \|x\|^2}{2\sigma^2}.$$

Probabilité d'atteindre la frontière du domaine avant de visiter la fleur

Les démonstrations des résultats suivants sont basées sur l'utilisation de martingales qui sont des fonctions bien trouvées du processus d'intérêt, et sur l'application du théorème d'arrêt à ces martingales.

La formule d'Itô montre que la norme $(\rho_t)_{t \geq 0}$ de $(B_t)_{t \geq 0}$, où (B_t) est un mouvement brownien en dimension 2, vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\forall t > 0, \quad d\rho_t = d\beta_t + \frac{1}{2} \frac{dt}{\rho_t},$$

où (β_t) est un mouvement brownien standard.

En appliquant la formule d'ITÔ à une fonction f de classe \mathcal{C}^2 bornée sur \mathbb{R}^+ et aux dérivées bornées (ou de classe \mathcal{C}^2 et telle que la formule ait un sens), on obtient :

$$\forall t > 0, \quad df(\rho_t) = f'(\rho_t)d\beta_t + \frac{1}{2} \frac{f'(\rho_t)}{\rho_t} dt + \frac{1}{2} f''(\rho_t) dt.$$

La fonction \ln est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{f'(x)}{x} + f''(x) = 0.$$

On en déduit que $(U_t) := (\ln(\rho_t))$ est une martingale. On lui applique le théorème d'arrêt, T_{\inf} étant un temps d'arrêt borné p.s. :

$$\mathbb{E}[U_T] = \mathbb{E}[U_0],$$

$$\text{soit } P(T_r < T_R) \ln(r) + P(T_r \geq T_R) \ln(R) = \ln(\|x\|),$$

$$\text{et donc } P(T_r < T_R) = \frac{\ln(\|x\|/R)}{\ln(r/R)}.$$

Espérance de T_{\inf}

Cette fois, remarquons que la fonction $h : y \mapsto -\frac{y^2}{2} + \frac{r^2 \ln(R/y) + R^2 \ln(y/r)}{2 \ln(R/r)}$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{h'(x)}{2x} + \frac{1}{2} h''(x) = -1 \quad \text{avec les conditions } h(r) = h(R) = 0.$$

Cela permet d'exhiber une autre martingale fonction de notre processus d'intérêt : $(V_t) := (h(\rho_t) + t)$. En appliquant le théorème d'arrêt à (V_t) pour le temps d'arrêt T_{\inf} , on obtient :

$$\mathbb{E}[T_{\inf}] = -\frac{\|x\|^2}{2} + \frac{r^2 \ln(R/\|x\|) + R^2 \ln(\|x\|/r)}{2 \ln(R/r)}.$$

Exploitation des résultats portant sur la densité approchée

Dans [23], les auteurs proposent une approximation de la densité du temps d'atteinte de la boule unité par un processus de Bessel en dimension 2.

Ceci équivaudrait, dans la situation qui nous intéresse, à avoir une fleur à l'origine, au centre d'un cercle de rayon 1.

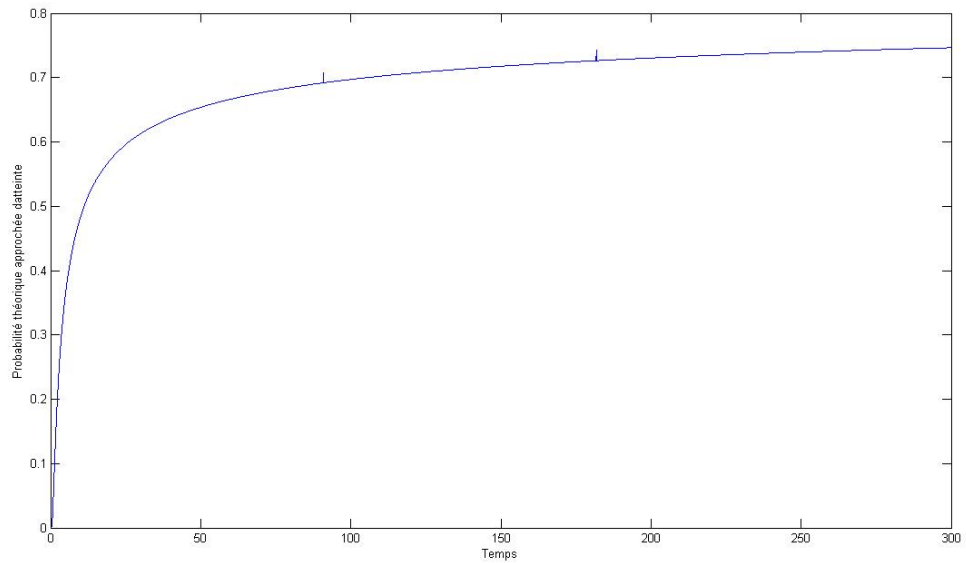
Si le processus part d'une distance $u > 1$ de l'origine, pour tout $t > 0$, cette densité vérifie :

$$q_u(t) \approx \frac{\sqrt{u+t}(u-1)(1+u)e^{-(u-1)^2/2t}}{ut^{3/2}(1+\ln(1+t/u))(1+\ln(t+u))}$$

où $f \approx g$ signifie qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que $c_1 \leq f/g \leq c_2$.

En notant T_a le temps d'atteinte du cercle de centre l'origine et de rayon a , on obtient pour un processus de Bessel issu d'un mouvement brownien,

$$\mathbb{P}_u(T_1 \leq t) \approx \int_0^t q_u(s) ds$$



Document B.13 – Évolution temporelle de la probabilité d’atteinte théorique approchée, pour $u = 3$.

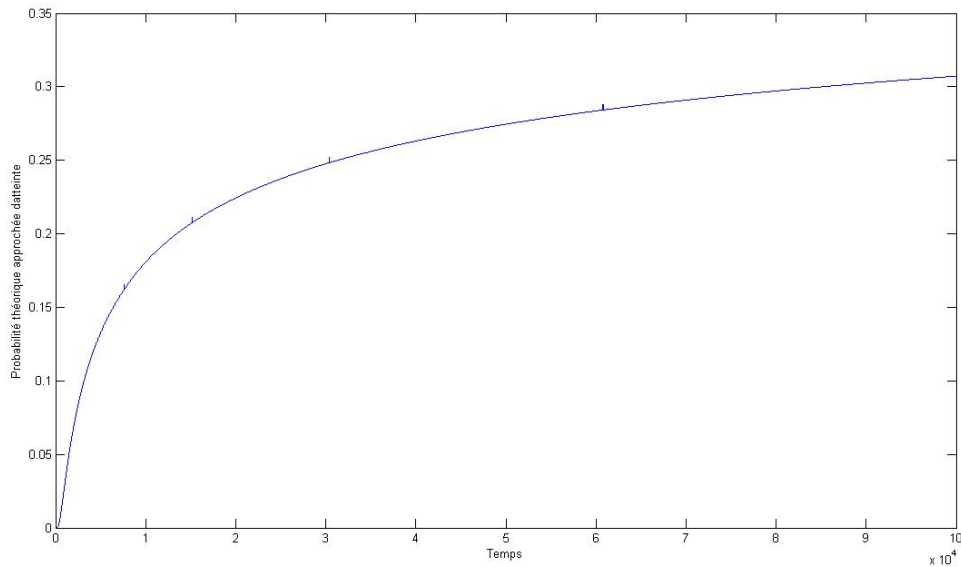
On peut alors tracer l’évolution de la quantité ci-dessus en fonction du temps (ici, $u = 3$).

En utilisant la propriété d’échelle du processus de Bessel, rappelée dans [23], on obtient une formule adaptée pour un processus de Bessel issue d’un mouvement brownien de variance σ^2 et une boule centrée à l’origine de rayon r .

Ainsi,

$$\mathbb{P}_u(T_r \leq t) \approx \int_0^{t\sigma^2/r^2} q_{u\sigma/r}(s) ds.$$

L'évolution temporelle de la probabilité d'atteinte a une allure similaire :



Document B.14 – Évolution temporelle de la probabilité d'atteinte théorique approchée, pour $u = 50$, $r = 10$ et $\sigma = 10$.

A partir de ce résultat, des tentatives d'étude d'impact de la variance du mouvement brownien sur la probabilité d'atteinte se sont avérées infructueuses; il est possible que les constantes validant l'approximation varient avec des paramètres tels que l'écart-type σ ou le rayon r du cercle de détection de la fleur.

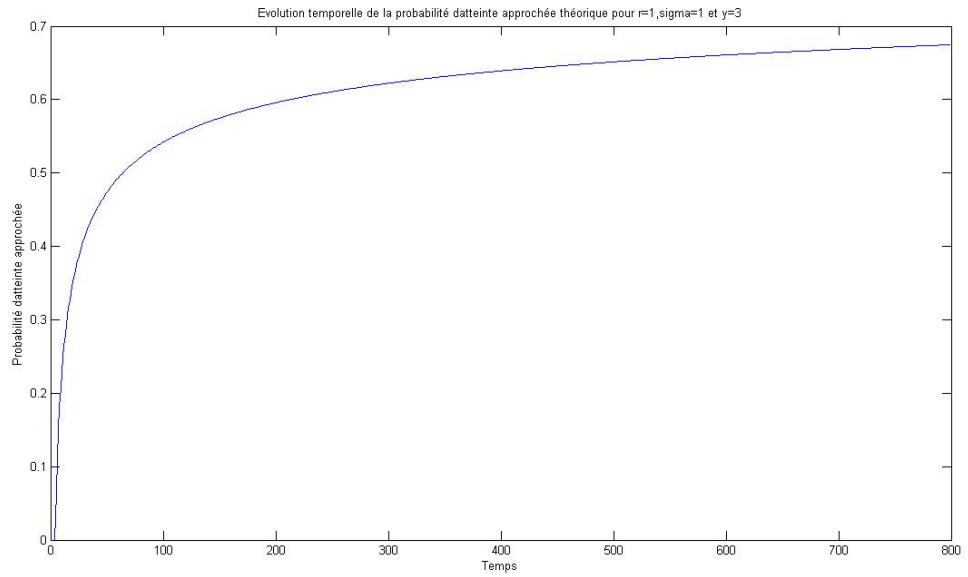
Un autre résultat, conséquence du premier, est donné plus loin dans l'article [23], à propos de la probabilité de l'événement complémentaire : pour un mouvement brownien standard, et la boule unité,

$$\mathbb{P}_u(T_1 > t) \approx \min\left(1, \frac{\ln(u)}{\ln(1 + \sqrt{t})}\right)$$

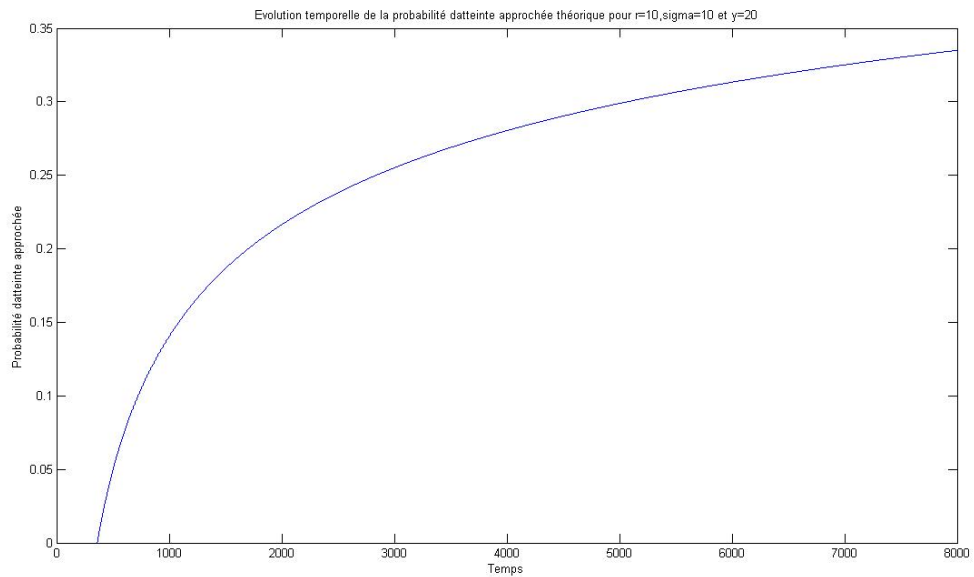
Comme précédemment, ce résultat s'étend pour σ et r positifs quelconques :

$$\mathbb{P}_u(T_r > t) \approx \min\left(1, \frac{\ln(u\sigma/r)}{\ln(1 + \sigma/r\sqrt{t})}\right)$$

Les courbes obtenues sont comparables, si ce n'est que pour une variance et un rayon différents de 1, pour t petit, la probabilité d'atteinte obtenue est nulle; en fait la probabilité approchée est nulle si $\sqrt{t} < x - r/\sigma$.

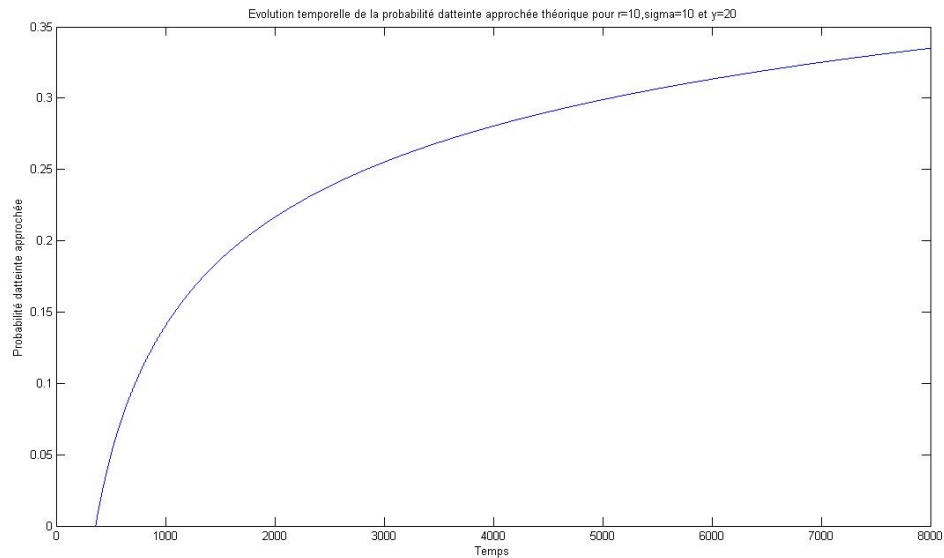


Document B.15 – Évolution temporelle de la probabilité d'atteinte théorique approchée, pour $u = 3$, $r = 1$ et $\sigma = 1$.



Document B.16 – Évolution temporelle de la probabilité d'atteinte théorique approchée, pour $u = 20$, $r = 10$ et $\sigma = 10$.

L'évolution de cette « probabilité approchée » en fonction de l'écart-type donne le graphe suivant.



Document B.17 – Évolution de la probabilité d'atteinte théorique approchée en fonction de l'écart-type de l'abeille, pour $u = 20$ et $r = 10$.

Par ailleurs, il ne semble pas évident d'obtenir une approximation analogue dans le cas d'un brownien avec *drift* pour un des deux résultats précédents.

Le pic caractéristique observé dans l'évolution de la probabilité d'atteinte $\mathbb{P}_x(T_r \leq t)$ en fonction de la variance du processus modélisant le déplacement de l'abeille reste inexpliqué ; peut-être est-il dû à une erreur de programmation dans un des scripts.

B.3 Nombre de fleurs visitées avant un temps fixé

B.3.1 Modèle pour la répartition des fleurs

Dans cette partie, nous considérons un domaine qui contient non une seule fleur mais plusieurs. Les coordonnées des fleurs dans $\Omega = D(0, R)$ sont la réalisation d'un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda \mathcal{L}$, où \mathcal{L} est la mesure uniforme sur Ω et λ un réel positif. La trajectoire du pollinisateur part du point $x = 0$.

Pour la simulation des fleurs dans Ω , la technique habituelle, mise en œuvre dans le programme `domaine_poisson` figurant au document B.31 en annexe, consiste à simuler la réalisation d'une variable de Poisson de paramètre λ . On obtient un entier N et on simule ensuite par acceptation-rejet la réalisation de N variables aléatoires de loi uniforme sur Ω .

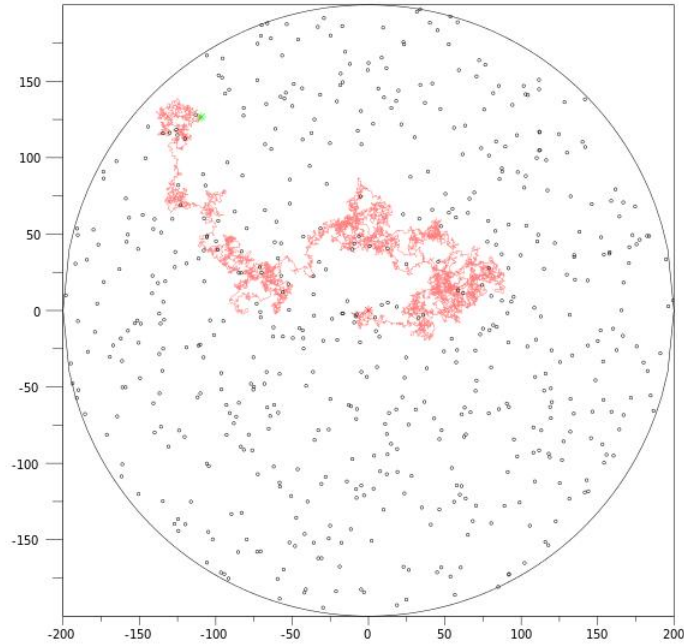
Le programme `volplusieurs` figurant au document B.32 en annexe admet pour arguments d'entrée les coordonnées de fleurs localisées dans $D(0, R)$ ainsi que les paramètres du mouvement du pollinisateur et simule une trajectoire du pollinisateur en comptant le nombre de fleurs visitées. Cela est fait en stockant les indices des fleurs non visitées dans un vecteur. À chaque itération, si le pollinisateur se retrouve dans le disque d'attraction d'une fleur dont l'indice figure dans le vecteur, celui-ci est supprimé du vecteur. Une fleur visitée strictement plus d'une fois n'est comptée qu'une seule fois. Cela se justifie d'un point de vue biologique car on constate que les pollinisateurs évitent de visiter deux fois la même fleur - stratégie effectivement plus efficace puisqu'après un passage, une fleur à nectar est vidée de son nectar et une fleur à pollen est au moins partiellement vidée de son pollen.

En ajoutant quelques lignes à ce programme, on obtient le tracé de la trajectoire simulée sur un domaine de rayon choisi.

Sur la simulation du document B.18, les coordonnées des fleurs sont la réalisation d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 600$ sur un domaine de rayon $R = 200$, le rayon d'attraction est $r = 1$. Le processus décrivant le mouvement a un écart-type $\sigma = 10$ et une dérive dans la direction $u = (1, 1)$. La durée du mouvement est fixée à $t = 100$. Sur cette simulation, le nombre de fleurs visitées est de 75 sur un nombre total qui se trouve être $N = 600$, soit une proportion de 12,5 pour cent.

Le modèle choisi pour le mouvement du pollinisateur ne contraint pas la trajectoire à rester dans le disque $D(0, R)$ où se trouvent les fleurs - ce qui n'est sans doute pas très réaliste. Voir par exemple la simulation du document B.19, lancée avec les paramètres d'entrée $R = 100$, $r = 1$, $\lambda = 300$, $\sigma = 10$, $u = (5, 0)$ et $t = 100$.

Enfin, un dernier programme combine les deux précédents. Les arguments d'entrée sont le rayon du domaine, l'intensité du processus de Poisson pour la répartition des fleurs, les paramètres du mouvement du pollinisateur et la durée du mouvement. A chacune des 100 itérations, on simule grâce au programme `domaine_poisson` un domaine comportant un certain nombre de fleurs, puis on simule la trajectoire du pollinisateur sur ce domaine et on compte la proportion de fleurs visitées grâce au programme `volplusieurs`. On obtient ainsi en sortie l'espérance empirique de la proportion de fleurs visitées avant un temps fixé.



Document B.18 – Un exemple de simulation. Les paramètres choisis sont : $R = 200$, $r = 1$, $\lambda = 600$, $\sigma = 10$, $u = (1, 1)$, $t = 100$. 75 fleurs sont visitées sur les $N = 600$ présentes.

B.3.2 Influence des paramètres

On cherche à évaluer l'influence de l'intensité λ du processus de répartition des fleurs, des paramètres du mouvement (variance et dérive) et de la durée du mouvement.

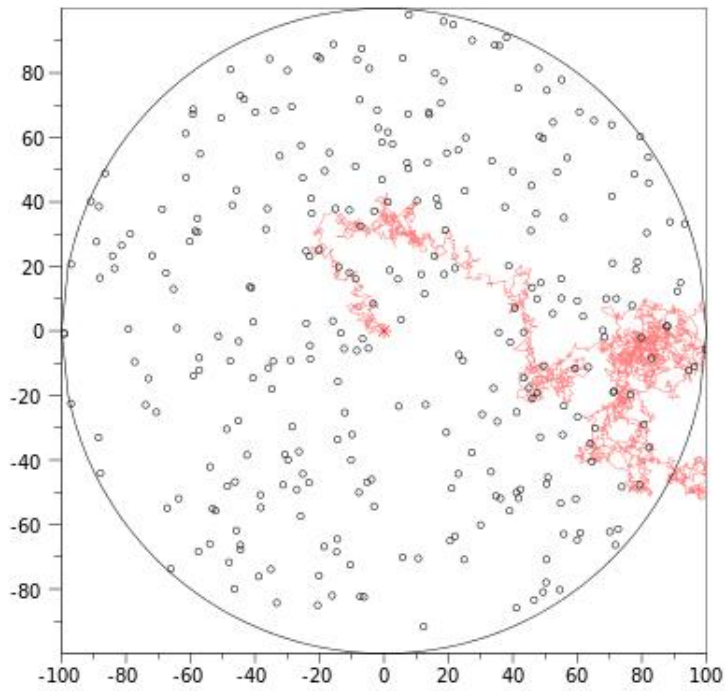
Influence de la durée du mouvement

Les paramètres choisis pour le tracé du document B.20 sont les suivants :

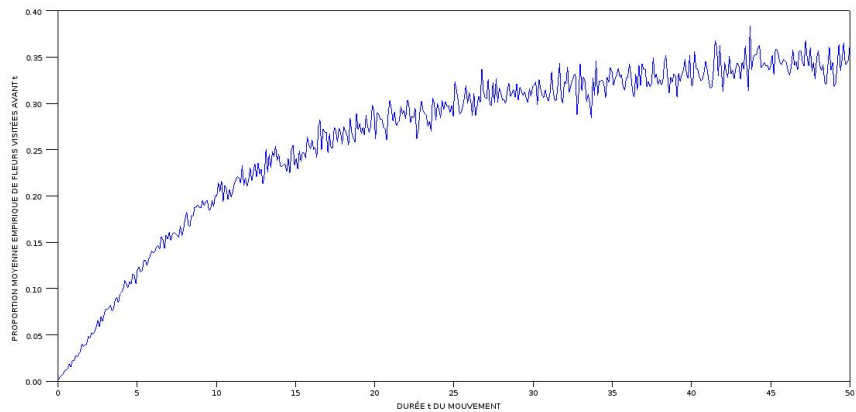
- paramètres liés au domaine : un rayon $R = 50$, un rayon d'attraction $r = 2$, un nombre moyen de fleurs $\lambda = 100$,
- paramètres liés au mouvement : un écart-type $\sigma = 10$ et une dérive $u = (-0.3, -0.5)$.

On sait avant d'effectuer ce tracé que la version théorique de cette courbe est croissante, donc l'allure de la courbe empirique n'est pas étonnante. Lorsque t tend vers $+\infty$ on sait également que la limite de la version théorique de cette courbe doit être 1, mais la plage choisie pour le tracé de la courbe empirique ne permet pas de le voir. L'espérance empirique de la proportion de fleurs visitées semble augmenter plus rapidement au voisinage de 0 que pour des valeurs de la variable t plus élevées.

L'allure de cette courbe est proche de celle du document B.3 représentant la variation en fonction de la durée du mouvement de la probabilité empirique d'atteindre une fleur présente sur le domaine.



Document B.19 – Un autre exemple de simulation. Les paramètres choisis sont : $R = 100$, $r = 1$, $\lambda = 300$, $\sigma = 10$, $u = (5, 0)$ et $t = 100$.



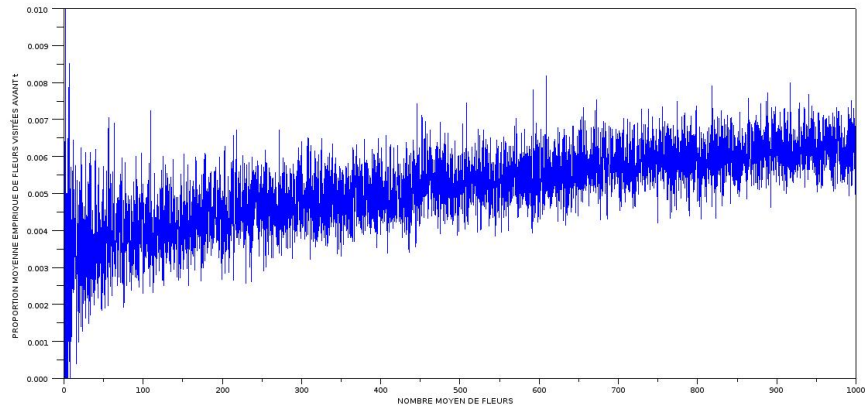
Document B.20 – L'espérance empirique de la proportion de fleurs visitées en fonction de la durée du mouvement. Les paramètres choisis sont : $u = (-0.3, -0.5)$, $\sigma = 10$, $R = 50$, $r = 2$, $\lambda = 100$.

Influence du nombre moyen de fleurs

- Les paramètres choisis pour le tracé du document B.21 sont les suivants :
- paramètres liés au domaine : un rayon $R = 1000$, un rayon d'attraction $r = 1$

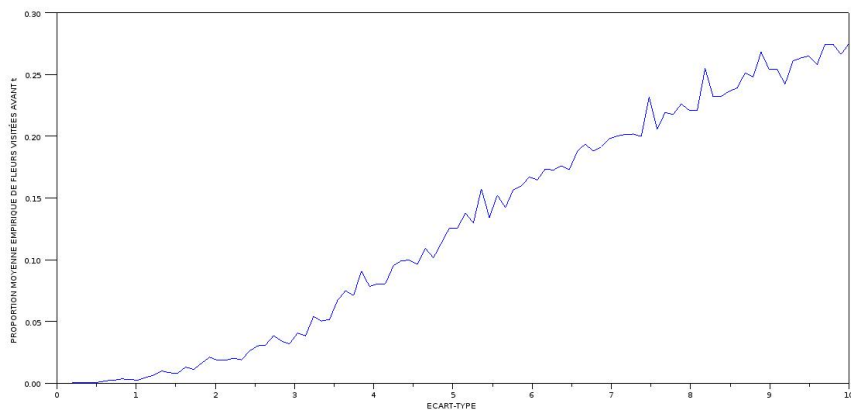
- paramètres liés au mouvement : un écart-type $\sigma = 10$ et une dérive $u = (0, 0)$;
- durée du mouvement : $t = 100$.

On voit que l'espérance de la proportion de fleurs visitées a tendance à croître avec le nombre moyen de fleurs dans le domaine, ce qui est tout à fait attendu. La croissance est relativement rapide quand la variable λ est proche de 0, et ralentit lentement quand λ augmente.



Document B.21 – L'espérance empirique de la proportion de fleurs visitées en fonction du nombre moyen de fleurs. Les paramètres choisis sont : $u = (0, 0)$, $\sigma = 10$, $R = 1000$, $r = 1$, $t = 100$.

Influence de la variance



Document B.22 – L'espérance empirique de la proportion de fleurs visitées en fonction de l'écart-type. Les paramètres choisis sont : $u = (0, 0)$, $R = 100$, $r = 1$, $\lambda = 100$, $t = 100$.

Les paramètres choisis pour le tracé du document B.22 sont les suivants :

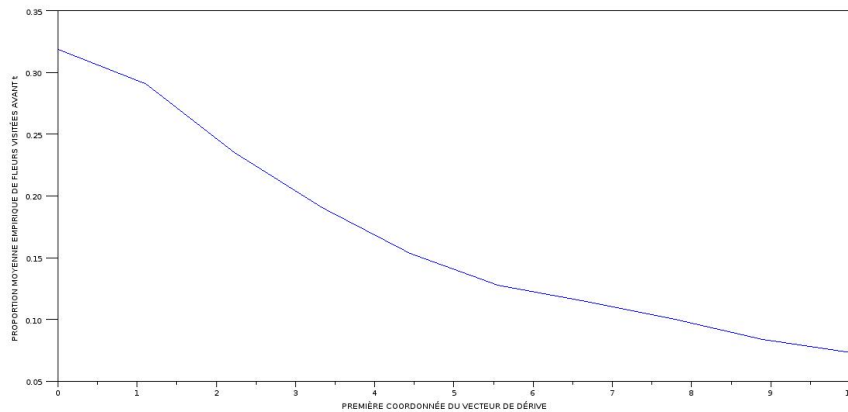
- paramètres liés au domaine : un rayon $R = 100$, un rayon d'attraction $r = 1$ et une intensité du processus ponctuel de Poisson de répartition des fleurs $\lambda = 100$;

- paramètres liés au mouvement : une dérive $u = (0, 0)$;
- durée du mouvement : $t = 100$.

La courbe a une tendance croissante. On imagine bien, en effet, qu'une variance plus grande, en augmentant l'amplitude du mouvement, permet l'exploration d'un plus grand domaine et donc la découverte de davantage de fleurs.

On peut faire l'hypothèse que la version théorique de la courbe aurait une tangente horizontale en l'origine et qu'elle présenterait en point d'inflexion en un point d'abscisse $a \in]0, 10[$ (dérivée seconde positive sur $[0, a]$, négative sur $[a, 10]$).

Influence de la dérive



Document B.23 – L'espérance empirique de la proportion de fleurs visitées en fonction de la composante horizontale du vecteur de dérive. Les paramètres choisis sont : $\sigma = 10$, $R = 100$, $r = 1$, $\lambda = 1000$, $t = 100$.

Les paramètres choisis pour le tracé du document B.23 sont les suivants :

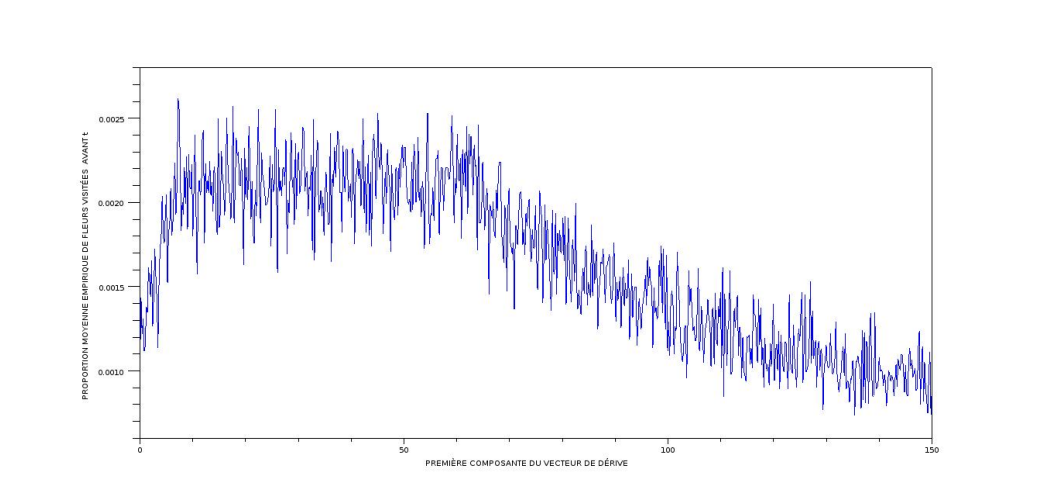
- paramètres liés au domaine : un rayon $R = 100$, un rayon d'attraction $r = 1$ et une intensité du processus ponctuel de Poisson de répartition des fleurs $\lambda = 1000$;
- paramètres liés au mouvement : un écart-type $\sigma = 10$ et une composante verticale nulle du vecteur de dérive : $u_2 = 0$;
- durée du mouvement : $t = 100$.

On obtient une courbe décroissante. Cela peut s'expliquer par le fait qu'une dérive importante entraîne le pollinisateur à l'extérieur du domaine où se trouvent les fleurs. Ce résultat n'est pas très intéressant et est lié au choix du modèle. Pour éviter ce problème de sortie du domaine d'intérêt, il faudrait augmenter le rayon du domaine et le nombre moyen de fleurs mais cela entraîne une augmentation importante du nombre de calculs demandés à l'ordinateur.

Pour pallier ce problème, on change la forme du domaine : Ω est maintenant un rectangle symétrique par rapport à l'axe des abscisses et dans le cas que l'on va présenter ci-dessous, « couché sur sa longueur » ; sa longueur est notée b , sa largeur est a et un troisième paramètre, d , décrit son décalage algébrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ce domaine semble plus propice à l'étude de l'impact d'un *drift* ayant pour direction l'axe des abscisses qu'un domaine circulaire centré en zéro. En effet, le *drift* privilégiant

une certaine direction et un sens pour la trajectoire, une trajectoire avec dérive n'explore qu'une partie réduite du disque et même, comme on l'a vu, risque de sortir du disque dans un endroit où il n'y a plus de fleurs. En outre, la simulation d'un grand nombre de fleurs est coûteuse en temps de calcul, il est donc préférable qu'elles soient simulées dans un domaine susceptible d'être visité.

On lance donc le même programme que précédemment, sauf que le domaine de simulation de processus de Poisson est maintenant un rectangle caractérisé par les paramètres a , b , d présentés précédemment.



Document B.24 – L'espérance empirique de la proportion de fleurs visitées en fonction de la composante horizontale du vecteur de dérive. Les paramètres choisis sont : $\sigma = 3$, $a = 200$, $b = 1000$, $d = -100$, $r = 3$, $\lambda = 500$, $t = 15$.

Les paramètres choisis pour le tracé du document B.24 sont les suivants :

- paramètres liés au domaine : une largeur $a = 200$, une longueur $b = 1000$, un décalage algébrique par rapport à l'axe des ordonnées $d = -100$ et un rayon d'attraction $r = 3$; une intensité du processus ponctuel de Poisson de répartition des fleurs $\lambda = 500$;
- paramètres liés au mouvement : un écart-type $\sigma = 3$ et une composante verticale nulle du vecteur de dérive : $u_2 = 0$;
- durée du mouvement : $t = 15$.

Le choix d'un nouveau domaine permet en effet d'obtenir des résultats plus intéressants. La courbe croît fortement au voisinage de 0 pour ensuite stagner autour d'un même niveau, puis décroître, à partir de $u_1 = 65$ (approximativement). On peut supposer, comme précédemment, qu'à partir de cette valeur de la dérive, le pollinisateur sort du domaine où se trouvent les fleurs. Si on ne prend pas en compte ce phénomène, ce tracé indique que la présence d'une dérive favorise la découverte de fleurs. Néanmoins, la proportion de fleurs visitées atteint apparemment un optimum ne dépendant pas de la dérive sur l'intervalle $[10, 65]$. On ne peut donc visiblement pas affirmer : « plus on dérive dans une certaine direction, plus on découvre de fleurs » : cela ne semble vrai que sur un voisinage de zéro.

B.3.3 Problème de temps de calcul

Le tracé de certaines des courbes précédentes demande plusieurs heures de calculs. En effet, pour chacune, il requiert des centaines d'appels à la fonction `volplusieurs` figurant au document B.32 qui, elle-même, à chaque itération correspondant à l'incrémement de la variable temporelle, parcourt un vecteur dont la taille est de l'ordre de λ . Cela a limité la possibilité de tracer ces courbes avec une grande variété de jeux de paramètres.

B.4 Autres esquisses de recherche

Ici se trouvent quelques pistes qui ont été envisagées mais pas réellement exploitées.

B.4.1 Complexification du modèle relatif aux fleurs

La répartition des fleurs dans le domaine aurait pu être modélisée par un processus ponctuel agrégé ou régulier et on aurait pu évaluer l'influence de la variance du mouvement sur le nombre de fleurs visitées avant un temps fixé.

Dans notre modèle, les différentes variétés de fleurs ne sont pas distinguées. Or, des biologistes ont constaté chez certaines espèces de pollinisateurs un phénomène de « constance florale », également appelé « fidélité florale ». Ces expressions désignent la tendance d'un pollinisateur à se concentrer, lors d'une sortie, sur une ou seulement quelques espèces de plantes. Sa raison biologique est encore soumise à débat. On aurait ainsi pu modéliser par différents processus ponctuels divers types de fleurs, et choisir de ne comptabiliser dans la catégorie « fleurs visitées » que les fleurs d'un type fixé.

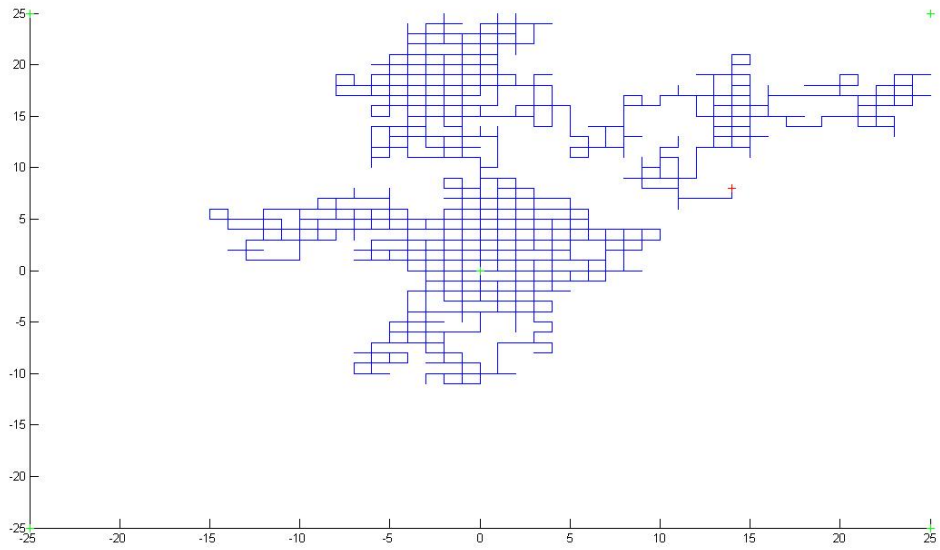
Par ailleurs, nous n'avons pas pris en compte le fait que les plantes ne possèdent pas toutes la même quantité de pollen (et elles possèdent souvent plus d'une fleur). Au lieu de mesurer l'efficacité du pollinisateur en comptant le nombre de fleurs visitées, il aurait été pertinent d'attribuer un poids à chaque plante - mesure de sa quantité de pollen - et de mesurer la quantité de pollen accumulée par l'abeille au cours de son mouvement.

B.4.2 Modélisation du mouvement du pollinisateur par une marche aléatoire

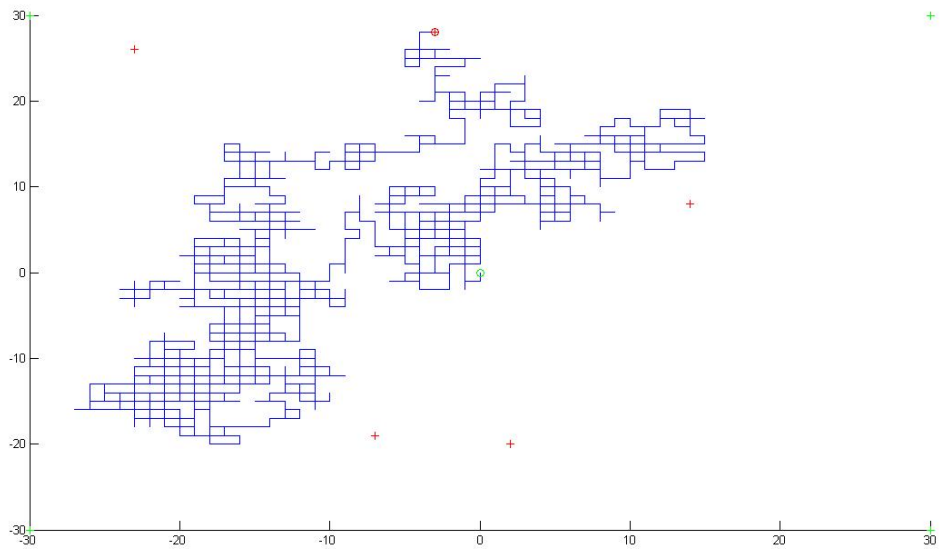
La modélisation du mouvement du pollinisateur par un processus continu semblait plus intuitive que celle par un processus discret comme une marche aléatoire, qui est cependant possible. Nous aurions alors placé les fleurs sur les nœuds d'un réseau et n'aurions pas eu recours aux disques d'attraction.

Nous n'avons pas choisi d'explorer cette possibilité de modélisation au-delà des simples tracés de trajectoires ci-dessous, avec départ de l'origine (en vert).

Il s'agit de simulations pour des marches aléatoires simples symétriques ; il eût été possible d'imaginer des marches aléatoires empêchant la sortie d'un domaine carré et tendant à ramener l'abeille vers le centre, c'est-à-dire la ruche.



Document B.25 – Évolution selon une marche aléatoire.



Document B.26 – Évolution selon une marche aléatoire pour plusieurs fleurs.

B.4.3 Trajectoire et spirale archimédienne

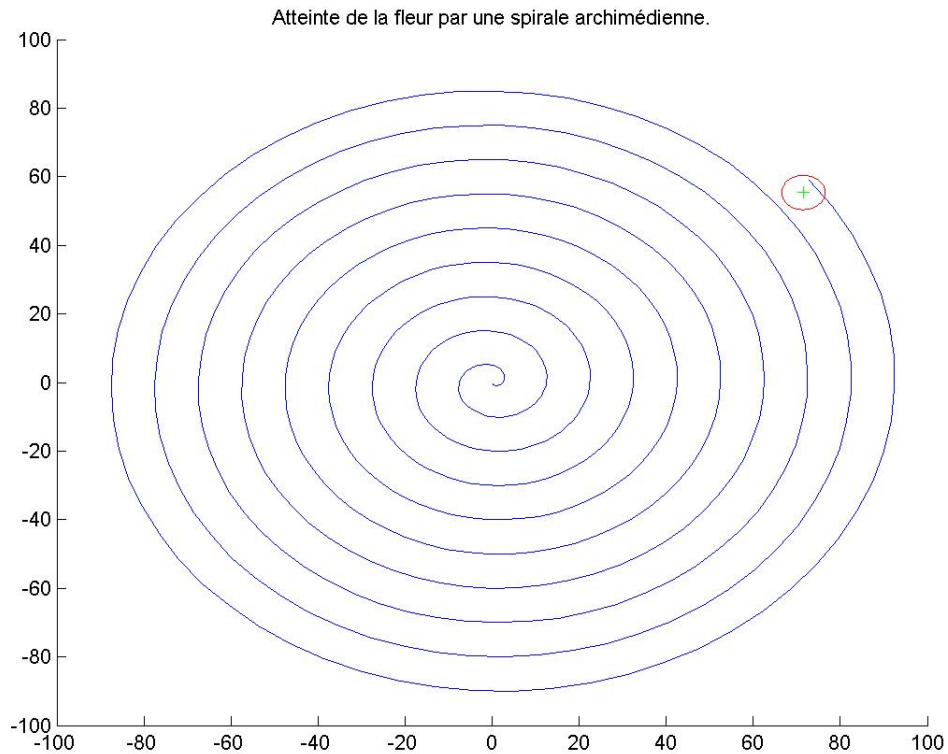
A quoi ressemblerait la trajectoire idéale pour une abeille, celle lui permettant le plus efficacement de détecter les fleurs ?

L'idée s'imposant naturellement est celle d'une spirale dont chacune des spires serait à distance $2r$ (deux fois la distance de détection de la fleur) de la précédente.

On essaie donc de modéliser le mouvement de l'abeille par une spirale archimédienne de paramètre r/π dont une équation paramétrique est :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{r}{\pi} t \sin(t) \\ x_2(t) = -\frac{r}{\pi} t \cos(t) \end{cases}$$

Voici une simulation de trajectoire avec une fleur suivant une loi normale centrée d'écart-type $\varphi = 20$, pour $r = 5$:



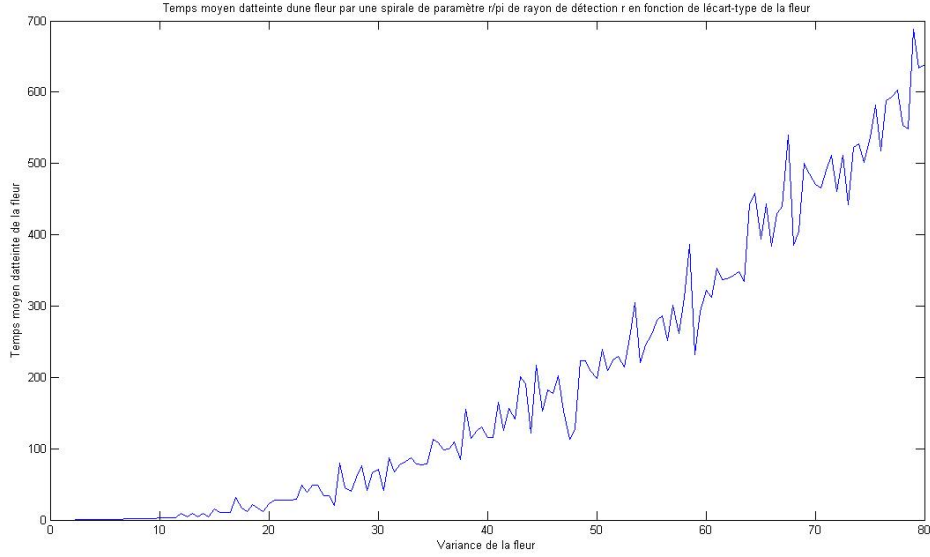
Document B.27 – Évolution selon une spirale pour $r = 5$ et $\varphi = 20$.

On peut aussi s'intéresser au temps moyen d'atteinte de la fleur en fonction de l'écart-type de la trajectoire de l'abeille, ici pour $r = 10$, pas de *drift* et une moyenne calculée sur 2000 itérations.

Il semble naturel de comparer l'efficacité de la détection par spirale avec celle par mouvement brownien - éventuellement avec *drift* ; cependant, cela s'avère difficile car il faudrait pour cela pouvoir harmoniser « la vitesse de parcours », c'est-à-dire que, dans les deux cas, les distances parcourues par l'abeille avant un temps donné soit approximativement identiques.

Or, sur un intervalle de temps fini quelconque, le mouvement brownien est de longueur infinie, ce qui est assez problématique.

Une solution consisterait à mesurer la longueur de la trajectoire pseudo-brownienne simulée comme précédemment en additionnant les distances entre les pas successifs.



Document B.28 – Temps moyen d’atteinte par une spirale pour $r = 10$.

Malheureusement, nos efforts en ce sens ont échoué à produire un résultant probant.

Un changement d’approche nous conduit à étudier la différence dans l’évolution temporelle de $\mathbb{P}_x(T_r \leq t)$ pour la spirale précédemment évoquée et pour cette même spirale bruitée par un mouvement brownien.

Malheureusement, en dépit de nos efforts nous n’avons pas réussi à obtenir des simulations probantes.

B.4.4 *Drift* et équation différentielle stochastique

Nous avons cherché à généraliser les résultats du **3.2.1** pour un mouvement brownien plan avec *drift* ; nous n’avons pas réussi à obtenir une équation différentielle stochastique fermée vérifiée par le processus de Bessel (la norme euclidienne) associé.

En notant $\rho_t^2 = (\sigma B_t^1 + u_1 t)^2 + (\sigma B_t^2 + u_2 t)^2$, on arrive à

$$dX_t = \frac{1}{2X_t} dt + dW_t + \frac{v \cdot (B_t + ut)}{X_t} dt$$

où $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien plan standard.

En appliquant la formule d’Itô,

$$f(x_t) = \left(\frac{1}{2X_t} + \frac{v \cdot (B_t + ut)}{X_t} \right) f'(X_t) + \frac{1}{2} f''(X_t) + M_t$$

où M est une martingale nulle en 0.

On pourrait ensuite chercher f telle que

$$(u_1 x_1 + u_1^2 t + u_2 x_2 + v_2^2 t) f'(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} f''(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = 0$$

B.4.5 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Les abeilles ont une durée de vol finie et tendance à ne pas trop s'éloigner de leur ruche. Il semble donc judicieux de modéliser leur mouvement par un processus qui incite à revenir vers l'origine lorsque la distance et le temps augmentent, avec un *drift* de rappel.

On introduit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme la solution de l'équation différentielle stochastique $dX_t = dB_t - \lambda X_t dt$ où $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard et λ un paramètre strictement positif.

Lorsque l'on applique la formule d'Itô à $e^{\lambda t} X_t$, on obtient :

$$X_t = X_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s$$

En particulier, pour $X_0 = x$, $\mathbb{E}_x[X_t] = x e^{-\lambda t}$: pour un départ en une valeur non nulle, il y a en moyenne convergence exponentielle vers 0.

On aurait pu essayer d'adapter ce processus dans le plan, utiliser la structure du processus et le simuler, par exemple avec un schéma d'Euler, pour faire des comparaisons avec les résultats obtenus dans le cas d'un mouvement brownien simple.

B.5 Conclusion

À cause de la durée limitée de ce projet, nous nous sommes focalisées sur un modèle possible mais bien d'autres angles d'approche auraient pu être choisis. Nous aurions pu envisager une étude dans l'espace et non dans le plan, prenant en compte un retour à la ruche dans un temps imparti. Nous aurions pu améliorer le modèle en distinguant différents types de fleurs, en leur attribuant des poids et des rayons d'attraction propres, et introduire un quota de pollen par abeille, une quantité maximale au-delà de laquelle l'abeille rentrerait à sa ruche. Nous aurions pu prendre en compte le fait que certaines espèces de pollinisateurs se concentrent lors d'une sortie sur une seule sorte de fleurs (phénomène lié à leurs différents types de mémoires, comme évoqué dans [24]). En introduisant plusieurs abeilles, nous aurions pu nous aventurer dans la description de phénomènes encore plus complexes de coopération, *et caetera*.

Néanmoins, des questions d'apparence bien plus simple se sont révélées complexes, et nous avons peu de résultats théoriques pour expliquer les résultats des simulations obtenues. La plupart correspondent à nos intuitions mais d'autres suscitent plus d'interrogations : en particulier, l'évolution en fonction de l'écart-type de l'abeille de la probabilité d'atteinte d'une fleur avant un temps fixé, présentant un « pic » assez étonnant.

A l'issue de ce travail, la question suivante se pose naturellement : en réalité, quel mouvement un pollinisateur suit-il ? Il est en fait difficile, pour des raisons techniques, de suivre de façon très précise la trajectoire d'un pollinisateur. À quel degré notre modèle est-il adapté à la réalité ? On peut suspecter qu'il n'existe pas une réponse mais plusieurs, de même qu'il existe plusieurs espèces de pollinisateurs.

B.6 Annexe

Code de la section 3.1.1 :

```
1  function B=vol(s,r,x1,x2,t,p)
2  %fonction booléenne qui retourne 1 si la fleur située en (x1,x2)
3  % de rayon d'attraction r a été atteinte au bout du temps t par l'abeille
4  % ayant un vol modélisé par  $s*Bt$  où  $Bt$  est un mouvement brownien standard
5  % incrémenté avec pas p
6
7  %initialisation de la variable booléenne
8  if norm([x1,x2])<r %cas trivial
9      B=1;
10 else B=0; %cas non trivial
11 end
12
13 %initialisation du compteur temporel et de la position de l'abeille (qui
14 %part ici de l'origine)
15 c=0;
16 a1=0;
17 a2=0;
18
19 %incrémentatoin du mouvement de l'abeille tant que la fleur et le temps t
20 %n'ont pas été atteints
21 while (norm([x1,x2]-[a1,a2])>r)*(c<t)==1
22     a1=a1+s*sqrt(p)*randn;
23     a2=a2+s*sqrt(p)*randn;
24     c=c+p;
25 end
26
27 %détermination de B en fonction du critère qui n'était plus respecté
28 if norm([x1,x2]-[a1,a2])<=r
29     B=1;
30 end
31
32 end
```

```

1  function p=empirique(N,s,r,x1,x2,t,p)
2  %fonction qui calcule la probabilité empirique d'atteinte de la fleur
3  %située en (x1,x2) avant le temps t, avec l'aide d'un N-échantillon de la
4  %fonction vol(s,r,x1,x2,t,p)
5
6  %initialisation du stockage
7  P=[];
8
9  %création du N-échantillon de vol
10 for i=1:N
11     b=vol(s,r,x1,x2,t,p);
12     P=[P;b];
13 end
14
15 %calcul de la probabilité empirique
16 p=1/N*sum(P);
17
18 end

```

```

1  %étude de l'impact de t avec une fleur fixe sans drift pour une variance v
2  %de l'abeille
3
4  %mise en place des paramètres
5  fleur=[100,50];%position de la fleur
6  f1=100;
7  f2=50;
8  r=10; %rayon d'attraction de la fleur
9  t_min=10;
10 t_max=5000;
11 inc_t=1;
12 pas=1; %pas d'incrément de la trajectoire de l'abeille
13 N=1000; %nombre d'itérations pour le calcul de la probabilité empirique
14 v=10; %variance de l'abeille
15
16 %initialisation des paramètres
17 t=t_min;
18 T=[];
19 P=[];
20
21 while t<=t_max
22     p=empirique(N,v,r,f1,f2,t,pas);
23     T=[T;t];
24     P=[P;p];
25     t=t+inc_t;
26 end
27
28 %tracé du graphe de l'évolution de la probabilité empirique
29 %d'atteinte en fonction de la variance
30
31 figure ()
32 plot(T,P)
33 xlabel('Temps t')
34 ylabel('Probabilité empirique d'atteinte avant t')

```

Document B.29 – Scripts pour étude de l'évolution temporelle (voir Document 3)

Code de la section 2.1.5 :

```
1  function B=volmouvant(s,r,t,D,h)
2  %fonction booléenne qui retourne 1 si la fleur qui suit N(0,h*I_2)
3  % de rayon d'attraction r a été atteinte au bout du temps t par l'abeille
4  % ayant un vol modélisé par s*Bt où Bt est un mouvement brownien standard
5  % incrémenté avec pas p
6  %tirage de la position de la fleur (avec le problème de la "taille de la
7  %ruche", ici ignoré)
8  x1=h*randn;
9  x2=h*randn;
10 %initialisation de la variable booléenne
11 if norm([x1,x2])<r %cas trivial
12     B=1;
13 else B=0; %cas non trivial
14 end
15 %initialisation du compteur temporel et de la position de l'abeille (qui
16 %part ici de l'origine)
17 c=0;
18 a1=0;
19 a2=0;
20
21 %incrémentatation du mouvement de l'abeille tant que la fleur et le temps t
22 %n'ont pas été atteints
23 while (norm([x1,x2]-[a1,a2])>r)*(c<t)==1
24     a1=a1+s*sqrt(p)*randn;
25     a2=a2+s*sqrt(p)*randn;
26     c=c+p;
27 end
28
29 %détermination de B en fonction du critère qui n'était plus respecté
30 if norm([x1,x2]-[a1,a2])<=r
31     B=1;
32 end
33
34 end
```

```

1  function p=empiriquemouvant(N,s,r,t,p,h)
2  %fonction qui calcule la probabilité empirique d'atteinte de la fleur
3  %qui suit une loi  $N(0,h*I_2)$  avant le temps t, avec l'aide d'un
4  %N-échantillon de la fonction volmouvant(s,r,x1,x2,t,p)
5
6  %initialisation du stockage
7  P=[];
8
9  %création du N-échantillon de vol
10 for i=1:N
11     b=volmouvant(s,r,t,p,h);
12     P=[P;b];
13 end
14
15 %calcul de la probabilité empirique
16 p=1/N*sum(P);
17
18 end

```

```

1  %étude de l'impact de sigma et de h sur la probabilité empirique d'atteinte
2  function [S,H,PP]=impacttotalmouvant
3  %mise en place des paramètres
4  r=5; %rayon d'attraction de la fleur
5  t=300; %instant test
6  pas=1; %pas d'incrémement de la trajectoire de l'abeille
7  N=1000; %nombre d'itérations pour le calcul de la probabilité empirique
8  var_min=0; %intervalle de variabilité de la variance de l'abeille
9  var_max=75;
10 inc=1; %incrément pour la variance de l'abeille
11 v_fleur_min=0;%intervelle de variabilité de la variance de la fleur
12 v_fleur_max=75;
13 incf=1; %incrément pour la variance de la fleur
14 vf=v_fleur_min; %initialisation de la valeur actuelle de la v_fleur
15 PP=[]; %recueillera la matrice des résultats.
16
17 while vf<=v_fleur_max
18     %probabilité empirique en fonction de sigma
19     v=var_min; %initialisation de la valeur actuelle de la var_abeille
20     P=[];%initialisation de la liste de stockage
21
22     while v<=var_max
23         p=empiriquemouvant(N,v,r,t,pas,vf);
24         P=[P;p];
25         v=v+inc;
26     end
27
28     PP=[PP,P]; %on rajoute la colonne de valeurs de p pour les différents v
29             %correspondant à vf
30     vf=vf+incf; %incrémement de vf
31 end
32 S=var_min:inc:var_max;
33 H=v_fleur_min:incf:v_fleur_max;
34 end

```

Document B.30 – Scripts pour l'évolution en fonction des variances de la fleur et de l'abeille (voir Documents 10 et 11)

Code de la section 3.1 :

```
0001 function [N, X, Y]=domaine_poisson(R, lambda)
0002     // Entrées :
0003     // R : rayon du domaine;
0004     // lambda : intensité du processus de Poisson.
0005     // Sortie :
0006     // N : nombre de fleurs simulées, suivant une mesure
0007     //ponctuelle de Poisson d'intensité lambda mu, où mu
0008     //est la mesure uniforme sur le disque de centre 0 et
0009     //de rayon R ;
0010     // (X,Y) : matrice Nx2 des coordonnées des fleurs.
0011
0012     N=grand(1,1,'poi',lambda)
0013     X=zeros(1,N)
0014     Y=zeros(1,N)
0015     k=1
0016
0017     //Simulations de variables iid de loi uniforme sur le disque
0018     //par la méthode d'acceptation-rejet.
0019     while k<=N
0020         u = -R+2*R*rand(1)
0021         v = -R+2*R*rand(1)
0022         if u^2+v^2<R^2 then
0023             X(k)=u
0024             Y(k)=v
0025             k=k+1
0026         end
0027     end
0028
0029 endfunction
```

Document B.31 – Programme domaine_poisson permettant la simulation d'un domaine circulaire comportant des fleurs.

```

0001 function cpt=volplusieurs(s, u1, u2, r, N, X1, X2, t)
0002 //Entrées :
0003 //s : écart-type du mouvement ;
0004 //(u1,u2) : dérive du mouvement ;
0005 //r : rayon d'attraction d'une fleur ;
0006 //R : rayon du domaine ;
0007 //N : nombre de fleurs dans D(0,R) ;
0008 //(X1,X2) : matrice Nx2 des coordonnées des fleurs ;
0009 //t : durée du mouvement.
0010 //Sortie :
0011 //cpt : nombre de fleurs ayant été visitées par le
0012 //pollinisateur entre le temps initial 0 et le temps final t.
0013
0014 a1=0
0015 a2=0 //(a1,a2) : position du pollinisateur à l'instant
0016 //initial.
0017 p = r^2/s^2 //pas pour le calcul par incrémentation du
0018 //processus.
0019 X11 = X1
0020 X22 = X2 //(X11,X22) : contiendra les coordonnées des fleurs
0021 //non visitées par le pollinisateur entre l'instant initial
0022 //et l'instant courant.
0023 F=[1:N]//Initialisation du vecteur contenant les indices des
0024 //fleurs non visitées au temps courant.
0025 f=N
0026 c=0 //c : compteur temporel initialisé à 0.
0027
0028 while (c<t)
0029     M=zeros(f,1)
0030     for k=1:f
0031         M(k)=((X11(k)-a1)^2+(X22(k)-a2)^2)^(1/2) //M(k) :
0032             //distance du pollinisateur à la fleur d'indice k,
0033             //au temps c.
0034     end
0035     E=find(M<=r) //vecteur contenant les indices des fleurs
0036     //visitées par le pollinisateur à l'instant courant.
0037     F=setdiff(F,E) //vecteur contenant les indices des fleurs
0038     //non visitées par le pollinisateur entre l'instant initial
0039     //et l'instant courant.
0040     //Incrémentation du mouvement du pollinisateur :
0041     a1=a1+s*sqrt(p)*rand(1,"normal")+p*u1
0042     a2=a2+s*sqrt(p)*rand(1,"normal")+p*u2
0043     c=c+p
0044     X11=X1(F)
0045     X22=X2(F)
0046     f=length(F)//Nombre de fleurs n'ayant pas été visitées
0047     //entre l'instant initial et l'instant courant.
0048 end
0049
0050 cpt=N-f
0051
0052 endfunction

```

Document B.32 – Programme volplusieurs simulant une trajectoire et comptant le nombre de fleurs visitées.

Annexe C

Mémoire de stage de master

MÉMOIRE DE M2

**Champs gaussiens : étude de la
caractéristique d'Euler d'ensembles
d'excursion, modèles anisotropes de
type espace-temps.**

Julie FOURNIER

STAGE
encadré par Anne ESTRADE
au MAP5 - université Paris-Descartes
de mars à juillet 2014.

Introduction

Mon stage s'est déroulé au MAP5, sous la direction d'Anne Estrade. Mon travail a principalement consisté en l'étude et la compréhension précise de deux articles et, finalement, en la prolongation des résultats de l'un d'eux. Le point commun entre ces deux articles est qu'ils portent sur des champs aléatoires gaussiens dont on considère (entre autres) des propriétés géométriques. Mais la similarité s'arrête là. La partie C.1 rassemble quelques notions sur les champs aléatoires, qui s'avéreront utiles dans la suite.

Le premier article ([1]), étudié dans la partie C.2, est une prépublication datant de 2011 de Bartz, Kou et Adler, intitulée : « Estimating Thresholding Levels for Random Fields via Euler Characteristics ». Les auteurs y présentent une méthode novatrice d'estimation des seuils pour un test portant sur des données d'IRM, méthode basée sur l'heuristique de la caractéristique d'Euler. Cette dernière donne une estimation de la probabilité d'excursion d'un champ aléatoire au-dessus d'un certain niveau grâce à une quantité liée à la topologie des réalisations de l'ensemble d'excursion correspondant.

La partie C.3 a pour objet le second article ([2]), écrit par Xue et Xiao et publié en 2011. Il s'intitule « Fractal and Smoothness Properties of Space-Time Gaussian Models ». Y est présenté un modèle de champs aléatoires gaussiens à accroissements stationnaires. La régularité d'un champ construit suivant ce modèle est discutée, ainsi que la dimension de Hausdorff d'ensembles liés à ses réalisations.

Les parties C.2 et C.3 présentent linéairement le contenu des articles, de façon étayée et critique. Pour [1], il s'agit de détailler la méthode proposée, en fournissant des explications supplémentaires sur ses fondements, et de critiquer les partis pris des auteurs concernant sa mise en œuvre. Les affirmations des auteurs de [2] sont commentées et la plupart de leurs démonstrations sont détaillées. Les deux articles contiennent des erreurs qui sont relevées et corrigées.

Les résultats supplémentaires proposés dans la partie C.4 prolongent l'étude de Xue et Xiao. L'un d'eux est une condition portant sur les paramètres du modèle, plus forte que celle évoquée dans l'article. L'autre est une méthode d'estimation de ces paramètres, basée sur la formule donnant la dimension de Hausdorff du graphe d'un champ relevant du modèle présenté.

C.1 Diverses notions sur les champs aléatoires

On considérera des champs aléatoires à valeurs réelles définis sur \mathbb{R}^N (N est un entier naturel non nul) ou sur une restriction de \mathbb{R}^N . On munit cet espace du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\|\cdot\|$ désigne la norme associée. On notera $X(\cdot)$ ou encore $\{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ un champ aléatoire X défini sur \mathbb{R}^N .

Définition 26 (version d'un champ aléatoire). Si X et \tilde{X} sont deux champs aléatoires à valeurs réelles, définis sur \mathbb{R}^N , on dit que \tilde{X} est une version de X si, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathbb{P}(X(t) = \tilde{X}(t)) = 1.$$

C.1.1 Stationnarité et accroissements stationnaires, isotropie

Notation Si X et Y sont deux champs aléatoires à valeurs réelles, définis sur \mathbb{R}^N , on note $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} Y$ l'égalité en loi de X et de Y . On rappelle que l'égalité en loi des processus X et Y est équivalente à l'égalité en loi des distributions finies-dimensionnelles, c'est-à-dire :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{R}^N)^m, \quad (X(t_1), \dots, X(t_m)) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} (Y(t_1), \dots, Y(t_m)).$$

Définition 27. Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles.

X est dit stationnaire si, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$,

$$X(\cdot + h) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} X(\cdot).$$

On dit que X est à accroissements stationnaires ou que les accroissements de X sont stationnaires si, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^N$,

$$X(t_0 + \cdot) - X(t_0) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} X(\cdot) - X(0).$$

Proposition 28. Soit X un champ aléatoire, défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles.

1. Si X est stationnaire alors il existe une application $C : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tous $(s, t) \in (\mathbb{R}^N)^2$, $\text{Cov}(X(s), X(t)) = C(s - t)$.
2. Si X est un champ à accroissements stationnaires, alors il existe une fonction $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (s, t) \in (\mathbb{R}^N)^2, \quad \text{Cov}(X(s) - X(0), X(t) - X(0)) = \frac{1}{2}[v(s) + v(t) - v(s - t)].$$

Preuve. Dans le cas d'un champ X stationnaire, il suffit de prendre pour C la fonction définie par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, \quad C(h) = \text{Cov}(X(h), X(0)).$$

Dans le cas d'un champ X à accroissements stationnaires, la fonction v définie par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, \quad v(h) = \text{Var}(X(h) - X(0))$$

convient.

□

La fonction v définie ci-dessus, appelée **fonction variogramme**, fait l'objet de la partie C.1.4.

La partie C.3 porte sur un modèle de champ aléatoire anisotrope, c'est-à-dire non isotrope. La notion d'isotropie est définie ci-dessous.

Définition 29 (isotropie). Soit X un champ aléatoire centré, défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles. X est dit isotrope si, pour toute rotation r de \mathbb{R}^N (élément du groupe orthogonal de \mathbb{R}^N),

$$X(r(\cdot)) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} X(\cdot).$$

C.1.2 Champs aléatoires gaussiens

Définition 30 (champ gaussien). Soit X un champ défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles. X est dit gaussien si, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{R}^N)^m$, $(X(t_1), \dots, X(t_m))$ est un vecteur gaussien.

Remarque 31. Si X est un processus gaussien centré, alors sa loi est caractérisée par la donnée de sa fonction de covariance. En effet, pour tout m -uplet $(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{R}^N)^m$, $(X(t_1), \dots, X(t_m))$ est un vecteur gaussien et centré, de matrice de covariance $(C(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq m}$ dont tous les coefficients sont connus; la loi de ce vecteur est donc bien déterminée.

De cette remarque découle la proposition suivante, réciproque de la proposition 28 dans le cas où le champ considéré est gaussien. Elle facilite, dans ce cas, l'étude de la stationnarité du champ, de la stationnarité de ses accroissements ou de son isotropie.

Proposition 32 (stationnarité du champ, stationnarité de ses accroissements ou isotropie dans le cas gaussien). Soit X un champ gaussien, centré, défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles.

1. S'il existe une application $C : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (s, t) \in (\mathbb{R}^N)^2, \quad \text{Cov}(X(s), X(t)) = C(s - t)$$

alors X est un champ stationnaire.

2. S'il existe une fonction $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (s, t) \in (\mathbb{R}^N)^2, \quad \text{Cov}(X(s) - X(0), X(t) - X(0)) = \frac{1}{2}[v(s) + v(t) - v(s - t)],$$

alors X est un champ à accroissements stationnaires.

3. S'il existe une application $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (s, t) \in (\mathbb{R}^N)^2, \quad \text{Cov}(X(s), X(t)) = C(\|s - t\|),$$

alors X est un champ isotrope.

C.1.3 Représentation spectrale de la covariance

Théorème 33 (représentation spectrale de la fonction de covariance d'un champ à accroissements stationnaires (voir [7], chapitre 4, partie 23)). Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ un champ aléatoire à valeurs réelles, centré, à accroissements stationnaires et admettant une fonction de covariance $C(s, t) := \text{Cov}(X(s), X(t))$ continue.

Il existe alors une mesure F positive et symétrique sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{\|\lambda\|^2}{1 + \|\lambda\|^2} F(d\lambda) < \infty, \quad (\text{C.1})$$

et une matrice M , carrée de taille $N \times N$, symétrique positive, telles que :

$$C(s, t) = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} (e^{i\langle s, \lambda \rangle} - 1)(e^{-i\langle t, \lambda \rangle} - 1) F(d\lambda) + \langle s, Mt \rangle. \quad (\text{C.2})$$

Réciproquement, si F vérifie les hypothèses ci-dessus, la formule (C.2) définit la fonction de covariance d'un champ à accroissements stationnaires.

Remarque 34. Puisque F est une mesure symétrique, l'intégrale (C.2) définit bien un nombre réel. On pourra se permettre d'écrire \mathbb{R}^N pour le domaine des intégrales contre cette mesure, au lieu de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Enfin, la condition (C.1) peut s'exprimer de façon équivalente par : $\int_{\mathbb{R}^N} \min(1, \|\lambda\|^2) F(d\lambda) < \infty$.

Définition 35. La mesure F définie ci-dessus est appelée **mesure spectrale** de X . Si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, sa densité f est appelée **densité spectrale** de X .

Les conditions portant sur F se transportent alors sur f : f est paire et vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \min(1, \|\lambda\|^2) f(\lambda) d\lambda.$$

C.1.4 Fonction variogramme

Définition 36. Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ un processus à valeurs réelles et à accroissements stationnaires. On définit son variogramme $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, \quad v(h) := \text{Var}(X(h) - X(0)).$$

Puisque la définition s'applique à un champ X à accroissements stationnaires, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, $v(h) = \text{Var}(X(t+h) - X(t))$: les accroissements en un point quelconque de \mathbb{R}^N ont la même variance (car la même loi) que les accroissements au point zéro.

Mentionnons ici quelques propriétés utiles de la fonction variogramme.

- $v(0) = 0$.
- v est **paire** puisque, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$:

$$v(-h) = \text{Var}(X(-h) - X(0)) = \text{Var}(X(-h+h) - X(h)) = v(h).$$

- Ce dernier point implique, si v est différentiable en 0 :

$$\nabla v(0) = 0.$$

- En développant l'expression de $v(h)$, on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}^N, \forall h \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} v(h) &= \text{Var}(X(t+h) - X(t)) \\ &= \text{Var}[(X(t+h) - X(0)) - (X(t) - X(0))] \\ &= v(t+h) + v(t) - 2\text{Cov}(X(t+h) - X(0), X(t) - X(0)), \end{aligned}$$

ce que l'on peut aussi écrire, en posant $s = t + h$:

$$\text{Cov}(X(s) - X(0), X(t) - X(0)) = \frac{1}{2}(v(s) + v(t) - v(s - t)).$$

Dans le cas d'un champ X vérifiant $X(0) = 0$ p.s., on peut donc exprimer le variogramme en fonction de la fonction de covariance et réciproquement. Pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, pour tous $(s, t) \in \mathbb{R}^{2N}$, si l'on pose $C(s, t) := \text{Cov}(X(s), X(t))$:

$$\begin{aligned} v(h) &= C(h, h) \\ C(s, t) &= \frac{1}{2}(v(s) + v(t) - v(s - t)). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

- Si l'on suppose le champ X centré et tel que $X(0) = 0$, on déduit de la représentation spectrale de la covariance de X une expression intégrale de son variogramme. Avec les mêmes notations que dans la partie C.1.3 :

$$\begin{aligned} v(h) &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \left| 1 - e^{i\langle h, \lambda \rangle} \right|^2 F(d\lambda) + \langle h, Mh \rangle \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} (1 - \cos(\langle h, \lambda \rangle)) F(d\lambda) + \langle h, Mh \rangle \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \sin^2(\langle h, \lambda \rangle) F(d\lambda) + \langle h, Mh \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

C.1.5 Régularité des champs aléatoires

Dans cette partie, on présente différentes notions décrivant la régularité d'un champ aléatoire, en établissant parfois des liens entre elles. On s'intéresse d'abord à des notions de continuité, puis à la dérivabilité dans une direction donnée, puis à la différentiabilité. Les types de convergence utilisés pour les passages à la limite qui interviennent dans la définition de ces notions sont la convergence en moyenne quadratique et la convergence presque sûre. Les résultats de régularité presque sûre ne portent pas sur le champ aléatoire considéré lui-même mais donnent l'existence d'une version de ce champ vérifiant une propriété de régularité.

Régularité höldérienne et continuité presque sûre

Définition 37 (continuité presque sûre). Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ un champ aléatoire à valeurs réelles et $t \in \mathbb{R}^N$. X est dit presque sûrement continu en t si, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant dans $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$ vers t ,

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X(t_n) = X(t) \right) = 1$$

X est dit p.s. continu s'il est continu p.s. en tout point de \mathbb{R}^N .

Définition 38 (régularité höldérienne locale). Soit $\gamma > 0$. Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ un champ aléatoire à valeurs réelles. X est dit localement höldérien d'exposant γ (ou, plus simplement, localement γ -Hölder) si, pour tout compact K , il existe un réel $\delta > 0$ et une variable aléatoire h à valeurs dans \mathbb{R}_+^* p.s. tels que :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{(s,t) \in K^2 / \|s-t\| \leq h} \frac{|X(s) - X(t)|}{\|s - t\|^\gamma} \leq \delta \right) = 1.$$

Remarque 39. D'après cette définition, si $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$,

$$X \text{ est localement } \gamma\text{-H\"older} \implies \forall \gamma' \leq \gamma, X \text{ est localement } \gamma'\text{-H\"older}.$$

Remarque 40. Une condition de r\'egularit\'e h\"old\'erienne locale est une condition suffisante de continuit\'e presque s\^ure.

Voici un corollaire d'un th\'eor\eme de Komogorov portant sur l'existence d'une version localement h\"old\'erienne d'un champ al\'eatoire.

Th\'eor\eme 41 (condition suffisante d'existence d'une version localement h\"old\'erienne : th\'eor\eme de Kolmogorov-Centsov, 1956, cf. [27], th\'eor\eme 3.23). *Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ un champ al\'eatoire \u00e0 valeurs r\'eelles. Supposons que, pour tout $T > 0$, il existe des r\'eels strictement positifs α, β et C tels que :*

$$\forall (s, t) \in ([-T, T]^N)^2, \quad \mathbb{E} [|X(s) - X(t)|^\alpha] \leq C \|s - t\|^{N+\beta}.$$

Alors, pour tout $\gamma \in \left]0, \frac{\beta}{\alpha}\right[$, X admet une version localement h\"old\'erienne d'exposant γ .

Si le champ est suppos\'e gaussien, on peut affaiblir cette condition suffisante.

Corollaire C.1.1 (condition suffisante d'existence d'une version localement h\"old\'erienne d'un champ gaussien). Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ un champ al\'eatoire gaussien centr\'e \u00e0 valeurs r\'eelles. Supposons que, pour tout $T > 0$, il existe des r\'eels strictement positifs η et C tels que :

$$\forall (s, t) \in ([-T, T]^N)^2, \quad \mathbb{E} [|X(s) - X(t)|^2] \leq C \|s - t\|^\eta. \quad (\text{C.5})$$

Alors, pour tout $\gamma \in \left]0, \frac{\eta}{2}\right[$, X admet une version localement h\"old\'erienne d'exposant γ .

Preuve du corollaire C.1.1. Soit X un champ al\'eatoire v\'erifiant les hypoth\eses du corollaire. Soit $T > 0$ tel qu'il existe $\eta > 0$ et $C > 0$ tels que (C.5) soit vraie.

Comme X est gaussien et centr\'e, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $c_k > 0$ telle que :

$$\forall (s, t) \in ([-T, T]^N)^2, \quad \mathbb{E} [|X(s) - X(t)|^{2k}] = c_k \mathbb{E} [(X(t) - X(s))^2]^k.$$

et donc, gr\acoe \u00e0 l'hypoth\ese de majoration de la variance des accroissements :

$$\forall (s, t) \in ([-T, T]^N)^2, \quad \mathbb{E} [|X(s) - X(t)|^{2k}] \leq c_k C^k \|t - s\|^{\eta k}.$$

On fixe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\eta k_0 > N$ et on pose $\beta = \eta k_0 - N$. Ainsi,

$$\forall (s, t) \in ([-T, T]^N)^2, \quad \mathbb{E} [|X(s) - X(t)|^{2k_0}] \leq c_{k_0} C^{k_0} \|t - s\|^{N+\beta}.$$

Le th\'eor\eme de Kolmogorov-Centsov (41) permet alors d'affirmer que, pour tout $\gamma > 0$ tel que $\gamma < \frac{\beta}{2k_0} = \frac{\eta}{2} - \frac{N}{2k_0}$, X admet une version localement h\"old\'erienne d'exposant γ .

Comme cela est vrai pour tout entier naturel $k_0 > \frac{N}{\eta}$, on en d\'eduit que, pour tout $\gamma \in \left]0, \frac{\eta}{2}\right[$, X admet une version localement h\"old\'erienne d'exposant γ . □

Continuité en moyenne quadratique

Définition 42 (continuité en moyenne quadratique). Soit X un champ aléatoire à valeurs réelles, défini sur \mathbb{R}^N , admettant un moment d'ordre 2, et soit $t \in \mathbb{R}^N$. X est dit continu en moyenne quadratique au point t si, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant dans $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$ vers t , $(X(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $X(t)$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E} [(X(t_n) - X(t))^2] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

X est dit continu en moyenne quadratique s'il est continu en moyenne quadratique en tout point de \mathbb{R}^N .

La continuité en moyenne quadratique d'un champ aléatoire se lit sur sa fonction de covariance.

Proposition 43 (théorème 2.2.1 dans [3]). Soit X un champ aléatoire à valeurs réelles, défini sur \mathbb{R}^N , admettant un moment d'ordre 2, et soit $t \in \mathbb{R}^N$. Alors X est continu en moyenne quadratique au point t si, et seulement si sa fonction de covariance $(x, y) \mapsto \text{Cov}(X(x), X(y))$ est continue en (t, t) .

Dérivabilité en moyenne quadratique

Notation Notons $\mathcal{S}^{N-1} := \{u \in \mathbb{R}^N / \|u\| = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{R}^N .

Notation Soient X un champ aléatoire à valeurs réelles défini sur \mathbb{R}^N et u un vecteur unitaire de \mathbb{R}^N , $t \in \mathbb{R}^N$ et $h \neq 0$. On note $X_{u,h}(t)$ le taux d'accroissement $\frac{X(t+hu) - X(t)}{h}$.

Définition 44 (dérivabilité selon un vecteur unitaire). Soit $u \in \mathcal{S}^{N-1}$ et $t \in \mathbb{R}^N$. Un champ aléatoire de carré intégrable X est dit dérivable en moyenne quadratique au point t dans la direction u si $\frac{X(t+hu) - X(t)}{h}$ admet une limite en norme L^2 lorsque h tend vers 0. On note alors cette limite $X'_u(t)$ et on l'appelle dérivée de X en moyenne quadratique au point t dans la direction u .

Notation. Pour $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, si (e_1, \dots, e_N) désigne la base canonique de \mathbb{R}^N , on note pour simplifier $X'_j(t) := X'_{e_j}(t)$ et on l'appelle j^e dérivée partielle de X au point t . On note également, si $h \neq 0$, $X_{j,h}(t) := X_{e_j,h}(t)$.

Dans le cas d'un champ stationnaire, la dérivabilité en moyenne quadratique se lit sur la fonction de covariance, et sur le variogramme dans le cas d'un champ à accroissements stationnaires. Cela est énoncé dans le théorème suivant, dont le point (ii) est tiré de l'article [2] qui sera l'objet de la partie C.3.

Théorème 45. Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, admettant en tout point de \mathbb{R}^N un moment d'ordre 2. Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

(i) Supposons que X soit un champ stationnaire et posons $C(h) := \text{Cov}(X(h), X(0))$. La j^e dérivée partielle de X en moyenne quadratique existe en tout point de \mathbb{R}^N si, et seulement si C possède une dérivée partielle à l'ordre 2 dans la direction j en 0, $\frac{\partial^2 C}{\partial h_j^2}(0)$.

(ii) Supposons que X soit un champ à accroissements stationnaires et que $X(0) = 0$ p.s.. La j^e dérivée partielle de X en moyenne quadratique existe alors en tout point t de \mathbb{R}^N si et seulement si v possède une dérivée partielle à l'ordre 2 dans la direction j en 0, $\frac{\partial^2 v}{\partial h_j^2}(0)$.

Pour démontrer cela, on utilise le lemme ci-dessous. On y aura recours à maintes reprises lorsqu'il s'agira de prouver une convergence en moyenne quadratique.

Lemme 46. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur une espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Elle converge en moyenne quadratique si, et seulement si il existe un réel k tel que :

$$\mathbb{E}(Z_m Z_n) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} k.$$

Preuve du lemme 46. La preuve est basée sur la caractérisation de la convergence par le critère de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

Supposons qu'il existe une constante k telle que $\mathbb{E}(Z_m Z_n) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} k$. On a en particulier $\mathbb{E}(Z_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k$. Donc, si m et n sont deux entiers naturels,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z_m - Z_n)^2] &= \mathbb{E}(Z_m^2) + \mathbb{E}(Z_n^2) - 2\mathbb{E}(Z_m Z_n) \\ &\xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} k + k - 2k = 0. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Par conséquent, d'après le critère de Cauchy, la suite (Z_n) converge dans $L^2(\Omega)$.

Réciproquement, supposons que la suite (Z_n) converge dans $L^2(\Omega)$ vers une variable aléatoire Z . D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \|Z_n\|_{L^2} - \|Z\|_{L^2} \right| \leq \|Z_n - Z\|_{L^2},$$

donc $(\mathbb{E}(Z_n^2))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}(Z^2)$. De plus, d'après le critère de Cauchy, $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(Z_m - Z_n)^2] = 0$ donc, grâce à l'identité (C.6), on en déduit que $\mathbb{E}(Z_m Z_n)$ converge vers $\mathbb{E}(Z^2)$ lorsque m et n tendent vers l'infini. □

On déduit de ce résultat son analogue lorsque l'indice de la suite de variables aléatoires varie dans un espace continu.

Idée de la preuve du théorème 45. On applique le résultat précédent à $(X_{j,h}(t))_{h>0}$, qui admet une limite en moyenne quadratique si, et seulement si :

$$D_{h,k}^j(t) := \frac{1}{hk} \mathbb{E}[(X(t + he_j) - X(t))(X(t + ke_j) - X(t))]$$

converge vers une constante lorsque $h, k \rightarrow 0$.

Si X est un champ stationnaire alors, en posant $C(h) := \text{Cov}(X(h), X(0))$,

$$D_{h,k}^j(t) = \frac{1}{hk} (C((h-k)e_j) - C(he_j) - C(ke_j) + C(0))$$

et cette quantité tend vers une limite réelle lorsque h et k tendent vers 0 si, et seulement si $\frac{\partial^2 C}{\partial h_j^2}(0)$ existe.

Si X est un champ à accroissements stationnaires et $X(0) = 0$ p.s. alors la relation (C.3) (partie C.1.4) permet d'écrire :

$$D_{h,k}^j(t) = \frac{1}{hk} (v((h-k)e_j) - v(he_j) - v(ke_j)),$$

qui tend vers une limite réelle lorsque h et k tendent vers 0 si, et seulement si $\frac{\partial^2 v}{\partial h_j^2}(0)$ existe. \square

On énonce un théorème semblable au théorème 45, portant sur les dérivées en moyenne quadratique d'ordres supérieurs d'un champ stationnaire. Elles se définissent par récurrence de la même façon que dans le cas déterministe.

Proposition 47 (dérivabilité en moyenne quadratique dans le cas stationnaire ([3], partie 2.2, page 27)). *Soit X un champ aléatoire réel défini sur \mathbb{R}^N , stationnaire, et soit C la fonction $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad h \mapsto \text{Cov}(X(h), X(0))$.*

X est continu en moyenne quadratique en tous points de \mathbb{R}^N si et seulement si C est continue en 0.

Soit $k \in \mathbb{N}^$ et $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^k$. La k ème dérivée partielle de X en moyenne quadratique $\frac{\partial^k X}{\partial i_1 \dots \partial i_k}$ existe en tous points de \mathbb{R}^N si, et seulement si la dérivée partielle d'ordre $2k$ de C , $\frac{\partial^{2k} C}{\partial t_{i_1}^2 \dots \partial t_{i_k}^2}$, existe au point zéro.*

Différentiabilité en moyenne quadratique

Définition 48. Soit X un champ aléatoire et $t \in \mathbb{R}^N$. On dit que X est différentiable en moyenne quadratique au point $t \in \mathbb{R}^N$ s'il existe un vecteur aléatoire $\nabla_X(t) \in \mathbb{R}^N$, appelé **gradient en moyenne quadratique** de X en t , tel que, pour tout $h \neq 0$, et pour tout vecteur $u \in \mathcal{S}^{N-1}$,

$$X(t + hu) = X(t) + \langle hu, \nabla_X(t) \rangle + r(t, hu), \quad (\text{C.7})$$

où $r(t, hu)/h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{L^2} 0$, autrement dit, si pour tout vecteur $u \in \mathcal{S}^{N-1}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X(t + hu) - X(t) - \langle hu, \nabla_X(t) \rangle}{h} \right)^2 \right] = 0$$

X est dit différentiable en moyenne quadratique s'il est différentiable en moyenne quadratique en tous points de \mathbb{R}^N .

La proposition suivante indique que, comme dans le cas déterministe, la différentiabilité en un point t implique la dérivabilité au point t dans n'importe laquelle des directions.

Proposition 49. *Si un champ aléatoire X est différentiable en moyenne quadratique en un point $t \in \mathbb{R}^N$ alors X admet en t des dérivées en moyenne quadratique suivant tous les vecteurs unitaires. En outre, on a alors $\nabla_X(t) = (X'_1(t), \dots, X'_N(t))$.*

Démonstration. En effet, si X est différentiable en t alors, pour tout vecteur $u \in \mathcal{S}^{N-1}$ et pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{X(t + hu) - X(t)}{h} = \langle u, \nabla_X(t) \rangle + \frac{r(t, hu)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{L^2} \langle u, \nabla_X(t) \rangle.$$

Pour $1 \leq j \leq N$, la j^e coordonnée du vecteur $\nabla_X(t)$ est $\langle e_j, \nabla_X(t) \rangle$ qui est égal, d'après le calcul précédent, à $X'_j(t)$. \square

Différentiabilité presque sûre

Enfin, voici la définition de la différentiabilité presque sûre.

Définition 50. Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N et à valeurs réelles. X est presque sûrement différentiable s'il existe un champ aléatoire réel $\{\nabla_X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$, appelé **gradient pour la différentiabilité p.s.**, tel que :

$$\mathbb{P} \left(\forall t \in \mathbb{R}^N, \forall u \in \mathcal{S}^{N-1}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t + hu) - X(t) - \langle hu, \nabla_X(t) \rangle}{h} = 0 \right) = 1.$$

En général, il n'y a pas de lien de cause à effet entre les différentiabilités p.s. et en moyenne quadratique. Cependant, si un champ est à la fois différentiable en moyenne quadratique et p.s., alors ses gradients en moyenne quadratique et p.s. coïncident en tous points de l'ensemble des paramètres, car la convergence L^2 implique la convergence p.s. d'une sous-suite.

Mais si le processus considéré est gaussien et s'il est différentiable p.s., alors il est différentiable en moyenne quadratique en tout point de l'espace des paramètres.

C.2 Compte-rendu de l'article de Bartz, Kou et Adler ([1])

C.2.1 Présentation du problème et de l'objet de l'article

Dans leur pré-publication datant de 2011, « Estimating Thresholding Levels for Random Fields via Euler Characteristics », K. Bartz, S.C. Kou et R.J. Adler présentent une nouvelle méthode d'estimation des seuils et de la p-valeur pour un test de détection d'un signal. Les auteurs se basent sur une expérience utilisant l'IRM pour mettre en œuvre leur méthode et la tester.

L'expérience qui a servi est la mesure par IRM, sur seize sujets différents, de l'activité hémodynamique du cerveau dans deux situations. Dans la première, le sujet entendait deux fois successivement la même phrase répétée par la même personne ; dans la seconde, il entendait deux fois successivement la même phrase répétée par deux personnes différentes.

À chaque répétition, la mesure a été faite en chaque point d'une grille en trois dimensions dans laquelle se situait le cerveau, pour chaque sujet. Un point de la grille est appelé voxel.

On souhaite tester l'hypothèse suivante :

H_0 : la réponse du cerveau est la même dans les deux situations.

On souhaite également localiser les zones où se situent les éventuelles réponses différentes, c'est-à-dire l'ensemble des points où la différence de réponse dans les deux situations est considérée significative, relativement à un critère à définir.

Soit s un point de l'espace S où sont effectuées les mesures (également appelé espace des paramètres). Quelques notations :

- 1 et 2 sont les groupes correspondant aux deux situations expérimentales ;
- F est la taille de chacun de ces groupes ;
- $\bar{T}(s)$ est la moyenne empirique de la différence entre les mesures dans les deux conditions, au niveau du point s : les $(T^{(j)}(s))_{1 \leq j \leq F}$;
- $\sigma(s)$ est la variance empirique de ces différences.

La statistique du test de Student pour deux échantillons appariés, en un point s de S , s'écrit :

$$T(s) = \frac{\bar{T}(s)}{\sigma(s)/\sqrt{F}}, \quad (\text{C.8})$$

Sous H_0 , cette statistique suit une loi de Student à $F - 1$ degrés de liberté. On voit T comme un champ aléatoire défini sur S . (Les définitions de la partie C.1 que l'on utilisera, même si elles portent sur un champ dont l'espace des paramètres est \mathbb{R}^N , s'étendent au cas d'un champ défini sur une partie ou sous-variété de \mathbb{R}^N .)

Dans le cadre de l'expérience, pour tester l'hypothèse H_0 , il est possible soit d'utiliser les 16 sujets à la fois, soit de tester les 16 sujets séparément. Dans le premier test, nos deux groupes sont chacun de taille $F = 16$. Dans le second test - celui choisi par les auteurs de l'article - on utilise plusieurs images (en l'occurrence 2×191) prises sur un sujet au cours de la répétition, dans chacune des deux conditions expérimentales, et donc $F = 191$.

Il n'est pas judicieux d'effectuer un test à partir de cette statistique en chacun des voxels de l'espace de mesure, en raison de leur nombre trop élevé : cela entraînerait la détection de faux positifs.

Les auteurs proposent plutôt d'utiliser la statistique suivante, de loi bien sûr inconnue :

$$M_S := \sup_{x \in S} T(x).$$

M_S doit être proche de 0 si H_0 est vérifiée et prendre des valeurs plus élevées si la réponse varie avec la situation expérimentale.

Ils présentent une façon d'estimer le seuil à un niveau α fixé et la p-valeur du test.

Leur méthode est basée sur l'heuristique de la caractéristique d'Euler qui donne une estimation de la probabilité que M_S dépasse la valeur u . L'estimateur utilisé est l'espérance de la caractéristique d'Euler de l'ensemble d'excursion du champ aléatoire T au-dessus du seuil u . Cette espérance peut s'exprimer, grâce à la formule cinématique de Gauss, en fonction des courbures de Lipschitz-Killing de l'ensemble S , inconnues. Les auteurs proposent donc d'estimer ces courbures par régression linéaire généralisée.

Des définitions et les explications précises de la méthode proposée dans l'article sont l'objet de la partie suivante.

L'objectif de l'article est donc de présenter cette nouvelle méthode d'estimation de la p-valeur et des seuils, mais aussi de la comparer à une méthode antérieure, le *warping*, proposé par Taylor et Worsley en 2007 dans [28]. Cette dernière aussi est basée sur l'heuristique de la caractéristique d'Euler et la formule cinématique de Gauss, mais utilise une autre façon d'estimer les courbures de Lipschitz-Killing.

C.2.2 Méthode proposée

Probabilité de seuil

Soit D un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R} . L'**ensemble d'excursion** du champ T dans D sur l'espace S est :

$$A_D(T, S) := \{s \in S / T(s) \in D\}.$$

Soit u un réel, l'ensemble d'excursion de T au-dessus du seuil u sur S est noté : $A_u(T, S) := A_{[u, +\infty]}(T, S)$ et parfois abrégé en A_u .

Comme dit précédemment, les auteurs cherchent à estimer la p-valeur et les seuils du test de l'hypothèse H_0 grâce à la statistique M_S . La p-valeur est $\mathbb{P}(M_S \geq (M_S)_{obs} | H_0)$, où $(M_S)_{obs}$ est la valeur de la statistique M_S calculée à partir des données fournies par l'expérience. Le seuil de notre test au niveau de confiance $1 - \alpha$ est :

$$u_\alpha := \max \{u \in \mathbb{R} / \mathbb{P}(M_S \geq u) \geq \alpha\}.$$

L'expression de la p-valeur et celle des seuils invitent à s'intéresser aux probabilités d'excursion du champ M_S . Si $u \in \mathbb{R}$, la **probabilité d'excursion** au-dessus du seuil u est :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \in S} T(s) \geq u \right) = \mathbb{P}(M_S \geq u).$$

Heuristique de la caractéristique d'Euler

Pour des seuils élevés, la topologie de l'ensemble d'excursion correspondant renseigne sur la probabilité d'excursion. Plus précisément, il est utile de s'intéresser à la caractéristique d'Euler des ensembles d'excursion au-dessus de seuils élevés.

Cette dernière admet la définition heuristique suivante :

- si V est un compact d'un espace euclidien 2-dimensionnel, sa caractéristique d'Euler est :

$$\phi(V) := \#(\text{composantes connexes de } V) - \#(\text{trous dans } V);$$

- Si V est un compact d'un espace euclidien 3-dimensionnel, sa caractéristique d'Euler est :

$$\begin{aligned} \phi(V) := & \#(\text{composantes connexes de } V) + \#(\text{trous dans } V) \\ & - \#(\text{poignées de } V). \end{aligned}$$

L'heuristique est basée sur l'idée que, pour une grande valeur de u , l'ensemble d'excursion A_u de T a une topologie simple : il est soit vide, soit constitué d'une seule composante connexe, sans trous ni poignées. On s'attend donc à ce que, pour u grand, $\phi(A_u)$ vaille soit 1 dans le cas où $A_u \neq \emptyset$ - c'est-à-dire $M_S = \sup_{s \in S} T(s) \geq u$ -, soit 0 dans le cas contraire. Cela peut également s'écrire : $\mathbf{1}_{M_S \geq u} = \phi(A_u)$. En prenant l'espérance de chacun des termes, on obtient : $\mathbb{P}(M_S \geq u) = \mathbb{E}(\phi(A_u))$, égalité censée être vraie approximativement lorsque u est grand.

Ainsi, l'heuristique de la caractéristique d'Euler se formule par :

$$|\mathbb{P}(M_S \geq u) - \mathbb{E}(\phi(A_u(T, S)))| =: \text{erreur}_{T,S}(u),$$

où le terme $\text{erreur}_{T,S}(u)$ est petit devant les deux autres termes à gauche de l'inégalité, d'autant plus que u est grand. Autrement dit, pour u grand,

$$\mathbb{P}(M_S \geq u) \approx \mathbb{E}(\phi(A_u)).$$

Il est à noter que cette heuristique est avérée pour les champs gaussiens de variance constante sur l'espace des paramètres, pour lesquels on dispose d'une expression pour le terme d'erreur : voir la partie 14.3 dans [5]. Le théorème s'applique lorsque S est une variété stratifiée, sous des hypothèses de régularité que l'on ne détaillera pas ici, mais qui sont en particulier vérifiées par le carré, le cube et la sphère sur lesquels sont effectuées les simulations décrites dans la partie C.2.4.

Théorème 51 (numéroté 14.3.3 dans [5]). *Soit S une variété stratifiée vérifiant certaines hypothèses de régularité. Soit f un champ gaussien dont la variance est constante égale à 1. Il existe une constante σ^2 dépendant de f telle que :*

$$\liminf_{u \rightarrow +\infty} \text{erreur}_{f,M}(u) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\right)\right).$$

Puisqu'on a accès par la mesure à l'espérance empirique de $\phi(A_u)$, l'heuristique semble être un moyen d'estimation des probabilités d'excursion. Cependant, les mesures des $\phi(A_u)$ sont bruitées, et on ne peut donc pas directement les utiliser. Les auteurs proposent donc de passer par une expression théorique de $\mathbb{E}(\phi(A_u(T, S)))$ donnée par la formule cinématique de Gauss.

Formule cinématique de Gauss

Pour pouvoir appliquer la formule que l'on va bientôt énoncer à notre champ T d'intérêt, il faut supposer qu'il vérifie plusieurs hypothèses. Détaillons-les d'abord.

Hypothèses sur le champ On considère une variété stratifiée régulière S et un champ aléatoire $f = (f^1, \dots, f^F)$ à F composantes réelles, défini sur S , tel que :

- f est gaussien d'espérance nulle et de variance constante sur S ;
- les composantes de f sont identiquement distribuées de même loi ;
- f est deux fois continûment différentiable p.s. ;
- f vérifie des hypothèses de non-dégénérescence détaillées dans la partie 11.3 de [5].

Notre champ T , sous l'hypothèse H_0 , suit une loi de Student à $F-1$ degrés de liberté. Il n'est donc pas gaussien mais construit à partir d'un champ gaussien : il existe un champ aléatoire f gaussien, dont les F composantes sont indépendantes, ainsi qu'une fonction mesurable $G : \mathbb{R}^F \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $s \in S$, $T(s) = G(f(s))$. Plus

précisément, G est ici l'application $\mathbb{R}^F \rightarrow \mathbb{R} \quad (f_1, \dots, f_F) \mapsto \sqrt{F-1} \frac{f^F}{\sqrt{\sum_{j=1}^{F-1} f_j^2}}$.

En outre, on suppose que f vérifie les hypothèses ci-dessus et que G est deux fois continûment dérivable p.s..

On peut noter que les ensembles d'excursion d'un champ $T = G(f)$ construit à partir d'un champ gaussien f s'expriment facilement en fonction de ceux de f (voir [29]). Si D est un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^d ,

$$A_D(T, S) = A_{G^{-1}(D)}(f, S).$$

L'hypothèse la plus forte sur les champs auxquels l'article se restreint est celle concernant la différentiabilité. L'hypothèse d'une variance constante du champ f sur le domaine est moins forte que celle de la stationnarité du champ ou de son isotropie.

Courbures de Lipschitz-Killing Dans la formule du théorème apparaissent les courbures de Lipschitz-Killing de l'ensemble S et du champ f : les $(\mathcal{L}_i(S, f))_{0 \leq i \leq \dim(S)}$.

Les courbures de Lipschitz-Killing euclidiennes d'un compact convexe S de \mathbb{R}^n , notées $(\mathcal{L}_i^E(S))_{0 \leq i \leq \dim(S)}$ sont $\dim(S) + 1$ quantités décrivant la géométrie de S . La j^e de ces quantités s'interprète comme une mesure du caractère j -dimensionnel de S . Ces courbures sont facilement exprimables.

Les courbures de Lipschitz-Killing utilisées dans l'article, notées $(\mathcal{L}_i(S, f))_{0 \leq i \leq \dim(S)}$, sont une généralisation des premières à un ensemble S qui est une variété munie d'une métrique dépendant du champ gaussien f . Elles dépendent donc à la fois du domaine S mais aussi du champ qui y est défini. La courbure $\mathcal{L}_0(S, f)$ est en fait $\phi(S)$, la caractéristique d'Euler de S , et cela est vrai quel que soit le champ aléatoire gaussien f .

Enfin, énonçons la formule cinématique de Gauss, due à K. Worsley (cf. la section 15.9 de [5] ou [30], ou [31]).

Théorème 52 (numéroté 15.9.5 dans [5]). *Soit f un champ gaussien et $T = G(f)$ construit à partir de f , vérifiant les hypothèses citées ci-dessus, défini sur une variété stratifiée S régulière. Alors :*

$$\mathbb{E}(\phi(A_u(T, S))) = \sum_{i=0}^{\dim(S)} \mathcal{L}_i(S, f) \rho_i^G(u),$$

où les $\rho_i^G(u)$ sont donnés par :

$$\rho_i^G(u) = (2\pi)^{-i/2} \frac{d^i}{d\rho^i} \mathbb{P}(Z \in \text{Tube}(G^{-1}([u, \infty[), \rho)) |_{\rho=0},$$

où Z est un vecteur gaussien standard de dimension F et, en notant dist la distance euclidienne standard sur \mathbb{R}^F , $\text{Tube}(G^{-1}(D, \rho)) = \{y \in \mathbb{R}^F / \text{dist}(y, D) \leq \rho\}$. (Voir le théorème 15.9.3 dans [5].)

En particulier, si $d = 1$ et G est l'application identité, pour $i = 0 \dots \dim(S)$,

$$\rho_i^G(u) = (2\pi)^{-(i+1)/2} H_{i-1}(u) e^{-u^2/2},$$

où, pour $1 \leq i \leq \dim(S)$, H_i est le i ème polynôme d'Hermite et, pour $i = 0$, $H_{-1}(u) = \sqrt{2\pi} e^{u^2/2} \psi(u)$, où ψ est la queue de distribution de la loi gaussienne centrée réduite :

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

Dans la suite, on pourra écrire plus simplement \mathcal{L}_i au lieu de $\mathcal{L}_i(S, f)$ et $\rho_i(u) \left(\sup_{t \in S} X(t) \geq u \right)$ au lieu de $\rho_i^G(u)$, et abréger « courbures de Lipschitz-Killing » en « courbures de L-K ».

Les courbures de L-K sont parfois facilement calculables lorsque le champ et l'ensemble auquel elles correspondent sont simples, mais l'ensemble S considéré ici ne l'est pas. Dans le cas de l'application à l'expérience sur le cerveau, l'ensemble S est de dimension 3 et la seule des quatre courbures à laquelle on a facilement accès est $\mathcal{L}_0(S, f) = \phi(S)$ que l'on peut mesurer.

Si on fait des hypothèses suffisantes sur le champ T , on dispose donc d'une expression de $\mathbb{E}(\phi(A_u(T, S)))$ en fonction des courbures de Lipschitz-Killing de l'ensemble S et des $(\rho_i(u))_{0 \leq i \leq \dim(S)}$. Les seconds sont calculables; les premiers ne le sont pas. Les auteurs proposent donc de les estimer par régression linéaire généralisée.

Estimation des courbures de L-K

Le modèle proposé est linéaire avec erreurs normales, corrélées et de lois différentes. On note F le nombre de versions de notre champ aléatoire T et l'on note $T^{(1)}, \dots, T^{(F)}$ ces versions; $A_u^{(1)}, \dots, A_u^{(F)}$ sont leurs ensembles d'excursion respectifs au-dessus du seuil u . Dans le cas de l'expérience, on prend $F = 16$ si l'on choisit d'étudier les sujets dans leur ensemble ou $F = 191$ si l'on choisit d'étudier un sujet particulier, comme il a déjà été expliqué. Ces versions étant supposées indépendantes, le théorème central limite, dans lequel on a remplacé $\mathbb{E}(\phi(A_u))$ par son expression donnée par la formule cinématique de Gauss, se formule de la façon suivante :

$$\sqrt{F} \left(\frac{1}{F} \sum_{j=1}^F \phi(A_u^{(j)}) - \sum_{i=0}^{\dim(S)} \mathcal{L}_i(S, f) \rho_i^T(u) \right) \xrightarrow{F \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \text{Var}(\phi(A_u))).$$

Cela justifie l'idée de choisir le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} \sum_{j=1}^F \phi(A_u^{(j)}) &= \sum_{i=0}^{\dim(S)} \mathcal{L}_i(S, f) \rho_i^T(u) + \epsilon(u), \\ \epsilon(u) &\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{F} \text{Var}(\phi(A_u))\right). \end{aligned} \tag{C.9}$$

Le facteur $\frac{1}{F}$ est absent sur le papier. Ce qui ressemble à un oubli des auteurs n'a pas d'importance dans la suite.

L'intérêt de cette formule est que, pour un jeu de quantités à estimer : les $(\mathcal{L}_i(S, f))_{0 \leq i \leq \dim(S)}$, on dispose de multiples mesures : les $\frac{1}{F} \sum_{j=1}^F \phi(A_u^{(j)})$ pour divers seuils u .

En notant U le nombre de seuils choisi pour l'estimation des courbures de L-K, et u_1, \dots, u_U ces seuils, on peut écrire matriciellement le modèle, en se basant cette fois sur le théorème central limite vectoriel :

$$\begin{aligned} \Phi &= R\mathcal{L} + E, \\ E &\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{F}\Sigma\right), \end{aligned} \tag{C.10}$$

où $\Phi = \left(\frac{1}{F} \sum_{j=1}^F \phi(A_{u_k}^{(j)})\right)_{1 \leq k \leq U}$, $R = (\rho_i(u_k))_{1 \leq k \leq U, 0 \leq i \leq \dim(S)}$, $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_i)_{0 \leq i \leq \dim(S)}$, $E = (\epsilon(u_k))_{1 \leq k \leq U}$ et $\Sigma = \text{Cov}(\phi(A_{u_k}), \phi(A_{u_l}))_{1 \leq k, l \leq U}$.

À partir des estimées des courbures de L-K, notées $(\hat{\mathcal{L}}_i)_{0 \leq i \leq \dim(S)}$ on obtient une estimée de la caractéristique d'Euler à un seuil fixé :

$$\hat{\mathbb{E}}(\phi(A_u)) = \sum_{i=0}^{\dim(S)} \hat{\mathcal{L}}_i \rho_i(u),$$

puis un estimateur de la p-valeur :

$$\hat{p} = \sum_{i=0}^{\dim(S)} \hat{\mathcal{L}}_i \rho_i((M_S)_{obs}),$$

ou encore un estimateur d'un des seuils, par exemple le seuil à 95 % :

$$\hat{u}_5 = \max \left\{ u \in \mathbb{R} / \hat{\mathbb{E}}(\phi(A_u(f, M))) \geq 5\% \right\}.$$

Les courbures de L-K ne dépendent pas de u , mais seulement du domaine S et du champ. Ceci est un avantage, car la mesure de la caractéristique d'Euler d'un ensemble d'excursion est d'autant plus imprécise que le seuil est élevé. On pourra donc utiliser les mesures de ces caractéristiques à des seuils petits ou moyens pour l'estimation des courbures, mais obtenir une estimation de l'espérance de la caractéristique d'Euler d'un ensemble d'excursion au-dessus d'un seuil aussi élevé que l'on souhaite.

La partie suivante complète la présentation du modèle. Il reste en effet à trouver un estimateur adéquat pour la matrice de covariance de l'erreur E et fixer un nombre et une répartition des seuils u . Ces choix se font en fait en testant expérimentalement, sur les données d'IRM et grâce à des simulations, plusieurs possibilités de modèles.

C.2.3 Précisions sur le modèle

Modèle pour la matrice de covariance

La fonction de covariance des caractéristiques d'Euler à différents niveaux d'excursion est $C(u, v) := \text{Cov}(\phi(A_u), \phi(A_v))$ et elle est proportionnelle à la fonction de

covariance de l'erreur $\text{Cov}(\epsilon(u), \epsilon(v))$. En effet, en écrivant le modèle (C.9) pour deux seuils u et v et en appliquant la covariance, on obtient :

$$\text{Cov} \left(\frac{1}{F} \sum_{j=1}^F \phi \left(A_u^{(j)} \right), \frac{1}{F} \sum_{k=1}^F \phi \left(A_v^{(k)} \right) \right) = \text{Cov}(\epsilon(u), \epsilon(v)),$$

car les autres quantités ne sont pas aléatoires. Or, on peut développer le terme de gauche et, grâce à l'hypothèse d'indépendance et d'identique distribution des $\left(\phi \left(A_u^{(j)} \right) \right)_{u \in \mathbb{R}}$ selon la loi de $(\phi(A_u))_{u \in \mathbb{R}}$, pour j variant entre 1 et F , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{F^2} \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^F \text{Cov} \left(\phi \left(A_u^{(j)} \right), \phi \left(A_v^{(k)} \right) \right) &= \frac{1}{F^2} \sum_{j=1}^F \text{Cov} \left(\phi \left(A_u^{(j)} \right), \phi \left(A_v^{(j)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{F} \text{Cov} \left(\phi \left(A_u \right), \phi \left(A_v \right) \right). \end{aligned}$$

Les auteurs proposent différents modèles pour cette covariance. D'après le modèle (C.9), l'erreur est de loi variable avec u et ses valeurs aux différents niveaux sont corrélées.

La matrice $\Sigma = (C(u_i, u_j))_{1 \leq i, j \leq U}$ est la matrice de covariance dans le cadre de notre expérience et on cherche à l'estimer par une matrice définie positive $\hat{\Sigma}$. Les différents modèles proposés par les auteurs correspondent à des hypothèses plus ou moins fortes sur la corrélation et la loi de la caractéristique d'Euler des ensembles d'excursion aux différents seuils.

- Matrice identité : les $\phi(A_u)$ sont indépendants, identiquement distribués (et il en est donc de même des $\epsilon(u)$), suivant une loi de variance 1.
- Diagonale lissée : on suppose que la variance $\text{Var}(\phi(A_u))$ des caractéristiques d'Euler varie avec u mais que ces caractéristiques aux différents niveaux ne sont pas corrélées. La matrice estimée est donc diagonale. Les termes diagonaux sont obtenus en calculant la variance empirique des $(\phi(A_u^{(j)}))_{1 \leq j \leq F}$ puis en modifiant la fonction de u obtenue pour la rendre régulière et strictement positive.
- Corrélogramme lissé : on suppose la corrélation des erreurs aux différents niveaux mais avec hypothèse de stationnarité des $(\phi(A_u))_{u \in \mathbb{R}}$.
- *Sampson-Guttorp warping* : on ne suppose pas que les erreurs ont même loi lorsque u varie, ni la stationnarité des $(\phi(A_u))_{u \in \mathbb{R}}$.
- Pseudo-inverse : là encore, pas d'hypothèse de lois identiques ni de stationnarité dans la corrélation. Pour estimer Σ^{-1} - c'est en fait cette matrice qui nous sera utile et pas son inverse -, on calcule la pseudo-inverse de $\hat{\Sigma}$.

Le choix entre ces différents modèles se fait par expérimentation. Finalement, le modèle retenu est la diagonale lissée, qui apporte un compromis entre précision du modèle et rapidité des calculs. Bien sûr, il suppose l'absence de corrélation entre les $(\phi(A_u))_{u \in \mathbb{R}}$, mais les estimations par corrélogramme lissé ou par *Sampson-Guttorp warping*, dans lesquelles on ne néglige pas les corrélations, sont coûteuses en terme de temps de calcul car elles impliquent l'estimation des termes non-diagonaux.

Choix du nombre de seuils utilisés et de leur répartition

Le modèle pour l'estimée de la matrice Σ étant fixé, les choix sur les seuils se font de manière à minimiser la covariance des $(\mathcal{L}_i)_{0 \leq i \leq \dim(S)}$.

En augmentant le nombre de seuils et donc la taille du système (C.10), on augmente la précision sur l'estimation du vecteur \mathcal{L} des courbures. Mais un trop grand nombre de

seuils trop rapprochés les uns des autres entraîne une corrélation forte entre les différents ($\phi(A_{u_i})$) sur lesquels on risque de faire une forte erreur d'estimation.

Dans un modèle linéaire généralisé tel que le modèle (C.10), la matrice de covariance de l'estimateur $\widehat{\mathcal{L}}$ est donnée par :

$$\text{Cov}(\widehat{\mathcal{L}}) = (R\Sigma^{-1}R^\top)^{-1} \quad (\text{C.11})$$

(La puissance inverse a été oubliée dans l'article.) On utilise cette formule pour calculer la covariance de $\widehat{\mathcal{L}}$, en remplaçant Σ par son estimation $\widehat{\Sigma}$. Elle n'est valable que si Σ est inversible, ce qui justifie le choix d'estimer Σ par une matrice inversible.

Pour évaluer la « grandeur » de la matrice $\text{Cov}(\widehat{\mathcal{L}})$, on utilise son déterminant ou sa trace.

Les auteurs fixent d'abord le nombre U de seuils. Expérimentalement, en utilisant les images obtenues par IRM, ils constatent que $\det(\text{Cov}(\widehat{\mathcal{L}}))$ et $\text{trace}(\text{Cov}(\widehat{\mathcal{L}}))$, tracés en fonction de U , décroissent beaucoup jusqu'à $U \approx 50$, plus irrégulièrement et à moindre échelle ensuite. Ils choisissent donc $U = 50$.

Concernant la répartition des seuils, ils testent trois types d'espacements possibles.

- Espacement régulier : les seuils sont répartis régulièrement entre $\min\{T^{(j)}(s), 1 \leq j \leq F, s \in S\}$ et $\max\{T^{(j)}(s), 1 \leq j \leq F, s \in S\}$.
- Espacement par quantile : on pose u_1 le quantile empirique d'ordre 1% du champ T , u_2 le quantile empirique d'ordre 3%, etc., jusqu'à u_{50} le quantile d'ordre 99% ; Cela permet de placer les seuils régulièrement au sens de la répartition des valeurs du champ T .
- Espacement par variance : les $(u_k)_{1 \leq k \leq 50}$ sont vus comme les versions d'une variable aléatoire dont la densité est proportionnelle à la variance empirique des $\phi(A_{u_i})$. Ainsi, les seuils sont plus nombreux aux niveaux où la caractéristique d'Euler varie beaucoup.

Finalement, en calculant $\det(\text{Cov}(\widehat{\mathcal{L}}))$ et $\text{trace}(\text{Cov}(\widehat{\mathcal{L}}))$, cela pour les différentes estimations possibles de la matrice de covariance des caractéristiques d'Euler décrites au paragraphe précédent, les auteurs constatent que le mode d'espacement qui minimise ces quantités est l'espacement régulier. Cet espacement sera donc utilisé pour l'application de la méthode.

Les auteurs ont choisi de fixer d'abord le nombre de seuils, puis le type d'espacement, mais ils vérifient que les modes d'espacement par quantile et par variance donnent des courbes $\det(\text{Cov}(\widehat{\mathcal{L}}))$ et $\text{trace}(\text{Cov}(\widehat{\mathcal{L}}))$ en fonction de U d'allures similaires à celle obtenue avec un espacement régulier.

C.2.4 Mise en œuvre de la méthode sur des données simulées et choix des facteurs expérimentaux

Grâce à des simulations de champs connus, les auteurs comparent les résultats obtenus avec leur méthode de régression (réalisée avec les différentes possibilités d'estimation de Σ) aux résultats attendus et à ceux obtenus par la méthode du *warping*. Il y a donc en tout six méthodes comparées. La comparaison porte à la fois sur le temps de calcul des différentes méthodes et leur précision.

Distinction entre ensembles d'excursion réels et ensembles d'excursion mesurés

En pratique, on n'a pas accès aux valeurs prises par le champ aléatoire T sur tout l'espace S mais seulement en certains points $\{s_1, \dots, s_K\}$ formant un réseau sur S . Les

ensembles d'excursion observés ne sont donc pas continus mais discrets.

On note G et on appelle taille du maillage le nombre de points du réseau par dimension ou direction de l'ensemble S . Par exemple, sur le cube, G est le nombre de points du réseaux placés sur une arête. Sur la sphère, G est le nombre de points du réseau sur un demi-cercle longitudinal, ou encore sur le demi-équateur de la sphère.

L'estimation \widehat{A}_u de l'ensemble d'excursion A_u au-dessus d'un seuil u à partir de la connaissances des points $s \in \{s_1, \dots, s_K\}$ où $T(s) \geq u$ se fait en fixant un critère pour que deux points de cet ensemble, adjacents par une arête ou une diagonale du réseau, appartiennent à la même composante connexe de \widehat{A}_u . Pour cela, on peut leur demander d'être voisins par une arête du réseau ou bien décider qu'ils peuvent être voisins soit par une arête, soit par une diagonale. C'est cette seconde possibilité qui est choisie pour la mise en œuvre de la méthode, même si les auteurs constatent que ce choix n'affecte que peu les caractéristiques d'Euler mesurées.

Une fois obtenue l'estimation \widehat{A}_u de l'ensemble d'excursion au-dessus du seuil u , la caractéristique d'Euler empirique est calculée en utilisant une formule simple propre au cas discret où on dispose d'un réseau. Pour un ensemble discret dans un ensemble à trois dimensions, si on considère que chaque point s du réseau est au centre d'un cube, l'ensemble peut être vu comme un ensemble de cubes qui peuvent s'empiler et s'agglomérer. Sa caractéristique d'Euler se calcule alors en comptant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces apparentes dans l'ensemble formé par les cubes et en posant :

$$\phi = \#\text{sommets} - \#\text{arêtes} + \#\text{faces} - \#\text{cubes}.$$

Pour un ensemble discret en deux dimensions, chaque point est au milieu d'un carré et il faut enlever le dernier terme de la somme pour calculer la caractéristique d'Euler.

Par raccourci d'écriture, on confondra $\phi(\widehat{A}_u)$ et $\phi(A_u)$, bien que l'estimation de A_u par un ensemble discret puisse ne pas rendre compte de la topologie de l'ensemble et ainsi causer une différence entre ces deux quantités.

Dans le cas de champs gaussiens et gaussiens associés, on dispose d'un résultat de convergence lorsque la taille G du maillage du réseau tend vers l'infini. Le seuil calculé à partir des ensembles d'excursion observés sur les points d'un réseau dont le maillage est caractérisé par le nombre G peut ainsi approcher le seuil correspondant aux ensembles d'excursion continus du champ réel continu.

Champs simulés

Les auteurs choisissent de simuler des champs gaussiens stationnaires et isotropes, dont la fonction de covariance est gaussienne et dépend d'un paramètre α : en notant f un tel champ, $\text{Cov}(f_x, f_y) = \exp(-\alpha\|x - y\|^2) =: C(x - y)$.

Les courbures de L-K ont alors des expressions simples lorsque l'ensemble S des paramètres est simple. En effet, pour un champ stationnaire isotrope, les courbures de L-K sont liées aux courbures de L-K euclidiennes par la relation :

$$\forall 0 \leq i \leq \dim(S), \quad \mathcal{L}_i(S, f) = \lambda_2^{i/2} \mathcal{L}_i^E(S),$$

où λ_2 est le moment spectral d'ordre deux du champ aléatoire f , qui s'exprime par :

$$\lambda_2 = -\frac{\partial^2 C}{\partial x_j^2}(x)|_{x=0}.$$

(Comme le champ est isotrope, les dérivées partielles par rapport aux différentes coordonnées sont égales, donc la définition ne dépend pas du choix de j .) Dans notre cas, $\lambda_2 = 2\alpha$.

Carré			Cube				Sphère		
\mathcal{L}_0	\mathcal{L}_1	\mathcal{L}_2	\mathcal{L}_0	\mathcal{L}_1	\mathcal{L}_2	\mathcal{L}_3	\mathcal{L}_0	\mathcal{L}_1	\mathcal{L}_2
1	$2\sqrt{2\alpha}$	2α	1	$3\sqrt{2\alpha}$	$3(2\alpha)$	$(2\alpha)^{3/2}$	2	0	$4\pi(2\alpha)$

TABLE C.1 – Expression analytique des courbures de L-K du carré, du cube et de la sphère, dans le cas d’une fonction de covariance $\text{Cov}(f_x, f_y) = \exp(-\alpha\|x - y\|^2)$.

Les simulations sont donc effectuées en choisissant pour S le carré, le cube ou la sphère unités, pour lesquels les courbures de L-K euclidiennes sont très simples. Le tableau (C.1) donne les expressions analytiques des courbures de L-K associées à ces domaines et à la fonction de covariance précitée.

Pour les seuils, des expressions analytiques sont connues pour les champs continus que l’on souhaite simuler, mais pas pour les champs discrets qui seront en réalité simulés. On verra comment les auteurs arrivent malgré tout à évaluer la différence entre seuil du champ simulé et seuil estimé.

Facteurs expérimentaux

Les facteurs expérimentaux sont :

- la taille F de l’échantillon : elle est fixée, pour la simulation, à $F = 15$;
- l’ensemble des paramètres ;
- la fonction de covariance : elle a une forme fixée telle que le champ soit isotrope et dépende d’une constante α ;
- la taille G du maillage du réseau ;
- le nombre de seuils U ;
- la répartition des seuils ;
- la matrice de covariance des caractéristiques, Σ .

Conclusions sur l’efficacité de la méthode

Temps de calcul Selon le domaine et le modèle choisi pour l’estimation de Σ , le temps de calcul augmente plus ou moins rapidement avec la taille G du maillage. On le voit sur les graphiques de la figure 9 de l’article, qui représentent la médiane du temps de calcul en fonction de G , pour les différentes méthodes et les différents domaines.

Sur la sphère, toutes les méthodes, dont le *warping*, ont des temps de calcul à peu près similaires qui ne varient que peu lorsque G varie entre 5 et 100. Sur le carré et le cube, pour des valeurs de G modérées, la rapidité des méthodes utilisant la régression présentée dans l’article est moins sensible à l’augmentation de G que celle du *warping*, même si, sur le cube, la durée de chaque méthode finit par être affectée à partir d’une valeur de G plus ou moins élevée.

Les méthodes avec estimation de Σ par corrélogramme lissé ou par *Sampson-Guttorp warping*, qui demandent l’estimation de termes non-diagonaux, sont moins rapides, d’autant moins que G augmente. Sur le carré et le cube, les méthodes avec estimation de Σ par l’identité, la diagonale lissée ou la pseudo-inverse sont plus rapides que le *warping*, pour les valeurs de G présentées sur les graphiques de la figure 9.

Écart-type L’écart type empirique de l’estimation d’un seuil à un niveau de confiance de 95%, calculé à partir des résultats de multiples simulations, permet d’évaluer la dispersion des estimations. Il a tendance à rester stable ou à diminuer lorsque la taille G

du maillage augmente. L'écart-type obtenu avec la méthode du *warping* est moins élevé que celui obtenu avec les différentes méthodes utilisant la régression, mais la différence s'estompe lorsque G augmente, lorsque Σ est estimée par l'identité, la diagonale lissée ou la pseudo-inverse.

Biais Pour évaluer la précision des différentes méthodes, les auteurs calculent le biais : ils évaluent la différence entre le seuil attendu et le seuil estimé. Ils considèrent les seuils à des niveaux de confiance de 95%.

Deux façons de calculer le seuil attendu sont proposées : la première consiste à estimer le seuil du champ continu et à le comparer à la limite des seuils obtenus par une méthode donnée, lorsque G tend vers l'infini. Notons $u_{95\%}(G)$ l'estimation du seuil à un niveau de confiance de 95% et lorsque la taille du maillage est G . Puisque l'on considère un champ gaussien, le seuil estimé par $u_{95\%}(G)$ converge, lorsque G tend vers l'infini, vers $u_{95\%}^*$, le seuil théorique correspondant à des ensembles d'excursion continus. Les auteurs choisissent donc de poser le modèle de régression non-linéaire suivant :

$$\forall G \in \{G_1, \dots, G_N\}, \quad u_{95\%}(G) = u_{95\%}^* + \beta G^\sigma + e(G),$$

où β est un réel à estimer, σ est un réel à estimer - on s'attend à trouver une estimation négative -, et les $e(G_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont les erreurs indépendantes et identiquement distribuées de loi normale.

Le résultat de cette régression est un couple $(\hat{\beta}, \hat{\sigma})$ et l'estimation $\widehat{u_{95\%}^*}$ du seuil continu. Si la méthode d'estimation des seuils est précise, on verra les estimées $u_{95\%}(G)$ converger vers le seuil continu estimé par $\widehat{u_{95\%}^*}$. Le biais est calculé comme la différence entre la limite constatée des $u_{95\%}(G)$ lorsque G tend vers l'infini et $\widehat{u_{95\%}^*}$.

La seconde méthode de calcul d'un biais consiste à prendre pour seuil attendu, pour une taille de maillage donnée (en l'occurrence $G = 50$) le seuil discret empirique calculé à partir d'un nombre très élevé de simulations.

Cette dernière façon d'évaluer le biais donne des valeurs plus élevées. Pour une méthode de calcul du biais et un domaine donnés, le biais des différentes méthodes d'estimation du seuil est comparable. Il est plus élevé lorsque le domaine est sphérique. Avec la première méthode de calcul, on constate que les estimations de Σ par corrélogramme lissé ou par *Sampson-Guttorp warping* donnent des biais plus élevés que les autres méthodes, sur tous les domaines.

C.2.5 Application de la méthode aux données d'IRM

La fin de l'article est dévolue à l'application de la méthode de régression aux données fournies par l'expérience sur le cerveau. La comparaison avec le *warping* est possible car les auteurs de [28] avaient déjà testé leur méthode sur ces mêmes données.

Les images d'un même sujet doivent être corrigées pour effacer les effets des mouvements au cours de l'expérience. On applique la méthode sur chacun des sujets, pour lequel on dispose de $F = 191$ images prises successivement au cours de chacune des deux expériences. La réponse du sujet est calculée en chaque voxel et en chaque instant en fonction de l'activité mesurée et de l'intensité du stimulus, et on considère la différence entre les réponses dans les deux conditions expérimentales. Cela permet d'obtenir des données $(T^{(j)}(s))_{1 \leq j \leq F}$, d'une façon qui n'est pas très précisément décrite. À partir de ces données, on obtient un champ T grâce à la formule (C.8).

Une fois obtenue par la méthode de régression L-K la p-valeur ainsi que le seuil à un niveau $1 - \alpha$ donné, et puisque l'on connaît la valeur de M_S mesurée pour chaque

sujet, on peut déterminer si l’hypothèse de réponse équivalente dans les deux situations expérimentales est conservée ou non.

En outre, on dispose d’un critère pour pouvoir affirmer que la réponse du cerveau en un point est significativement différente dans la deuxième condition expérimentale. En effet, dans le cas d’un niveau fixé à 95%, la méthode fournit un seuil estimé $\widehat{u_{95\%}}$ tel que :

$$\mathbb{P}(M_S \geq \widehat{u_{95\%}}) \leq 5\%,$$

c’est-à-dire tel que :

$$\mathbb{P}(\exists s \in S / T(s) \geq u_{95\%}) \leq 5\%.$$

Les points s considérés comme activés dans la deuxième condition expérimentale seront ceux où le champ T dépasse $\widehat{u_{95\%}}$.

Les deux méthodes comparées (la régression ou le *warping*) calculent des seuils très proches (légèrement plus élevés pour la régression). Par contre, les courbures de L-K $(\mathcal{L}_i)_{1 \leq i \leq 3}$, estimées dans les deux méthodes, diffèrent beaucoup. Il aurait été intéressant de mesurer la caractéristique d’Euler $\phi(S) = \mathcal{L}_0(S)$ et de la comparer avec son estimée obtenue avec l’une et l’autre des méthodes.

Une autre différence entre les deux méthodes réside dans la différence de temps de calcul, qui donne l’avantage à la méthode de Bartz, Kou et Adler. Dans le cas de l’expérience, la méthode de l’article est toujours au moins deux fois plus rapide que le *warping* et jusqu’à plus de quatre fois plus rapide sur certains sujets.

C.2.6 Conclusion

L’article de Bartz, Kou et Adler propose une méthode d’estimation du seuil et de la p-valeur d’un test. Cette méthode est basée sur l’utilisation de l’heuristique de la caractéristique d’Euler qui relie une probabilité de seuil et une caractéristique géométrique de l’ensemble d’excursion au-dessus de ce seuil. L’application proposée porte sur des données d’IRM mais la méthode pourrait en fait être testée sur n’importe quelles données spatiales, si elles sont obtenues par la mesure d’une réaction dans deux situations différentes, dans le but de tester si les réponses sont significativement différentes.

Les auteurs concluent leur article sur l’intérêt de leur méthode et sur ses avantages sur le *warping*. Si les deux méthodes estiment des seuils similaires, la méthode par régression offre un avantage significatif grâce à son faible temps de calcul et par sa simplicité d’implémentation. Ils insistent aussi sur l’absence d’hypothèses faite sur la matrice de covariance du champ.

Cependant, le travail des auteurs gagnerait sans doute à être approfondi - et corrigé, car des erreurs sont présentes. Il serait notamment intéressant de tester la méthode dans davantage d’expériences, ne serait-ce que pour savoir si les paramétrages choisis (la matrice de covariance de l’erreur, le nombre de seuils et le type d’espacement) conviennent toujours ou si leur efficacité ne vaut que pour l’expérience utilisée dans l’article. Le lecteur reste également dubitatif devant l’écart existant entre les courbures de Lipschitz estimées par régression dans l’article et celles obtenues par le *warping*, même si les seuils estimés par les deux méthodes sont proches. Ces quelques manques expliquent peut-être, en partie, pourquoi cette pré-publication, datant de 2011, n’a toujours pas été publiée.

C.3 Compte-rendu de l'article de Xue et Xiao ([2])

Dans leur article « Fractal and Smoothness Properties of Space-Time Gaussian Models », publié en 2011, Yun Xue et Yimin Xiao commencent par construire des champs aléatoires anisotropes à accroissements stationnaires. Ils se basent pour cela sur le théorème de représentation spectrale de la covariance qui permet de décrire un champ à accroissements stationnaires par sa fonction de covariance, représentée sous la forme d'une intégrale contre une certaine mesure. Ils décident ensuite de mettre sur la densité spectrale d'un tel champ une hypothèse d'encadrement faisant intervenir différents paramètres. La régularité des champs construits (existence de dérivées partielles en moyenne quadratique dans les directions des coordonnées, différentiabilité en moyenne quadratique ou presque sûre) est alors discutée, notamment en fonction des paramètres intervenant dans l'hypothèse d'encadrement de la densité spectrale. Suit une étude de la dimension fractale d'ensembles liés aux réalisations des champs construits et une application des résultats prouvés à deux classes de champs stationnaires dont la fonction de covariance ou la densité spectrale sont prescrites.

C.3.1 Modèle de champ gaussien à accroissements stationnaires

Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, centré, à accroissements stationnaires, et de fonction de covariance $C(s, t) := \text{Cov}(X(s), X(t))$ continue. Alors, d'après le théorème 33, il existe une mesure F positive et symétrique sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \min(1, \|\lambda\|^2) F(d\lambda) < \infty, \quad (\text{C.12})$$

et une matrice carrée symétrique positive M de taille $N \times N$, telles que :

$$C(s, t) = \int_{\mathbb{R}^N} (e^{i\langle s, \lambda \rangle} - 1)(e^{-i\langle t, \lambda \rangle} - 1) F(d\lambda) + \langle s, Mt \rangle, \quad (\text{C.13})$$

F est supposée absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et on note f la densité spectrale de X , qui est paire et vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \min(1, \|\lambda\|^2) f(\lambda) d\lambda.$$

On suppose également que X est un processus gaussien.

Dans la suite, on étudiera la régularité de X et la dimension fractale d'ensembles qui lui sont reliés. Le terme linéaire dans la représentation de la covariance n'aura donc pas d'influence sur ces problèmes, et on pose donc $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Quitte à considérer au lieu de X le processus $Y(\cdot) := X(\cdot) - X(0)$, on peut également supposer $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ presque sûrement.

Les champs étudiés dans cet article sont donc gaussiens, centrés, à accroissements stationnaires, de fonction de covariance continue et ont une mesure spectrale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On se ramène aux cas où le champ est nul en 0 et où la partie linéaire dans la représentation de la covariance est nulle. On note Ω l'espace de probabilité sur lequel sont définies ces variables aléatoires.

Remarque 53. La continuité de la fonction de covariance entraîne la continuité en moyenne quadratique du champ aléatoire, d'après la proposition (43).

L'intérêt à se limiter à cette classe de champs à accroissements stationnaires est de disposer de la représentation sous forme intégrale de la covariance et de pouvoir étudier certaines propriétés de ces champs en passant par des propriétés de leur densité spectrale.

D'ailleurs, les auteurs construisent leur modèle en posant une condition d'encadrement sur la densité spectrale.

Condition (C) Il existe des constantes $(c_1, c_2, c_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in (\mathbb{R}_+^*)^N$ telles que :

$$\gamma > \sum_{j=1}^N \frac{1}{\beta_j} \quad (\text{C.14})$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N / \|\lambda\| \geq c_3, \quad \frac{c_1}{\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{\beta_j}\right)^\gamma} \leq f(\lambda) \leq \frac{c_2}{\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{\beta_j}\right)^\gamma}. \quad (\text{C.15})$$

Cette hypothèse est particulièrement adaptée à l'étude de champs pour lesquels les différentes coordonnées du paramètre jouent des rôles différents, par exemple des champs spatio-temporels, et plus généralement des champs anisotropes. Quitte à faire une homothétie sur la variable λ , on peut supposer que **c_3 vaut 1**, ce qui est fait dans la suite de l'article.

La première remarque concernant cette hypothèse est qu'elle assure, sous réserve que $\int_{\|\lambda\| \leq 1} \|\lambda\|^2 f(\lambda) d\lambda < \infty$, l'intégrabilité de f et donc la possibilité que f soit effectivement une densité spectrale, puisqu'alors $\int_{\mathbb{R}^N} \min(1, \|\lambda\|^2) f(\lambda) d\lambda < \infty$ (voir la réciproque dans le théorème 33).

Proposition 54. Soit f une fonction mesurable positive définie sur \mathbb{R}^N vérifiant

$$\int_{\|\lambda\| \leq 1} \|\lambda\|^2 f(\lambda) d\lambda < \infty \quad (\text{C.16})$$

ainsi que l'encadrement (C.15). f est alors une densité spectrale sur \mathbb{R}^N si et seulement si les paramètres γ et les $(\beta_j)_{1 \leq j \leq N}$ vérifient l'inégalité (C.14).

Le lemme élémentaire qui suit est utilisé pour prouver la proposition 54 et le sera à d'autres occasions pour prouver la convergence ou la divergence d'une intégrale. Sa preuve repose simplement sur un changement de variable.

Lemme 55. Soient β et γ des réels strictement positifs. Il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^\beta)^\gamma} = \begin{cases} k a^{-(\gamma-\frac{1}{\beta})} & \text{si } \beta\gamma > 1, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

Preuve de la proposition 54. f est une densité spectrale si, et seulement si $\int_{\mathbb{R}^N} \min(1, \|\lambda\|^2) f(\lambda) d\lambda < \infty$ et, vu l'hypothèse d'intégrabilité de la proposition, cela est équivalent à $\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} f(\lambda) d\lambda < \infty$. Cette dernière condition se ramène à

l'intégrabilité de $\lambda \mapsto \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{\beta_j}\right)^\gamma}$ sur $[1, +\infty[$, puisque f vérifie l'encadrement (C.15) avec $c_3 = 1$.

Supposons vraie l'inégalité (C.14), l'application du lemme 55 va permettre de majorer l'intégrale $I := \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{\beta_j}\right)^\gamma}$. On note d'abord que :

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^N / \|\lambda\| > 1\} \subset \bigcup_{j_0=1}^N \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N / |\lambda_{j_0}| > \frac{1}{\sqrt{N}} \right\}.$$

Par conséquent, en utilisant aussi la parité de la fonction intégrée :

$$I \leq \sum_{j_0=1}^N 2^N \int_{1/\sqrt{N}}^{+\infty} d\lambda_{j_0} \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{N-1} \frac{d\lambda_{\setminus j_0}}{\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{\beta_j}\right)^\gamma},$$

où $d\lambda_{\setminus j_0}$ désigne $d\lambda_1 \dots d\lambda_{j_0-1} d\lambda_{j_0+1} \dots d\lambda_N$. (Cette notation sera utilisée à plusieurs occasions par la suite.) Montrons que chacun des termes de cette somme est fini dans le cas où $\gamma > \sum_{j=1}^N \frac{1}{\beta_j}$. On se contente de traiter le terme de la somme correspondant à $j_0 = 1$, noté I_1 ; les autres majorations se font de façon tout à fait analogue. Grâce au lemme 55, on obtient :

$$I_1 \lesssim \int_{1/\sqrt{N}}^{+\infty} \frac{d\lambda_1}{\left(\lambda_1^{\beta_1}\right)^{\gamma - \sum_{j=2}^N \frac{1}{\beta_j}}}.$$

Cette dernière intégrale est finie car, à cause de la condition (C.14),

$$\beta_1 \left(\gamma - \sum_{j=2}^N \frac{1}{\beta_j} \right) > 1.$$

On prouve l'implication réciproque par contraposée, en supposant $\gamma \leq \sum_{j=1}^N \frac{1}{\beta_j}$. On note alors :

$$\tau = \min \left\{ k \in \llbracket 1, N \rrbracket / \gamma \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{\beta_j} \right\}.$$

τ vérifie : $\sum_{j=1}^{\tau-1} \frac{1}{\beta_j} < \gamma \leq \sum_{j=1}^{\tau} \frac{1}{\beta_j}$ et donc $0 < \left(\gamma - \sum_{j=1}^{\tau-1} \frac{1}{\beta_j} \right) \beta_\tau \leq 1$. On commence par minorer I en restreignant le domaine d'intégration :

$$I \geq 2^N \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{N-1} d\lambda_{\setminus \tau} \int_1^{+\infty} \frac{d\lambda_\tau}{\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{\beta_j}\right)^\gamma}.$$

On applique de nouveau le lemme (55) en intégrant successivement suivant $\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}$:

$$I \geq \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{N-\tau} \int_0^{+\infty} d\lambda_{\tau+1} \dots d\lambda_N \int_1^{+\infty} \frac{d\lambda_\tau}{\left(\sum_{j=\tau}^N |\lambda_j|^{\beta_j}\right)^{\gamma - \sum_{j=1}^{\tau-1} \frac{1}{\beta_j}}}.$$

D'après le lemme 55, $\int_1^{+\infty} \frac{d\lambda_\tau}{\left(\sum_{j=\tau}^N |\lambda_j|^{\beta_j}\right)^{\gamma - \sum_{j=1}^{\tau-1} \frac{1}{\beta_j}}} = +\infty$, car $\left(\gamma - \sum_{j=1}^{\tau-1} \frac{1}{\beta_j}\right) \beta_\tau$ est dans $]0, 1[$. I est donc une intégrale divergente. \square

Autre point d'importance concernant la condition (C) : elle peut se formuler différemment, d'une façon qui est mise à profit dans plusieurs démonstrations de l'article. Pour cela, on pose :

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad H_j := \frac{\beta_j}{2} \left(\gamma - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i} \right), \quad Q := \sum_{j=1}^N \frac{1}{H_j}. \quad (\text{C.18})$$

L'existence des constantes c_1 et c_2 telles que l'encadrement (C.15) soit vérifié (avec $c_3 = 1$) est alors équivalente à l'existence de constantes c_4 et c_5 (dépendantes de N , c_1 , c_2 , des β_j et de γ) telles que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N / \|\lambda\| \geq 1, \quad \frac{c_4}{\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{H_j}\right)^{2+Q}} \leq f(\lambda) \leq \frac{c_5}{\left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^{H_j}\right)^{2+Q}}. \quad (\text{C.19})$$

Notation On introduit les notations suivantes qui seront notamment utilisées dans les démonstrations : si x et y sont des réels,

$$x \stackrel{\sim}{\leq} y \quad \text{ou} \quad y \stackrel{\sim}{\geq} x$$

signifient qu'il existe un réel strictement positif c tel que : $x \leq cy$, et :

$$x \stackrel{\simeq}{=} y$$

signifie qu'il existe un réel strictement positif d tel que : $x = dy$. Ces réels peuvent dépendre de N , de f , des β_j , des H_j , de Q , des constantes c_j précédemment définies ou d'autres constantes définies dans la suite, mais sont indépendants des variables de l'espace \mathbb{R}^N des paramètres.

C.3.2 Majoration du variogramme

Le résultat de cette partie, une majoration de la fonction variogramme de notre modèle, permet de prouver l'existence d'une version presque sûrement continue du champ d'intérêt, ainsi que des résultats sur la dimension de Hausdorff d'ensembles liés à ses réalisations, dans la partie C.3.4.

Lemme 56. Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, gaussien, centré, à accroissements stationnaires, admettant une densité spectrale qui vérifie l'inégalité (C.15). Alors, pour tout $T > 0$, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $(s, t) \in ([-T, T]^N)^2$:

$$\mathbb{E} [(X(s) - X(t))^2] \leq c \sum_{j=1}^N \sigma_j (|s_j - t_j|),$$

où les $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq N}$ sont définis sur \mathbb{R}_+ par :

$$r \longmapsto \sigma_j(r) = \begin{cases} r^{2H_j} & \text{si } 0 < H_j < 1, \\ r^2 |\log(r)| \mathbf{1}_{r \in]0, \frac{1}{2}[} + r^2 \mathbf{1}_{r \in \{0\} \cup]\frac{1}{2}, +\infty[} & \text{si } H_j = 1, \\ r^2 & \text{si } H_j > 1. \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

Remarque 57. L'expression de σ_j proposée dans l'article, dans le cas où $H_j = 1$, a été modifiée de manière à rendre correcte l'inégalité du lemme 56.

Démonstration. La majoration est obtenue en utilisant la représentation intégrale du variogramme (formule (C.4) de la section C.1.4), avec $M = 0$:

$$\forall (s, t) \in ([-T, T]^N)^2, \quad \mathbb{E} [(X(s) - X(t))^2] = 2 \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \cos(\langle s - t, \lambda \rangle)) f(\lambda) d\lambda,$$

et, notamment, la majoration de la densité spectrale $\lambda \mapsto f(\lambda)$ qui apparaît dans l'intégrand, donnée par l'inégalité (C.15) ou sa reformulation (C.19), valable pour $\|\lambda\| > 1$.

La majoration qui suit a pour effet de faire disparaître le produit scalaire auquel on applique la fonction cosinus, dans la représentation spectrale du variogramme.

On note $\hat{s}_0 = t$, $\hat{s}_1 = (s_1, t_2, \dots, t_N)$, $\hat{s}_2 = (s_1, s_2, t_3, \dots, t_N)$, \dots , $\hat{s}_{N-1} = (s_1, s_2, \dots, s_{N-1}, t_N)$, $\hat{s}_N = s$. On commence par majorer l'espérance en majorant $|X(s) - X(t)|$ par inégalité triangulaire :

$$\mathbb{E} [(X(s) - X(t))^2] \leq \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^N X(\hat{s}_k) - X(\hat{s}_{k-1}) \right)^2 \right].$$

En notant Z le vecteur $(X(\hat{s}_k) - X(\hat{s}_{k-1}))_{1 \leq k \leq N}$ et $\mathbf{1}$ le vecteur $(1, \dots, 1)$ de \mathbb{R}^N , on a :

$$\sum_{k=1}^N (X(\hat{s}_k) - X(\hat{s}_{k-1})) = \langle Z, \mathbf{1} \rangle$$

et donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X(s) - X(t))^2] &\leq \mathbb{E} (\|\mathbf{1}\|^2 \|Z\|^2) \\ &= N \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^N (X(\hat{s}_k) - X(\hat{s}_{k-1}))^2 \right) \\ &= N \sum_{k=1}^N \mathbb{E} [(X(\hat{s}_k) - X(\hat{s}_{k-1}))^2] \\ &= 2N \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \cos(h_k \lambda_k)) f(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

où $h = (h_1, \dots, h_N) := (s - t)$. L'encadrement (C.19) de la densité spectrale est valable sur $\mathbb{R}^N \setminus B(0, 1)$ mais pas sur $B(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X(s) - X(t))^2] &\leq \underbrace{2N \sum_{k=1}^N \int_{B(0,1)} (1 - \cos(h_k \lambda_k)) f(\lambda) d\lambda}_{I_1(h)} \\ &\quad + \underbrace{2N \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} \frac{1 - \cos(h_k \lambda_k)}{\left(\sum_{i=1}^N |\lambda_i|^{H_i} \right)^{Q+2}} d\lambda}_{I_2^k(h)}. \end{aligned}$$

L'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \cos(x) \leq x^2$ permet de majorer $I_1(h)$:

$$I_1(h) \leq 2N \sum_{k=1}^N h_k^2 \int_{B(0,1)} \lambda_k^2 f(\lambda) d\lambda.$$

L'intégrale qui figure dans le majorant est bien une quantité finie, par propriété de f , densité spectrale.

$$I_1(h) \lesssim \sum_{k=1}^N h_k^2 \lesssim \sum_{k=1}^N \sigma_k(|h_k|).$$

La dernière inégalité est due au fait que chaque coordonnée h_k de $s - t$ est bornée, et on a ainsi :

- si $0 < H_k < 1$, $h_k^2 \leq (2T)^{2(1-H_k)} h_k^{2H_k}$;
- si $H_k = 1$ et $0 < |h_k| \leq \frac{1}{2}$, $h_k^2 \leq h_k^2 |\log(|h_k|)| |\log(\frac{1}{2})|^{-1}$.

Pour tout k dans $[[1, N]]$, $I_2^k(h)$ peut être majoré en notant que :

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^N / \|\lambda\| > 1\} \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N / |\lambda_k| > \frac{1}{\sqrt{N}} \right\} \sqcup \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N / \exists j_0 \neq k / |\lambda_{j_0}| > \frac{1}{\sqrt{N}} \right\},$$

ce qui permet de majorer cette intégrale par la somme de deux intégrales (on utilise également la parité de la fonction intégrée en chacune de ses variables) :

$$\begin{aligned} I_2^k(h) &\leq 2^N \underbrace{\int_{1/\sqrt{N}}^{+\infty} (1 - \cos(h_k \lambda_k)) d\lambda_k \int_{\mathbb{R}_+^{N-1}} \frac{d\lambda_{\setminus k}}{\left(\sum_{i=1}^N |\lambda_i|^{H_i}\right)^{Q+2}}}_{I_3^k(h)} \\ &+ 2^N \underbrace{\int_0^1 (1 - \cos(h_k \lambda_k)) d\lambda_k \int_{1/\sqrt{N}}^{+\infty} d\lambda_{j_0} \int_{\mathbb{R}_+^{N-2}} \frac{d\lambda_{\setminus k, j_0}}{\left(\sum_{i=1}^N |\lambda_i|^{H_i}\right)^{Q+2}}}_{I_4^k(h)}, \end{aligned}$$

où $d\lambda_{\setminus k}$ désigne $d\lambda_1 \dots d\lambda_{k-1} d\lambda_{k+1} \dots d\lambda_N$ et $d\lambda_{\setminus k, j_0}$ a une signification analogue.

En appliquant $N - 1$ fois le lemme 55, puis en utilisant l'inégalité :

$$1 - \cos(x) \leq x^2 \mathbf{1}_{|x| \leq 1} + 2 \mathbf{1}_{|x| > 1},$$

on majore $I_3^k(h)$:

$$\begin{aligned} I_3^k(h) &\lesssim \int_{1/\sqrt{N}}^{+\infty} \frac{1 - \cos(h_k \lambda_k)}{|\lambda_k|^{2H_k+1}} d\lambda_k \\ &\lesssim h_k^2 \int_{1/\sqrt{N}}^{1/|h_k|} \frac{\lambda_k^2}{|\lambda_k|^{2H_k+1}} d\lambda_k + \int_{1/|h_k|}^{+\infty} \frac{d\lambda_k}{|\lambda_k|^{2H_k+1}} \quad (\text{C.21}) \\ &\lesssim \sigma_k(|h_k|). \end{aligned}$$

(Dans le cas où $|h_k| > \sqrt{N}$, on remplace le terme majorant dans l'inégalité (C.21) par la seule intégrale sur $[1/|h_k|, \infty[$.)

C'est encore le lemme 55 qui est utilisé pour majorer le terme $I_4^k(h)$:

$$I_4^k(h) \lesssim |h_k|^2.$$

On déduit des majorations de $I_1(h)$ et, pour tout k dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, de $I_3^k(h)$ et de $I_4^k(h)$ la majoration de $\mathbb{E} [(X(s) - X(t))^2]$ du lemme.

La preuve a été menée en supposant que la partie quadratique dans la représentation du variogramme (formule (C.4)) était nulle, mais le résultat reste vrai lorsque l'on ajoute ce terme quadratique. En effet, en notant M la matrice symétrique positive qui intervient alors et encore $\|\cdot\|$ la norme matricielle subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^N , l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned} \forall h \in [-2T, 2T]^N, \quad 0 \leq \langle h, Mh \rangle \leq \|M\| \|h\|^2 &= \|M\| \sum_{i=1}^N h_i^2 \\ &\lesssim \|M\| \sum_{i=1}^N \sigma_i(|h_i|). \end{aligned}$$

□

Corollaire C.3.1. Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, gaussien, centré, à accroissements stationnaires, admettant une densité spectrale qui vérifie l'inégalité (C.15). X admet alors une version presque sûrement continue.

Preuve. On déduit ce corollaire du lemme 56, grâce auquel X remplit les hypothèses de la conséquence du théorème de Kolmogorov-Centsov portant sur les champs gaussiens (corollaire C.1.1). En effet,

$$\forall h \in [-2T, 2T]^N, \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \sigma_j(|h_j|) \lesssim |h_j|^2,$$

et ainsi : $v(h) \lesssim \|h\|^2$.

□

N.B. On confondra dans la suite un champ vérifiant les hypothèses du corollaire et sa version continue.

Remarque 58. Les auteurs prouvent également une minoration du variogramme où le terme minorant est, à une constante près, égal au terme majorant.

Le variogramme peut donc être encadré de la façon suivante : pour tout $T > 0$, il existe des constantes strictement positives c et c' telles que, pour tout $(s, t) \in ([-T, T]^N)^2$,

$$c' \sum_{j=1}^N \sigma_j(|s_j - t_j|) \leq \mathbb{E} [(X(s) - X(t))^2] \leq c \sum_{j=1}^N \sigma_j(|s_j - t_j|).$$

C.3.3 Existence de dérivées partielles et différentiabilité

Dans cette section, les auteurs s'intéressent à la régularité (sous des sens que nous allons préciser) de la classe de champs étudiée dans l'article et à des propriétés relatives à celle-ci. Ils prouvent des résultats généraux sur les champs à accroissements stationnaires et en déduisent des corollaires portant plus spécifiquement sur la classe de

champs gaussiens centrés, nuls en 0, à accroissements stationnaires, vérifiant la condition (C). On verra que, dans les deux corollaires de cette section, la position des H_j par rapport à 1 entre en jeu et permet de fournir des conditions nécessaires et/ou suffisantes de régularité.

Dérivabilité selon un vecteur unitaire, au sens L^2

La définition de la dérivabilité en moyenne quadratique selon un vecteur unitaire est rappelée dans la partie C.1.5. Le théorème 45 de cette même partie montre que, pour la classe de champs considérée dans l'article, l'étude de la dérivabilité peut se faire par l'intermédiaire de la fonction variogramme. Les auteurs en tirent le corollaire suivant portant plus spécifiquement sur le modèle proposé.

Corollaire C.3.2 (du théorème 45). Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, gaussien, centré, à accroissements stationnaires, admettant une densité spectrale qui vérifie la condition (C). Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la dérivée partielle en moyenne quadratique $X'_j(t)$ existe si, et seulement si :

$$\beta_j \left(\gamma - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_j} \right) > 2,$$

ou, de façon équivalente, $H_j > 1$.

Idée de la preuve. D'après le théorème 45, où la notation $D_{h,k}^j(t)$ a été introduite, on peut se ramener à prouver que $\lim_{h,k \rightarrow \infty} D_{h,k}^j(t)$ existe si et seulement si $H_j > 1$.

Pour le sens direct, on utilise la représentation sous forme intégrale du variogramme, qui permet d'écrire $D_{h,k}^j(t)$ sous la forme d'une intégrale. Le théorème de convergence dominée permet alors de prouver l'existence d'une limite pour cette quantité, lorsque $h, k \rightarrow \infty$, en ayant recours au lemme 55 pour démontrer l'intégrabilité de la fonction majorante, sous l'hypothèse $H_j > 1$.

La démonstration du sens réciproque est faite par l'absurde en supposant $H_j < 1$. Le lemme de Fatou permet de minorer l'intégrale d'intérêt par une intégrale qui s'avère divergente - c'est de nouveau le lemme 55 qui permet de l'affirmer. □

La condition $H_j > 1$ est en fait équivalente à l'existence de dérivées partielles à l'ordre 2 pour la fonction variogramme, dans les N directions des vecteurs de base, non seulement en 0, comme le dit le théorème 45, mais aussi en tout point de \mathbb{R}^N .

Proposition 59. *Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, gaussien, centré, à accroissements stationnaires, admettant une densité spectrale qui vérifie la condition (C). Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\frac{\partial^2 v}{\partial h_j^2}$ existe en tout point de \mathbb{R}^N si, et seulement si $H_j > 1$.*

Idée pour la preuve. La démonstration du sens réciproque de cette propriété se fait en utilisant la représentation de v sous forme intégrale et les théorèmes de convergence dominée ou de dérivation sous le signe intégrale. On prouve ainsi :

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial h_j^2}(h) = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_j^2 \cos(\langle h, \lambda \rangle) f(\lambda) d\lambda.$$

□

En outre, le théorème suivant donne certaines propriétés des champs dérivés, dans le cas où ils existent.

Théorème 60. *Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , gaussien centré, à accroissements stationnaires. On suppose que N dérivées partielles à l'ordre 2, les $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial h_j^2}\right)_{1 \leq j \leq N}$ de la fonction variogramme existent. Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la fonction de covariance du champ aléatoire gaussien centré $X'_j = \{X'_j(t), t \in \mathbb{R}^N\}$, notée C_j , admet pour expression :*

$$C_j(s, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial h_j^2}(s - t). \quad (\text{C.22})$$

En particulier, X'_j est un champ aléatoire stationnaire.

Convention Le terme « gaussien » s'applique aussi, par convention, au cas dégénéré d'une variable aléatoire presque sûrement constante, c'est-à-dire de variance nulle.

Idée de la preuve. L'existence des X'_j pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ est une conséquence de l'existence de dérivées partielles à l'ordre 2, les $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial h_j^2}\right)_{1 \leq j \leq N}$, en 0, dans toutes les directions, qui permet au théorème 45 de s'appliquer. Le fait que ces champs aléatoires soient gaussiens et centrés découle de leur construction par passage à la limite de champs gaussiens et centrés. On applique en fait une généralisation du lemme suivant à des champs aléatoires définis sur \mathbb{R}^N .

Lemme 61. Si une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes et centrées converge dans $L^2(\Omega)$, alors la limite est une variable aléatoire centrée et de loi gaussienne.

Démonstration. Notons $(Z_n)_{n \geq 0}$ une telle suite de variables aléatoires et Z sa limite dans $L^2(\Omega)$.

Le caractère centré de la limite se vérifie quelle que soit la loi des variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On en donne ici une preuve mais cela sera prouvé de nouveau par la suite, en même temps que le caractère gaussien de Z . La convergence de $(Z_n)_{n \geq 0}$ vers Z dans $L^2(\Omega)$ entraîne la même convergence dans $L^1(\Omega)$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, $|\mathbb{E}(Z_n - Z)| \leq \mathbb{E}(|Z_n - Z|)$ et donc la suite $(\mathbb{E}(Z_n))$ constante égale à zéro converge vers $\mathbb{E}(Z)$ qui doit valoir zéro.

Le caractère gaussien de la limite peut se vérifier à l'aide de la fonction caractéristique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on note $\phi_n(u) := \exp\left(-\frac{\sigma_n^2 u^2}{2}\right)$ la fonction caractéristique de Z_n (où $\sigma_n^2 = \mathbb{E}[Z_n^2]$) et ϕ la fonction caractéristique de Z . La convergence dans $L^2(\Omega)$ entraîne la convergence en loi ; par conséquent, d'après le théorème de Lévy, pour tout réel u , $(\phi_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\phi(u)$.

En outre, la convergence dans $L^2(\Omega)$ entraîne, par inégalité triangulaire, la convergence de σ_n vers $\sigma := \|Z\|_{L^2}$ (quantité finie puisque $Z \in L^2(\Omega)$). Donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(\phi_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\exp\left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$; on en déduit que la variable aléatoire limite est de loi gaussienne et on obtient une preuve supplémentaire de son caractère centré.

□

Le théorème 60 porte sur un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , il s'agit donc de prouver que si m est un entier naturel non nul et $(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{R}^N)^m$, le vecteur aléatoire $(X'_j(t_1), \dots, X'_j(t_m))$ est gaussien, c'est-à-dire que n'importe quelle combinaison linéaire de ses coordonnées est gaussienne. Une telle combinaison linéaire peut être vue comme la limite dans $L^2(\Omega)$, lorsque h tend vers 0, d'une combinaison linéaire de taux d'accroissements dans la direction e_j , par définition du vecteur dérivé X'_j .

Il suffit donc d'appliquer le lemme pour prouver que X'_j est un vecteur gaussien et centré (éventuellement dégénéré).

L'expression (C.22) se déduit par passage à la limite de la covariance des $(X_{j,h}(u))_{u \in \mathbb{R}^N}$, exprimée en utilisant la fonction variogramme. En effet, si s et t sont deux points de \mathbb{R}^N , alors la convergence de $(X_{j,h}(s))_{h>0}$ et de $(X_{j,h}(t))_{h>0}$ dans $L^2(\Omega)$, respectivement vers $X'_j(s)$ et $X'_j(t)$, entraîne que $\mathbb{E}(X_{j,h}(s)X_{j,h}(t))$ tend, lorsque h tend vers 0, vers $\mathbb{E}(X'_j(s)X'_j(t)) = C_j(s, t)$. (C'est une conséquence de la continuité du produit scalaire de $L^2(\Omega) : (X, Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$ relativement à la norme associée qui est la norme L^2 .)

Enfin, puisque X'_j est gaussien et que sa fonction de covariance $C_j(s, t)$ s'exprime comme une fonction de $s - t$, il est également stationnaire. \square

La propriété qui suit donne la fonction de covariance du champ X et d'un de ses champs dérivés X'_j . On en aura besoin pour prouver le théorème 64.

Proposition 62. *Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , gaussien centré, à accroissements stationnaires. On suppose que les $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial h_j^2}\right)_{1 \leq j \leq N}$ existent en tout point de \mathbb{R}^N . Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la fonction de covariance de X et de X'_j , admet pour expression :*

$$\text{Cov}(X(s), X'_j(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial h_j}(t) + \frac{\partial v}{\partial h_j}(t - s) \right). \quad (\text{C.23})$$

Preuve. On procède de la même manière que pour obtenir l'expression de la fonction de covariance de X'_j en fonction du variogramme : on commence par exprimer, pour $h \neq 0$, la covariance $\text{Cov} \left(X(s), \frac{X(t + he_j) - X(t)}{h} \right)$ et on fait tendre h vers 0. \square

Différentiabilité en moyenne quadratique

La définition de la différentiabilité en moyenne quadratique est donnée dans la partie C.1.5. Le théorème suivant permet, lorsque le champ considéré est à accroissements stationnaires, de ramener à l'étude des dérivées à l'ordre 2 de la fonction variogramme l'étude de la différentiabilité en moyenne quadratique du champ.

Théorème 63. *Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, gaussien, centré et à accroissements stationnaires. Si toutes les dérivées à l'ordre 2 de la fonction variogramme existent et qu'elles sont continues alors X est différentiable en moyenne quadratique en tout point de \mathbb{R}^N .*

Idée de la preuve. D'après le théorème 45, les hypothèses du théorème 63 impliquent l'existence des dérivées partielles en moyenne quadratique $X'_j(t)$, pour $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. La proposition 49 nous engage à prouver que le vecteur $\Delta(t) := (X'_1(t), \dots, X'_N(t))$ vérifie la relation de différentiabilité (C.7).

Soit $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{S}^{N-1}$. On développe $E := \mathbb{E} \left[\left(\frac{X(t+hu) - X(t) - \langle hu, \Delta(t) \rangle}{h} \right)^2 \right]$ de manière à faire apparaître la fonction variogramme. Le calcul fait apparaître trois termes que l'on traite séparément :

$$E = \frac{1}{h^2} v(hu) + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^N u_j X'_j(t) \right)^2 \right] - \frac{1}{h} \sum_{j=1}^N u_j v'_j(hu).$$

On note $J(0)$ la matrice hessienne de v en 0. Les premier et troisième termes de la somme admettent une limite, respectivement $\frac{1}{2} u^\top J(0) u$ et $u^\top J(0) u$, d'après la formule de Taylor.

Quant au second terme :

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^N u_j X'_j(t) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_i u_j \mathbb{E}[X'_i(t) X'_j(t)],$$

il fait apparaître des termes de covariance $\mathbb{E}[X'_i(t) X'_j(t)]$ entre les différents champs dérivés de X . Pour les calculer, il suffit alors de s'inspirer de ce qui a été fait précédemment en cherchant la limite, pour $(l, m) \in (\mathbb{R}^*)^2$, de :

$$\mathbb{E} \left(\frac{X(t+le_i) - X(t)}{l} \times \frac{X(t+me_j) - X(t)}{m} \right).$$

On obtient :

$$\mathbb{E} \left(\frac{X(t+le_i) - X(t)}{l} \times \frac{X(t+me_j) - X(t)}{m} \right) = \frac{1}{2lm} (v(le_i) + v(-me_j) - v(le_i - me_j)),$$

(Le calcul dans le cas $i = j$ a déjà été mené dans la preuve du théorème 60.) Cette quantité converge, lorsque l et m convergent vers l'infini, vers $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial h_i \partial h_j}$. On en déduit

que le deuxième terme de la somme E vaut $\frac{1}{2} u^\top J(0) u$.

Ainsi, la somme des limites des trois termes de E , lorsque h tend vers 0, vaut 0, ce qui prouve que X est différentiable en moyenne quadratique en t et que $\nabla_X(t) = \Delta(t)$. \square

Différentiabilité d'une version du champ aléatoire

Les auteurs s'intéressent au problème de l'existence d'une version presque sûrement différentiable d'un champ aléatoire.

Théorème 64. *Soit X un champ aléatoire séparable défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, gaussien, centré, à accroissements stationnaires, admettant une densité spectrale qui vérifie la condition (C).*

(i) *S'il existe $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $H_j > 1$ alors X admet une version \tilde{X} telle que \tilde{X}'_j soit presque sûrement continu.*

(ii) *Si, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $H_j > 1$, alors X admet une version \tilde{X} qui est continûment différentiable, c'est-à-dire que :*

$$\mathbb{P} \left(\forall t \in \mathbb{R}^N, \forall u \in \mathcal{S}^{N-1}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{X}(t+hu) - \tilde{X}(t) - \langle hu, \nabla_{\tilde{X}}(t) \rangle}{h} = 0 \right) = 1.$$

Idée de la preuve. Si $H_j > 1$, on sait déjà, grâce au corollaire C.3.2 que, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, $X'_j(t)$ existe.

Pour prouver le point (i) et l'existence d'une version continue de X'_j , on cherche à appliquer le corollaire du théorème de Kolmogorov-Centsov portant sur les champs gaussiens (corollaire C.1.1) en prouvant qu'il existe, pour tout $T > 0$, des constantes $\eta > 0$ et $c > 0$ telles que :

$$\forall (s, t) \in ([-T, T]^N)^2, \quad \mathbb{E} [(X'_j(s) - X'_j(t))^2] \leq c \|s - t\|^\eta.$$

Pour s et t dans $[-T, T]^N$, on définit les $(\hat{s}_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ de la même façon que dans la preuve du lemme 56, et on effectue les mêmes majorations appliquées au champ X'_j , ce qui permet d'obtenir :

$$\mathbb{E} [(X'_j(s) - X'_j(t))^2] \leq N \sum_{k=1}^N \mathbb{E} [(X'_j(\hat{s}_k) - X'_j(\hat{s}_{k-1}))^2].$$

On majore ensuite chacune des espérances apparaissant dans la somme précédente : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^N)^2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X'_j(x) - X'_j(y))^2] &= \mathbb{E}[X'_j(x)^2] + \mathbb{E}[X'_j(y)^2] - 2\mathbb{E}[X'_j(x)X'_j(y)] \\ &= 2C_j(0) - 2C_j(x - y), \end{aligned}$$

où C_j est défini dans le théorème 60 et s'exprime en fonction du variogramme car, grâce à la condition $H_j > 1$, v a des dérivées partielles à l'ordre 2 dans la direction du j^e vecteur de base.

De nouveau, comme dans la preuve du lemme 56, la représentation sous forme intégrale du variogramme de X (dont on déduit une représentation intégrale de C_j) permet de trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\mathbb{E} [(X'_j(s) - X'_j(t))^2] \lesssim \|s - t\|^\eta.$$

On déduit donc du théorème de Kolmogorov-Centsov (corollaire C.1.1) que le champ aléatoire X'_j admet une version continue, que l'on notera encore X'_j . On rappelle que le champ \tilde{X} est supposé continu (depuis la fin de la partie C.3.2). On définit alors le champ aléatoire \tilde{X} par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^N, \quad \tilde{X}(t) = X(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_N) + \int_0^{t_j} X'_j(t_1, \dots, t_{j-1}, s_j, t_{j+1}, \dots, t_N) ds_j.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, $\tilde{X}'_j(t) = X'_j(t)$ p.s.. (On constate qu'il s'agit d'une dérivée partielle en un sens presque sûr et pas seulement au sens L^2 .)

Vérifions que \tilde{X} est presque sûrement continu et qu'il s'agit d'une version de X .

\tilde{X} est continu parce que X et X'_j sont continus, et que l'intégrale d'une fonction continue est continue.

Pour s'assurer que, pour $t \in \mathbb{R}^N$, $\tilde{X}(t) = X(t)$ presque sûrement, il suffit de vérifier que $\mathbb{E}[(X(t) - \tilde{X}(t))^2] = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X(t) - \tilde{X}(t))^2] &= \mathbb{E} [X(t)^2] + \mathbb{E} [\tilde{X}(t)^2] - 2\mathbb{E} [X(t)\tilde{X}(t)] \\ &= v(t) + \mathbb{E} [\tilde{X}(t)^2] - 2\mathbb{E} [X(t)\tilde{X}(t)]. \end{aligned}$$

Intéressons-nous d'abord à la variance de $\tilde{X}(t)$. Pour $u \in \mathbb{R}$, notons $t_u^j = (t_1, \dots, t_{j-1}, u, t_{j+1}, \dots, t_N)$ et $0_u^j = (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$ (le u étant situé à la j^e coordonnée). En développant le carré $\tilde{X}(t)^2$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\tilde{X}(t)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[X(t_0^j)^2 \right] + \int_0^{t_j} \int_0^{t_j} \mathbb{E} \left[X_j'(t_{s_j}^j) X_j'(t_{w_j}^j) \right] ds_j dw_j \\ &\quad + 2 \int_0^{t_j} \mathbb{E} \left[X(t_0^j) X_j'(t_{s_j}^j) \right] ds_j \\ &= v(t_0^j) + \frac{1}{2} \int_0^{t_j} \int_0^{t_j} \frac{\partial^2 v}{\partial h_j^2}(0_{s_j-w_j}^j) ds_j dw_j + \int_0^{t_j} \left(\frac{\partial v}{\partial h_j}(t_{s_j}^j) + \frac{\partial v}{\partial h_j}(0_{s_j}^j) \right) ds_j \end{aligned}$$

car la covariance de X_j' est donnée par le théorème 60 et la covariance entre X et X_j' par la proposition 62. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\tilde{X}(t)^2 \right] &= v(t_0^j) + \frac{1}{2} \int_0^{t_j} \left(\frac{\partial v}{\partial h_j}(0_{t_j-w_j}^j) - \frac{\partial v}{\partial h_j}(0_{-w_j}^j) \right) dw_j + v(t) - v(t_0^j) + v(0_{t_j}^j) - v(0) \\ &= \frac{1}{2} [-v(0) + v(0_{t_j}^j) + v(0_{-t_j}^j) - v(0)] + v(t) + v(0_{t_j}^j) - v(0) \\ &= v(t), \end{aligned}$$

car v est une fonction paire.

Prouver que $\mathbb{E} \left[(X(t) - \tilde{X}(t))^2 \right] = 0$ revient donc à montrer, d'après ce qui précède, que $\mathbb{E} \left[X(t) \tilde{X}(t) \right] = v(t)$, ce qui se fait avec des manipulations semblables à celles qui viennent d'être effectuées.

Reste maintenant à prouver le point (ii). L'application du point (i) à X avec $j = 1$ donne l'existence d'une version de X , notée $\tilde{X}^{(1)}$, telle que $\frac{\partial \tilde{X}^{(1)}}{\partial t_1}$ soit p.s. continue. Puis, l'application de (i) à $\tilde{X}^{(1)}$ avec $j = 2$ donne une version de $\tilde{X}^{(1)}$ (donc de X), notée $\tilde{X}^{(2)}$, telle que $\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}}{\partial t_1}$ et $\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}}{\partial t_2}$ soient p.s. continues.

En appliquant en tout N fois le point (i) de façon récursive, avec j variant de 1 à N , on exhibe finalement une version $\tilde{X}^{(N)}$ de X telle que ses dérivées partielles à l'ordre 1 dans les N directions soient presque sûrement continues.

Puisque, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\frac{\partial \tilde{X}^{(N)}}{\partial t_j}$ est une dérivée partielle de $\tilde{X}^{(N)}$, non seulement au sens L^2 mais aussi presque sûrement, et que toutes ces $\frac{\partial \tilde{X}^{(N)}}{\partial t_j}$ sont presque sûrement continues, on en déduit que $\tilde{X}^{(N)}$ est presque sûrement différentiable. \square

C.3.4 Dimensions fractales d'ensembles liés aux champs

Dans cette partie, Xue et Xiao cherchent à déterminer la mesure de Hausdorff de différents ensembles liés aux trajectoires d'un champ aléatoire vectoriel. Les résultats qu'ils énoncent ont déjà été établis pour des champs isotropes (par exemple, le mouvement brownien fractionnaire). Dans son article [32], Xiao a déjà prouvé des résultats sous des hypothèses très proches de celles qui vont être présentées, applicables à des champs gaussiens anisotropes. Mais ces théorèmes ne s'appliquaient pas à des champs

réguliers dans une certaine direction, plus précisément, tous les H_j pour $1 \leq j \leq N$ devaient être strictement inférieurs à 1. Ce n'est pas le cas ici.

Définition 65. Si X est un champ aléatoire à valeurs réelles, gaussien, centré, défini sur \mathbb{R}^N , on définit, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le champ aléatoire gaussien $\mathbf{X}^{(p)}$ de paramètres (N, p) , par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{X}^{(p)}(t) = (X_1(t), \dots, X_p(t)),$$

où X_1, \dots, X_p sont des copies indépendantes de X .

Notation On notera $\dim_{\mathcal{H}}(E)$ la dimension de Hausdorff d'un ensemble E .

Les ensembles liés au champ $\mathbf{X}^{(p)}$ restreint au pavé $[0, 1]^N$, dont on cherche à déterminer la dimension de Hausdorff, sont :

- l'image de $[0, 1]^N$ par $\mathbf{X}^{(p)} : \mathbf{X}^{(p)}([0, 1]^N)$;
- son graphe : $\text{Gr}\mathbf{X}^{(p)}([0, 1]^N) := \left\{ \left(t, \mathbf{X}^{(p)}(t) \right), t \in [0, 1]^N \right\}$;
- ses ensembles de niveau : pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\left(\mathbf{X}^{(p)} \right)^{-1}(\{x\}) = \{t \in [0, 1]^N / \mathbf{X}^{(p)}(t) = x\}$.

Les hypothèses qui vont permettre d'énoncer des résultats sont les suivantes. Soient $(\overline{H}_1, \dots, \overline{H}_N) \in]0, 1]^N$. On suppose (cas auquel on pourra se ramener) que :

$$0 < \overline{H}_1 \leq \dots \leq \overline{H}_N \leq 1.$$

Condition (D1) : Pour tout $\eta > 0$, il existe des constantes $\delta_0 > 0$ et $c \geq 1$ telles que pour tous $(s, t) \in [0, 1]^{2N}$ tels que $|s_j - t_j| \leq \delta_0$:

$$c \sum_{j=1}^N |s_j - t_j|^{2\overline{H}_j + \eta} \leq \mathbb{E} [(X(t) - X(s))^2] \leq c^{-1} \sum_{j=1}^N |s_j - t_j|^{2\overline{H}_j - \eta}$$

Condition (D2) : Pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, il existe une constante $d > 0$ telle que, pour tous $(u, t) \in [\epsilon, 1]^{2N}$,

$$\text{Var}(X(u)|X(t)) \geq d \sum_{j=1}^N |u_j - t_j|^{2\overline{H}_j + \eta}.$$

Théorème 66. Soit $\mathbf{X}^{(p)}$ un champ gaussien de paramètres (N, p) , construit à partir du champ à valeurs réelles, gaussien et centré X . Si X vérifie la condition (D1) alors, avec probabilité 1,

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\mathbf{X}^{(p)}([0, 1]^N) \right) = \min \left(p, \sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j} \right) \quad (\text{C.24})$$

et

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\text{Gr}\mathbf{X}^{(p)}([0, 1]^N) \right) = \min_{1 \leq k \leq N} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\overline{H}_k}{\overline{H}_j} + N - k + (1 - \overline{H}_k)p, \sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j} \right). \quad (\text{C.25})$$

Introduisons une notation qui sera utile par la suite.

Notation On note $(N_k^{(p)})_{1 \leq k \leq N}$ la suite de terme général :

$$N_k^{(p)} = \sum_{j=1}^k \frac{\overline{H}_k}{\overline{H}_j} + N - k + (1 - \overline{H}_k)p,$$

intervenant dans la formule (C.25).

Théorème 67. Soit $\mathbf{X}^{(p)}$ un champ gaussien de paramètres (N, p) , construit à partir du champ à valeurs réelles, gaussien et centré X . Si X vérifie les conditions (D1) et (D2) alors :

(i) Si $\sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j} < p$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, presque sûrement,

$$\left(\mathbf{X}^{(p)}\right)^{-1}(\{x\}) = \emptyset \quad (\text{C.26})$$

(ii) Si $\sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j} > p$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, avec probabilité non nulle,

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\left(\mathbf{X}^{(p)}\right)^{-1}(\{x\}) \right) = \min_{1 \leq k \leq N} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\overline{H}_k}{\overline{H}_j} + N - k - \overline{H}_k p \right). \quad (\text{C.27})$$

Le corollaire suivant est une application des deux théorèmes précédents à la classe de champs aléatoires étudiée dans l'article. Il est dû au fait que le modèle proposé par les auteurs remplit les conditions (D1) et (D2). Pour la vérification de la condition (D1), il suffit de se référer au lemme 56 et à la remarque 58. Quant à la condition (D2), sa vérification découle du théorème numéroté 3.1 dans [2], une conséquence du lemme 56. L'énoncé et la preuve de ce théorème ont été omis dans le présent rapport.

Corollaire C.3.3. Soit $\mathbf{X}^{(p)}$ un champ gaussien de paramètres (N, p) , construit à partir du champ X à valeurs réelles, gaussien et centré, à accroissements stationnaires, dont la densité spectrale vérifie la condition (C). On suppose que les H_j , définis par (C.18), vérifient : $H_1 \leq \dots \leq H_N$. Alors :

(i) Avec probabilité 1, (C.24) et (C.25) sont vérifiées avec, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\overline{H}_j = \min(1, H_j)$.

(ii) Si, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $H_j \leq 1$ (soit $\overline{H}_j = H_j$) et que $\sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j} > p$ alors, avec

probabilité non nulle, (C.27) est vraie.

Par exemple, si tous les paramètres $(H_j)_{1 \leq j \leq N}$ du champ sont supérieurs à 1, alors la dimension de l'image de $\mathbf{X}^{(p)}$ vaut $\min(p, N)$ et la dimension du graphe de $\mathbf{X}^{(p)}$ vaut N .

C.3.5 Application des résultats à des modèles stationnaires espace-temps

Les résultats qui viennent d'être présentés sont appliqués à deux classes de champs aléatoires tirées d'articles antérieurs à celui de Xue et de Xiao. Il s'agit de champs aléatoires stationnaires indexés par l'espace et le temps.

Le terme « espace-temps » indique que le paramètre est de la forme (x, t) , où x décrit \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$) et t décrit \mathbb{R} . Les champs aléatoires espace-temps permettent de modéliser des phénomènes variant à la fois dans l'espace et dans le temps. La stationnarité d'un champ entraînant celle de ses accroissements, il sera possible d'appliquer aux deux modèles présentés les résultats précédemment prouvés dans l'article.

Premier modèle Le premier type de modèle stationnaire espace-temps étudié est défini à partir de sa fonction de covariance (les constantes intervenant sont $(\sigma, a, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in]0, 1]^3$) :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \quad C(x, t) = \frac{\sigma^2}{(1 + a|t|^{2\alpha})^{\beta N/2}} \exp\left(-\frac{c|x|^{2\gamma}}{(1 + a|t|^{2\alpha})^{\beta\gamma}}\right). \quad (\text{C.28})$$

D'après des travaux antérieurs à l'article étudié ([33] et [34]), la formule (C.28) définit bien une fonction de covariance. Si un champ aléatoire gaussien X vérifie $\text{Cov}(X(x, t), X(y, s)) = C(x - y, s - t)$, il est stationnaire (d'après la proposition 32), en espace-temps en l'occurrence.

Après avoir prouvé que les champs de ce type, supposés aussi gaussiens, centrés et stationnaires, vérifient les conditions (D1) et (D2), on peut appliquer les résultats de la section précédente pour connaître la dimension de Hausdorff d'ensembles liés aux réalisations de ces champs.

Proposition 68. *Soit $X = \{X(x, t), (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\}$ un champ aléatoire à valeurs réelles, gaussien, centré, stationnaire, dont la fonction de covariance est de la forme (C.28). Alors, pour tout $M > 0$, il existe des constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que, pour tous $(x, t) \in [-M, M]^{d+1}$, $(y, s) \in [-M, M]^{d+1}$:*

$$c_1 (\|x - y\|^{2\gamma} + |t - s|^{2\alpha}) \leq \mathbb{E} [(X(x, t) - X(y, s))^2] \leq c_2 (\|x - y\|^{2\gamma} + |t - s|^{2\alpha}) \quad (\text{C.29})$$

et

$$\text{Var}(X(x, t)|X(y, s)) \geq c_1 (\|x - y\|^{2\gamma} + |t - s|^{2\alpha}) \quad (\text{C.30})$$

Remarque 69. La variable spatiale est dans \mathbb{R}^d et pas dans \mathbb{R} et il pourrait donc sembler que les inégalités (C.29) et (C.30) ne sont pas les conditions (D1) et (D2). Mais, grâce au lemme 70 qui figure ci-dessous, de ces deux inégalités découlent directement les conditions (D1) et (D2).

Lemme 70. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $q > 0$, il existe des constantes $d_1 > 0$ et $d_2 > 0$ telles que :

$$\forall (a_1, \dots, a_N) \in (\mathbb{R}_+)^N, \quad d_1 \left(\sum_{j=1}^N a_j \right)^q \leq \sum_{j=1}^N a_j^q \leq d_2 \left(\sum_{j=1}^N a_j \right)^q. \quad (\text{C.31})$$

Preuve du lemme 70. Dans le cas où tous les a_j sont nuls, n'importe quelle constante convient. On commence par prouver le résultat en se restreignant à l'ensemble $\left\{ (a_1, \dots, a_N) \in (\mathbb{R}_+)^N / \sum_{j=1}^N a_j = 1 \right\}$ qui est un compact de $(\mathbb{R}_+)^N$. L'existence des constantes strictement positives telles que l'inégalité (C.31) soit vérifiée sur ce compact est simplement due au fait que, sur tout compact, une fonction continue admet un maximum et un minimum qu'elle atteint. Pour un N -uplet $(a_1, \dots, a_N) \in (\mathbb{R}_+)^N$ tel

que $\sum_{j=1}^N a_j \notin \{0, 1\}$, en posant, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $b_j := \frac{a_j}{\sum_{i=1}^N a_i}$, on constate que les constantes trouvées précédemment conviennent aussi et permettent à (a_1, \dots, a_N) de vérifier (C.31). \square

Idée pour la preuve de la proposition 68. À cause de la stationnarité du champ et de son caractère centré, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X(x, t) - X(y, s))^2] &= \text{Cov}(X(x, t), X(x, t)) + \text{Cov}(X(y, s), X(y, s)) \\ &\quad - 2 \text{Cov}(X(x, t), X(y, s)) \\ &= 2C(0, 0) - 2C(x - y, t - s). \end{aligned}$$

Grâce à un développement limité de $2C(0, 0) - 2C(x - y, t - s)$ lorsque $(x - y, t - s)$ est proche de $(0, 0)$, on obtient l'existence de constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que l'encadrement :

$$k_1 (\|x - y\|^{2\gamma} + |t - s|^{2\alpha}) \leq 2C(0, 0) - 2C(x - y, t - s) \leq k_2 (\|x - y\|^{2\gamma} + |t - s|^{2\alpha}) \quad (\text{C.32})$$

soit valable pour $(x - y, t - s)$ suffisamment proche de 0.

L'encadrement désiré lorsque (x, t) et (y, s) se trouvent dans $[-M, M]^{d+1}$ se déduit par homogénéité du précédent.

Pour prouver la minoration (C.30), on utilise le lemme suivant :

Lemme 71. Si (U, V) est un vecteur gaussien, centré, tel que $\text{Var}(U) = \sigma_U^2$ et $\text{Var}(V) = \sigma_V^2$, alors, en posant $\rho_{U,V}^2 = \mathbb{E} [(U - V)^2]$,

$$\text{Var}(U|V) = \frac{(\rho_{U,V}^2 - (\sigma_U - \sigma_V)^2)((\sigma_U + \sigma_V)^2 + \rho_{U,V}^2)}{4\sigma_V^2}.$$

Preuve du lemme. Par régression linéaire, il existe un réel α et une variable aléatoire gaussienne ϵ , centrée, indépendante de V , tels que :

$$U = \alpha V + \epsilon.$$

V et ϵ étant indépendantes, on a :

$$\text{Var}(U|V) = \text{Var}(\epsilon) = \sigma_U^2 - \alpha^2 \sigma_V^2,$$

où α vérifie l'égalité :

$$\mathbb{E}(UV) = \alpha \sigma_V^2,$$

Ainsi,

$$\text{Var}(U|V) = \sigma_U^2 - \frac{\mathbb{E}(UV)^2}{\sigma_V^2} = \frac{(\sigma_U \sigma_V - \mathbb{E}(UV)) \times (\sigma_U \sigma_V + \mathbb{E}(UV))}{\sigma_V^2}.$$

En remarquant que $\mathbb{E}(UV) = \frac{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 - \rho_{U,V}^2}{2}$, on obtient l'expression désirée pour $\text{Var}(U|V)$. \square

L'application du lemme 71 à $U = X(x, t)$ et $V = X(y, s)$ donne :

$$\text{Var}(X(x, t)|X(y, t)) = \frac{(C(0, 0) - C(x - y, t - s))(C(0, 0) + C(x - y, t - s))}{C(0, 0)}.$$

La partie minoration de l'encadrement (C.32) précédemment prouvé permet alors de conclure. □

Proposition 72. *Soit $X = \{X(x, t), (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\}$ un champ aléatoire à valeurs réelles, gaussien, centré de matrice de covariance de la forme (C.28) et soit $\mathbf{X}^{(p)}$ le champ multi-dimensionnel de paramètres $(d + 1, p)$ associé. Alors, presque sûrement,*

$$\dim_{\mathcal{H}} \mathbf{X}^{(p)} \left([0, 1]^{d+1} \right) = \min \left\{ p, \frac{d}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

De plus, si $0 < \alpha \leq \gamma < 1$, alors, presque sûrement :

$$\dim_{\text{Gr}_{\mathcal{H}}} \mathbf{X}^{(p)} \left([0, 1]^{d+1} \right) = \begin{cases} d + 1 + (1 - \alpha)p & \text{si } p < \frac{1}{\alpha}, \\ d + \frac{\gamma}{\alpha} + (1 - \gamma)p & \text{si } \frac{1}{\alpha} \leq p < \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma}, \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma} & \text{si } p \geq \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma}. \end{cases}$$

Enfin, si $0 < \gamma \leq \alpha < 1$ alors, presque sûrement :

$$\dim_{\text{Gr}_{\mathcal{H}}} \mathbf{X}^{(p)} \left([0, 1]^{d+1} \right) = \begin{cases} d + 1 + (1 - \gamma)p & \text{si } p < \frac{d}{\gamma}, \\ \frac{d\alpha}{\gamma} + 1 + (1 - \alpha)p & \text{si } \frac{d}{\gamma} \leq p < \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma}, \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma} & \text{si } p \geq \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma}. \end{cases}$$

Preuve. Vu l'inégalité (C.29) vérifiée par le variogramme de X et la remarque 69 suivant la proposition 68, X vérifie une condition (D1), avec des paramètres $(\overline{H}_j)_{1 \leq j \leq d+1}$ valant γ pour d d'entre eux et α pour l'un d'entre eux. (On réordonne les différentes coordonnées de façon à ce que l'ordre croissant des $(H_j)_{1 \leq j \leq N}$ soit respecté.) La formule (C.24) va ainsi nous permettre d'exprimer la dimension de Hausdorff de $\mathbf{X}^{(p)} \left([0, 1]^{d+1} \right)$.

On se contente de prouver la formule sur la dimension de Hausdorff de $\mathbf{X}^{(p)} \left([0, 1]^{d+1} \right)$ dans le cas où $0 < \alpha \leq \gamma < 1$, car le cas où $\gamma \leq \alpha$ se traite de façon analogue.

On a alors $\overline{H}_1 = \alpha$ et, pour tout $j \in \llbracket 2, d+1 \rrbracket$, $\overline{H}_j = \gamma$. Par conséquent, en utilisant la notation introduite dans la partie C.3.4, on peut écrire :

$$\begin{cases} N_1 = d + 1 + (1 - \alpha)p, \\ \forall k \in \llbracket 2, d+1 \rrbracket, \quad N_k = d + \frac{\gamma}{\alpha} + (1 - \gamma)p, \end{cases}$$

cette dernière quantité étant indépendante de k . Pour obtenir $\dim_{\text{Gr}_{\mathcal{H}}} \mathbf{X}^{(p)} \left([0, 1]^{d+1} \right)$

via la formule (C.25), il suffit donc de comparer : N_1 , N_{d+1} et $\Sigma := \sum_{j=1}^{d+1} \frac{1}{\overline{H}_j} = \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma}$.

Traitons d'abord le cas où $\alpha = \gamma$. Dans ce cas, $N_{d+1} = N_1$.

$$\begin{aligned} N_1 \leq \Sigma &\Leftrightarrow d + 1 + (1 - \alpha)p \leq \frac{1 + d}{\alpha} \\ &\Leftrightarrow (1 - \alpha)p \leq \frac{1 - \alpha}{\alpha}(d + 1) \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{d + 1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la formule est vraie pour $\alpha = \gamma$ et on suppose à présent $\alpha \neq \gamma$. On a alors :

$$\begin{aligned} N_1 \leq N_{d+1} &\Leftrightarrow d + 1 + (1 - \alpha)p \leq d + \frac{\gamma}{\alpha} + (1 - \gamma)p \\ &\Leftrightarrow (\gamma - \alpha)p \leq \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \Sigma \leq N_{d+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma} \leq d + \frac{\gamma}{\alpha} + (1 - \gamma)p \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - \gamma}{\alpha} \leq (1 - \gamma) \left(p - \frac{d}{\gamma} \right) \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} N_1 \leq \Sigma &\Leftrightarrow d + 1 + (1 - \alpha)p \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma} \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1 - \gamma}{1 - \alpha} \frac{d}{\gamma}. \end{aligned}$$

Or $0 < \frac{1 - \gamma}{1 - \alpha} \leq 1$ et donc :

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1 - \gamma}{1 - \alpha} \frac{d}{\gamma} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma}.$$

Les trois équivalences ci-dessus permettent donc de conclure dans le cas où $0 < \alpha < \gamma < 1$. \square

Proposition 73. Soit $X = \{X(x, t), (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\}$ un champ aléatoire à valeurs réelles, gaussien, centré, de matrice de covariance de la forme (C.28) et soit $\mathbf{X}^{(p)}$ le champ multi-dimensionnel de paramètres $(d + 1, p)$ associé.

(i) Si $\frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma} < p$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{X}^{-1}(\{x\}) = \emptyset$ presque sûrement.

(ii) Si $\frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\gamma} > p$, alors, si $0 < \gamma \leq \alpha \leq 1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, avec probabilité non nulle,

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\mathbf{X}^{(p)} \right)^{-1} (\{x\}) = \begin{cases} d + 1 - \alpha p & \text{si } p < \frac{1}{\alpha}, \\ d + \frac{\gamma}{\alpha} - \gamma p & \text{si } p \geq \frac{1}{\alpha} \end{cases} \quad (\text{C.33})$$

et, si $0 < \gamma \leq \alpha \leq 1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, avec probabilité non nulle,

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\mathbf{X}^{(p)} \right)^{-1} (\{x\}) = \begin{cases} d+1 - \gamma p & \text{si } p < \frac{d}{\gamma}, \\ \frac{d\alpha}{\gamma} + 1 - \alpha p & \text{si } p \geq \frac{d}{\gamma}. \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

Comme la preuve précédente, la démonstration de ce résultat repose sur la partie C.3.4 (plus précisément sur le théorème 67) et sur des équivalences entre inégalités.

Second modèle Un deuxième modèle de champ stationnaire en espace-temps est également proposé. Il est construit à partir d'une densité spectrale du type :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \quad f(\lambda) = \left(\sum_{j=1}^{d+1} c_j (a_j + |\lambda_j|^2)^{\alpha_j} \right)^{-\nu}, \quad (\text{C.35})$$

où ν , les c_j et les a_j sont des réels strictement positifs et les α_j sont des entiers naturels strictement positifs tels que :

$$\sum_{j=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_j} < 2\nu. \quad (\text{C.36})$$

Il permet d'obtenir des champs aléatoires anisotropes par rapport à la variable d'espace, alors que le modèle précédent était isotrope en cette variable, puisque, à t fixé, la covariance ne dépend de x que par sa norme.

Remarque 74. Pour que f soit une densité spectrale, il faut et il suffit que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \min(1, \|\lambda\|^2) f(\lambda) < +\infty,$$

d'après le théorème 33 ce qui est vrai si, et seulement si et seulement si f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$, où :

$$f(\lambda) \underset{\|\lambda\| \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\sum_{j=1}^{d+1} c_j |\lambda_j|^{2\alpha_j} \right)^{-\nu}. \quad (\text{C.37})$$

La preuve de la proposition 54 montre que cette intégrabilité est équivalente à la condition $\nu > \sum_{j=1}^{d+1} \frac{1}{2\alpha_j}$.

À cause de son comportement asymptotique (C.37), f satisfait la condition (C), avec $N = d+1$, pour tout j dans $\llbracket 1, d+1 \rrbracket$, $\beta_j = \alpha_j$, $\gamma = 2\nu$, et une certaine constante c_3 . On peut donc appliquer nos résultats à un champ gaussien, centré et stationnaire qui admet f pour densité spectrale.

Proposition 75. *Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^{d+1} , gaussien, centré, stationnaire, admettant une densité spectrale donnée par (C.35).*

(i) Si

$$2\nu > \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} + \frac{2}{\min_{j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket} \alpha_j},$$

alors X est différentiable en moyenne quadratique et admet une version presque sûrement différentiable.

(ii) Chaque paramètre H_j du champ X est dans $]0, 1]$ si, et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} < 2\nu \leq \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} + \frac{2}{\min_{j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket} \alpha_j} \quad (\text{C.38})$$

Preuve. D'après le corollaire C.3.2 et le théorème 64, pour que X soit différentiable en moyenne quadratique et admette une version qui soit presque sûrement différentiable, il suffit que, pour tout j dans $\llbracket 1, d+1 \rrbracket$, le paramètre H_j défini par la formule (C.18) soit strictement supérieur à 1. Pour notre modèle, cette condition s'écrit :

$$\begin{aligned} & \forall j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket, \quad \frac{\alpha_j}{2} \left(2\nu - \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} \right) > 1 \\ \Leftrightarrow & \forall j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket, \quad 2\nu > \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} + \frac{2}{\alpha_j} \\ \Leftrightarrow & 2\nu > \max_{j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket} \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} + \frac{2}{\alpha_j} \right\} \\ \Leftrightarrow & 2\nu > \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} + \frac{2}{\min_{j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket} \alpha_j}, \end{aligned}$$

ainsi le point (i) de la proposition est prouvé. De plus,

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket, 0 < H_j \leq 1 & \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket, 0 < 2\nu - \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} \leq \frac{2}{\alpha_j} \\ & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} < 2\nu \leq \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} + \frac{2}{\min_{j \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket} \alpha_j}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le point (ii). □

D'après le point (i) du corollaire C.3.3, lorsque un champ aléatoire X vérifie les hypothèses du point (i), la dimension de Hausdorff de $\mathbf{X}^{(p)}([0, 1])$ ou de $Gr\mathbf{X}^{(p)}([0, 1])$ est p.s. entière et donc ces objets ne sont pas fractals. Lorsqu'il vérifie le point (ii), il se peut que certains des ensembles évoqués plus haut aient une dimension de Hausdorff non entières et qu'ils soient donc fractals.

C.3.6 Conclusion

Le modèle de champ gaussien à accroissements stationnaires proposé par Xue et Xiao se construit à partir de la densité spectrale d'un tel champ, censée vérifier une certaine condition d'encadrement. Cette condition est inhérente au système de coordonnées choisis sur l'ensemble \mathbb{R}^N des paramètres du champ. Elle fait jouer des rôles différents aux différentes coordonnées, ce qui rend le modèle propice à la représentation de phénomènes spatio-temporels.

Le lemme 55, un résultat d'une grande simplicité, est en fait l'outil le plus utilisé pour démontrer les différents résultats de minoration ou de majoration d'intégrales. Il

est tout adapté pour être appliqué de façon récursive à la fonction intervenant dans l'encadrement de la densité spectrale du modèle. Signalons de nouveau que la définition des σ_j , dans le lemme 56, doit être modifiée pour que le résultat soit vrai.

Les paramètres H_j du modèle, mis en évidence dans l'article, donnent des conditions simples pour qu'un champ vérifiant les hypothèses du modèle soit dérivable en moyenne quadratique dans une certaine direction, différentiable en moyenne quadratique, ou presque sûrement différentiable : c'est la position des différents H_j par rapport à 1 qui intervient.

Les paramètres H_j apparaissent également dans les formules donnant la dimension de Hausdorff d'ensembles liés aux réalisations d'un champ construit suivant ce modèle.

Les modèles d'application spatio-temporels, choisis par les auteurs et présentés dans la partie C.3.5 du présent rapport, ont certes l'avantage d'avoir été étudiés auparavant par d'autres personnes, et leur structure en font des candidats possibles pour la modélisation de phénomènes réels. Néanmoins, ce sont tous deux des modèles stationnaires. Puisque le modèle présenté dans l'article porte sur une catégorie plus générale de champs, ceux dont les accroissements sont stationnaires, il aurait été intéressant de présenter en application des modèles à accroissements stationnaires.

C.4 Quelques résultats supplémentaires inspirés de [2]

C.4.1 Condition pour une dérivabilité à l'ordre 2, au sens L^2

La stationnarité des champs dérivés en moyenne quadratique permet de prouver facilement une condition suffisante de dérivabilité à l'ordre deux en moyenne quadratique.

Proposition 76. *Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, gaussien, centré, à accroissements stationnaires, admettant une densité spectrale qui vérifie la condition (C). Alors, pour tout $(j, k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, une condition suffisante d'existence de $\frac{\partial^2 X}{\partial s_j \partial s_k}$, la dérivée partielle à l'ordre deux dans les directions j et k du champ X , est :*

$$\frac{\beta_j \beta_k}{2} \left(\gamma - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i} \right) > \beta_j + \beta_k,$$

$$\text{soit, en posant : } H_{j,k} := \frac{\beta_j \beta_k}{2} \left(\gamma - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i} \right) :$$

$$H_{j,k} > \beta_j + \beta_k. \quad (\text{C.39})$$

Remarque 77. La condition (C.39) peut également s'écrire :

$$H_j > 1 + \frac{\beta_j}{\beta_k} \quad \text{ou} \quad H_k > 1 + \frac{\beta_k}{\beta_j}, \quad (\text{C.40})$$

mais la formulation proposée présente l'avantage d'être symétrique en j et k . Lorsque $k = j$, la condition devient $H_j > 2$.

Démonstration. Supposons que la condition (C.39) soit vérifiée. D'après le corollaire 60, le champ aléatoire X'_k est stationnaire et de fonction de covariance :

$$\text{Cov}(X'_k(h), X'_k(0)) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial h_k^2}(h).$$

Sa dérivabilité en moyenne quadratique dans la direction e_j est donc équivalente à l'existence de la dérivée partielle à l'ordre 4 $\frac{\partial^4 v}{\partial h_j^2 \partial h_k^2}(0)$, d'après le théorème 45, point (i).

La preuve de la propriété 59 montre que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial h_k^2}(h) = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_k^2 \cos\langle h, \lambda \rangle f(\lambda) d\lambda.$$

Pour prouver que $\frac{\partial^4 v}{\partial h_j^2 \partial h_k^2}(0)$ existe, il suffit de vérifier deux fois les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale en montrant que, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda_j \lambda_k^2 \sin\langle h, \lambda \rangle f(\lambda)| d\lambda < +\infty \quad (\text{C.41})$$

$$J'' = \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda_j^2 \lambda_k^2 \cos\langle h, \lambda \rangle f(\lambda)| d\lambda < +\infty \quad (\text{C.42})$$

On se contente de prouver (C.42), d'une façon qui prouvera également la condition (C.41). De nouveau, on sépare l'intégrale suivant deux domaines :

$$J'' = \underbrace{\int_{[-1,1]^N} |\lambda_j^2 \lambda_k^2 \cos\langle h, \lambda \rangle f(\lambda)| d\lambda}_{J_0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N \setminus [-1,1]^N} |\lambda_j^2 \lambda_k^2 \cos\langle h, \lambda \rangle f(\lambda)| d\lambda}_{J_1}.$$

J_0 est finie car :

$$\begin{aligned} J_0 &\leq \int_{[-1,1]^N} \lambda_j^2 \lambda_k^2 f(\lambda) d\lambda \\ &\leq \int_{[-1,1]^N} \|\lambda\|^4 f(\lambda) d\lambda \\ &\lesssim \int_{[-1,1]^N} \min(\|\lambda\|^2, 1) f(\lambda) d\lambda \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

par propriété de la densité spectrale f .

Pour la majoration de J_1 , on a d'abord, par parité et grâce à la majoration de (C.15) :

$$\begin{aligned} J_1 &\lesssim \int_{]1,+\infty[^N} \frac{\lambda_j^2 \lambda_k^2}{\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^{\beta_i}\right)^\gamma} d\lambda \\ &\leq \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{N-2} d\lambda_{\setminus j,k} \int_{]1,+\infty[^2} \frac{\lambda_j^2 \lambda_k^2}{\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^{\beta_i}\right)^\gamma} d\lambda_j d\lambda_k. \end{aligned}$$

Puis, sachant que $\gamma - \sum_{i \notin \{j,k\}} \frac{1}{\beta_i} \geq \gamma - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i} > 0$ grâce à la condition (C), on applique $N - 2$ fois le lemme 55 et on obtient :

$$J_1 \lesssim \int_{]1,+\infty[^2} \frac{\lambda_j^2 \lambda_k^2}{\left(\lambda_j^{\beta_j} + \lambda_k^{\beta_k}\right)^{\gamma - \sum_{i \notin \{j,k\}} \frac{1}{\beta_i}}}$$

On est donc amené à étudier l'intégrabilité de $(x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{(x^\alpha + y^\beta)^\nu}$ sur $]1, +\infty[^2$ en fonction de α , β et ν , réels strictement positifs.

On effectue le changement de variables : $(X, Y) = \left(x^{\frac{\alpha}{2}}, y^{\frac{\beta}{2}}\right)$.

$$\begin{aligned} \int_{]1,+\infty[^2} \frac{x^2 y^2}{(x^\alpha + y^\beta)^\nu} dx dy &= \int_{]1,+\infty[^2} \frac{X^{\frac{4}{\alpha}} Y^{\frac{4}{\beta}}}{(X^2 + Y^2)^\nu} \frac{4}{\alpha\beta} X^{\frac{2}{\alpha}-1} Y^{\frac{2}{\beta}-1} dX dY \\ &\cong \int_{]1,+\infty[^2} \frac{X^{\frac{6}{\alpha}-1} Y^{\frac{6}{\beta}-1}}{(X^2 + Y^2)^\nu} dX dY, \end{aligned}$$

Puis, par un passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \int_{]1, +\infty[^2} \frac{x^2 y^2}{(x^\alpha + y^\beta)^\nu} dx dy &\simeq \int_1^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta} - 2}}{\rho^{2\nu}} (\cos \theta)^{\frac{6}{\alpha} - 1} (\sin \theta)^{\frac{6}{\beta} - 1} \rho d\rho d\theta \\ &\simeq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\nu - \frac{6}{\alpha} - \frac{6}{\beta} + 1}} d\rho. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est finie si $2\nu - \frac{6}{\alpha} - \frac{6}{\beta} + 1 > 1$, ce qui, en remplaçant α , β et ν par les constantes qui nous intéressent, permet de conclure que J_1 est finie dans le cas où la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\beta_j \beta_k}{2} \left(\gamma - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_j} \right) > \beta_j + \beta_k.$$

□

C.4.2 Estimation des H_j

L'article évoque la possibilité d'estimer les H_j du modèle pour $1 \leq j \leq N$ à partir de la formule (C.25), sans proposer de méthode d'estimation. Dans cette partie, on explique donc comment une telle estimation peut être mise en œuvre.

On se base sur le corollaire C.3.3, point (i), qui affirme que le modèle vérifie la formule (C.25) avec une probabilité 1, pour $\bar{H}_j = \min(H_j, 1)$. Cette formule présente l'avantage d'être valable presque sûrement et pas seulement avec une probabilité strictement positive. Cependant, elle ne laisse la possibilité d'estimer H_j que si celui-ci est inférieur à 1. Si $H_j > 1$ (cas où le champ X a une dérivée en moyenne quadratique dans la direction e_j , d'après le corollaire C.3.2), la dimension $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Gr}\mathbf{X}^p([0, 1]^N))$ ne dépend pas explicitement du paramètre H_j .

On commence par estimer \bar{H}_1 en considérant une seule copie du champ ($p=1$) puis on augmente successivement le nombre de copies pour estimer de proche en proche $\bar{H}_2, \dots, \bar{H}_N$.

On aura recours à la notation qui suit, déjà présentée.

Notation On note $(N_k^{(p)})_{1 \leq k \leq N}$ la suite de terme général :

$$N_k^{(p)} = \sum_{j=1}^k \frac{\bar{H}_k}{\bar{H}_j} + N - k + (1 - \bar{H}_k)p,$$

intervenant dans la formule (C.25) donnant p.s. $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Gr}\mathbf{X}^p([0, 1]^N))$.

Étude de la suite $(N_k^{(p)})_{1 \leq k \leq N}$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$,

$$N_{k+1}^{(p)} - N_k^{(p)} = (\bar{H}_{k+1} - \bar{H}_k) \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\bar{H}_j} - p \right).$$

Puisque la suite $(\overline{H}_k)_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est croissante, $N_{k+1}^{(p)} - N_k^{(p)}$ est du signe de $\sum_{j=1}^k \frac{1}{\overline{H}_j} - p$.

Si on note $k_0(p) := \min \left\{ k \in \llbracket 1, N \rrbracket / \sum_{j=1}^k \frac{1}{\overline{H}_j} \geq p \right\}$ (en convenant que $k_0(p) = N$ si

cet ensemble est vide), alors la suite $(N_k^{(p)})_{1 \leq k \leq N}$ est décroissante jusqu'au rang $k_0(p)$ puis croissante à partir du rang $k_0(p)$. (Si $k_0(p) = 1$, alors elle est croissante à partir du rang 1 ; si $k_0(p) = N$ alors elle est décroissante à partir du rang 1.) Par conséquent, $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Gr}\mathbf{X}^p([0, 1]^N)) = N_{k_0(p)}^{(p)}$. On dispose d'une majoration de $k_0(p)$ car, pour tout

$k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\sum_{j=1}^k \frac{1}{\overline{H}_j} \geq k$, et ainsi $k_0(p) \leq \min(p, N)$.

Remarque 78. La suite $(M_k^{(p)})_{1 \leq k \leq N}$, de terme général :

$$M_k^{(p)} = \sum_{j=1}^k \frac{\overline{H}_k}{\overline{H}_j} + N - k - \overline{H}_k p,$$

donne, avec une probabilité non nulle, $\dim_{\mathcal{H}}((\mathbf{X}^{(p)})^{-1}(\{x\}))$, pour $x \in \mathbb{R}^p$, dans le cas où $\sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j} > p$ (formule (C.27)).

Puisqu'elle diffère d'une constante de la suite $(N_k^{(p)})_{1 \leq k \leq N}$, on peut appliquer les mêmes conclusions sur ses variations que sur celles de $(N_k^{(p)})_{1 \leq k \leq N}$.

Estimation de \overline{H}_1

Xue et Xiao reformulent (C.25) en une formule plus explicite dans le cas où $p = 1$. On prouve ici ce résultat, qui est un premier pas vers l'estimation de tous les $(\overline{H}_j)_{1 \leq j \leq N}$.

Proposition 79 (La formule (C.25) dans le cas où $p=1$). *Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^N , à valeurs réelles, gaussien et centré. Si X vérifie la condition (D1) alors, avec probabilité 1,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\text{Gr}X([0, 1])) = N + 1 - \overline{H}_1.$$

Démonstration. D'après la partie précédente, lorsque $p = 1$, $k_0(1) \leq \min(1, N) = 1$. Par conséquent, la suite $(N_k^{(1)})$ est croissante et elle est donc minorée par son premier

terme $N_1^{(1)} = N + 1 - \overline{H}_1$. Prouvons maintenant que $N_1^{(1)}$ minore également $\sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j} &= \sum_{j=1}^N \left(1 + \frac{1}{\overline{H}_j} - 1 \right) = N + \sum_{j=1}^N \frac{1 - \overline{H}_j}{\overline{H}_j} \\ &\geq N + \frac{1 - \overline{H}_1}{\overline{H}_1} \\ &\geq N + 1 - \overline{H}_1, \end{aligned}$$

puisque $0 < \overline{H}_1 \leq 1$. Par conséquent, $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Gr}X([0, 1])) = N + 1 - \overline{H}_1$. \square

Ainsi, dans le cas où l'on considère une seule copie de X , la formule (C.25), en donnant la dimension de Hausdorff du graphe de X en fonction de \overline{H}_1 , offre la possibilité d'estimer \overline{H}_1 après avoir mesuré la dimension de Hausdorff du graphe de X , $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Gr}X([0, 1]))$.

Estimation des \overline{H}_j pour $1 \leq j \leq N$.

Posons $p_1 = 1$ et fixons $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$. Supposons que l'on ait réussi à estimer les \overline{H}_j , pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Notons E la fonction partie entière et posons :

$$p_k = E \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\overline{H}_j} + 1 \right).$$

p_k est strictement supérieur à p_{k-1} et vérifie :

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\overline{H}_j} < p_k \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{\overline{H}_j},$$

par propriété de la fonction partie entière, et parce que $\overline{H}_k \leq 1$. On en déduit que $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_k) = \mathbf{k}$.

Il reste à prouver :

$$N_k^{(p_k)} \leq \sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j}, \quad (\text{C.43})$$

ce qui permettra d'appliquer la formule (C.25) pour conclure :

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\text{Gr}\mathbf{X}^{(p_k)}([0, 1]^N) \right) = N_k^{(p_k)} = \sum_{j=1}^k \frac{\overline{H}_k}{\overline{H}_j} + N - k + (1 - \overline{H}_k)p_k. \quad (\text{C.44})$$

Puisque l'on a supposé les $(\overline{H}_j)_{1 \leq j \leq k-1}$ préalablement estimés, la formule (C.44) permettra d'estimer \overline{H}_k grâce à la mesure de $\dim_{\mathcal{H}} \left(\text{Gr}\mathbf{X}^{(p_k)}([0, 1]^N) \right)$.

Prouvons donc l'inégalité (C.43). Soit $l \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j} - N_l^{(p)} &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{\overline{H}_j} - \overline{H}_l \sum_{j=1}^l \frac{1}{\overline{H}_j} - (N-l) - (1 - \overline{H}_l)p \\ &= \sum_{j=l+1}^N \left(\frac{1}{\overline{H}_j} - 1 \right) - (\overline{H}_l - 1) \sum_{j=1}^l \frac{1}{\overline{H}_j} - (1 - \overline{H}_l)p \\ &= \sum_{j=l+1}^N \left(\frac{1}{\overline{H}_j} - 1 \right) + (1 - \overline{H}_l) \left(\sum_{j=1}^l \frac{1}{\overline{H}_j} - p \right). \end{aligned}$$

Or, chaque \overline{H}_j est dans $]0, 1]$ et donc :

$$1 - \overline{H}_l \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=l+1}^N \left(\frac{1}{\overline{H}_j} - 1 \right) \geq 0.$$

Enfin, lorsque l'on choisit $p = p_k$ et $l = k_0(p_k) = k$, on a, par définition de $k_0(p_k)$,

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{\overline{H}_j} - p_k \geq 0,$$

ce qui permet de conclure que l'inégalité (C.43) est vraie.

Ainsi, grâce à la mesure de la dimension fractale d'ensembles liés aux réalisations du champ, on peut estimer certains des paramètres de régularité du champ : les H_j tels que $H_j < 1$.

Cependant, la méthode d'estimation des H_j présentée ici a un défaut qui limite son intérêt pratique : il faut, pour la mettre en œuvre, pouvoir disposer d'un nombre de copies indépendantes du champ d'intérêt, aussi grand que nécessaire.

L'estimation de paramètres d'un champ aléatoire par le biais de la mesure d'une dimension fractale est une méthode connue, appelée analyse fractale.

Par exemple, dans [15], Benhamou *et al.* proposent d'évaluer le risque de fracture liée à l'ostéoporose par le biais de l'analyse fractale. Ils considèrent un certain nombre de lignes parallèles sur la radiographie d'un os et modélisent sur chacune la variation du niveau de gris par un mouvement brownien fractionnaire, dont l'exposant de Hurst H est estimé grâce à la relation qui le lie à la dimension fractale D du graphe de la trajectoire : $D = 2 - H$. Par la mesure des dimensions fractales pour chacune des lignes parallèles, ils estiment donc les différents exposants de Hurst dont ils considèrent la moyenne \overline{H} . Une étude statistique leur permet de constater que \overline{H} est un indicateur du risque de fracture de l'os : il est plus bas dans la population des personnes chez qui une fracture survient, par rapport à ses valeurs dans la population témoin.

Conclusion

Les articles [1] et [2] mettent en jeu des champs aléatoires gaussiens et n'appartenant pas forcément à la catégorie des champs isotropes.

La méthode d'estimation d'une probabilité de seuil, proposée dans [1], permet d'estimer la p-valeur et le seuil à un niveau de confiance donné pour un certain test. Ce test porte sur l'existence d'une réponse différente du cerveau, dans deux situations différentes, mesurée par IRM. La méthode est basée sur l'heuristique de la caractéristique d'Euler, selon laquelle une probabilité d'excursion à un seuil élevé peut être estimée par l'espérance de la caractéristique d'Euler de l'ensemble d'excursion correspondant. La formule cinématique de Gauss exprime cette espérance comme une combinaison linéaire des courbures de Lipschitz-Killing de l'ensemble où sont effectuées les mesures. Elle est utilisée pour estimer ces courbures. Il pourrait être intéressant de tester cette méthode sur d'autres données. On pourrait, par exemple, la mettre en œuvre sur des mammographies : une densité anormalement élevée - facteur prédisposant à un cancer du sein - correspond à des niveaux de gris particulièrement clairs.

Les modèles de champs à accroissements stationnaires et anisotropes proposés dans [2] sont caractérisés par une condition sur leur densité spectrale. Des paramètres du modèle permettent de discuter la régularité des champs considérés et interviennent également dans des formules donnant p.s. ou avec une probabilité non nulle la dimension de Hausdorff d'ensembles (image, graphe, image réciproque) liés aux réalisations du champ. Le modèle peut, en particulier, être utilisé pour modéliser des phénomènes spatio-temporels.

Les articles étudiés ici sont le point de départ du projet de recherche envisagé pour ma thèse qui se fera sous l'encadrement d'Anne Estrade. Il s'agira de caractériser de façon géométrique des champs aléatoires anisotropes, et cela mettra en jeu certaines notions abordées pendant mon stage. Lorsque l'on considérera des champs suffisamment réguliers, on pourra s'intéresser à la caractéristique d'Euler de leurs ensembles d'excursion, à leur volume et à l'aire de leur frontière, ainsi qu'à la répartition et la valeur des extrêmes des champs. Pour des champs plus irréguliers, on étudiera plutôt des propriétés fractales. Le but à long terme est d'identifier des paramètres permettant de caractériser l'anisotropie, et de mettre au point des tests de l'anisotropie.

Bibliographie

- [1] K. Bartz, S. Kou, and R. J. Adler. Estimating Thresholding Levels for Random Fields via Euler Characteristics. 2011.
- [2] Y. Xue and Y. Xiao. Fractal and Smoothness Properties of Space-Time Gaussian Models. *Frontiers of Mathematics in China*, 6 : 1217–1246, 2011.
- [3] R. J. Adler. *The Geometry of Random Fields*. Wiley series in probability and mathematical statistics. J. Wiley and Sons, Chichester [Eng.], cop. 1981.
- [4] J.-M. Azaïs and M. Wschebor. *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*. J. Wiley and Sons, 2009.
- [5] R. J. Adler and J. Taylor. *Random Fields and Geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2007.
- [6] I. Karatzas and E. Shreeve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [7] A. M. Yaglom. *Correlation Theory of Stationnary and Related Random Functions*, volume I : Basic Results of *Springer series in statistics*. Springer-Verlag, New-York, cop. 1987.
- [8] A. Bonami and A. Estrade. Anisotropic Analysis of Some Gaussian Models. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, 9(3) : 215–236, 2003.
- [9] S. O. Rice. Mathematical Analysis of Random Noise. *Bell System Technical Journal*, 24 : 46–156, 1945.
- [10] A. Estrade and León. A Central Limit Theorem for the Euler Characteristic of a Gaussian Excursion Set. Pré-publication, 2014.
- [11] H. Biermé and F. Richard. Statistical Tests of Anisotropy for Fractional Brownian Texture. Application to Full-field Digital Mammography. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 36(3) : 227–240, 2010.
- [12] Shashkin. A Functional Central Limit Theorem for the Level Measure of a Gaussian Random Field. *Statistics and Probability Letters*, 83 : 637–643, 2012.
- [13] Taylor and Worsley. Random Fields of Multivariate Test Statistics, with Applications to Shape Analysis. *Institute of Mathematical Statistics*, 36(1) : 1–27, 2008.
- [14] Bulinsky, Spodarev, and Timmermann. Central Limit Theorems for the Excursion Set Volumes of Weakly Dependent Random Fields. *Bernoulli*, 18(1) : 100–118, 2012.
- [15] C.-L. Benhamou, S. Poupon, E. Lespessailles, S. Loiseau, R. Jennane, V. Siroux, W. Ohley, and L. Pothuaud. Fractal Analysis of Radiographic Trabecular Bone Texture and Bone Mineral Density : Two Complementary Parameters Related to Osteoporotic Fractures. *Journal of Bone and Mineral Research*, 16(4) : 697–704, 2001.

- [16] B Mandelbrot and W. Van Ness. Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, 10 : 422–437, 1968.
- [17] E. Spodarev. Random Fields I. Lecture notes, Ulm University, 2009.
- [18] Brunet-Imbault, Lemineur, Chappard, Harba, and Benhamou. A New Anisotropy Index on Trabecular Bone Radiographic Images Using The Fast Fourier Transform. *BMC Medical Imaging*, 4, may 2005.
- [19] A. Benassi, S. Jaffard, and D. Roux. Elliptic Gaussian Random Processes. *Revista Matemática Iberoamericana*, 13 :19–89, 1997.
- [20] J. Lévy-Vehel and R. F. Peltier. Mutifractional Brownian Motion. In *Rapport de recherche de L'INRIA*, volume 2645.
- [21] L. Flatto. *Poncelet's Theorem*. American Mathematical Society, 2009.
- [22] T.C. Ings, N. L. Wards, and L. Chittka. Can commercially imported bumble bees out-compete their native conspecifics. *Journal of Applied Ecology*, (43) :940–948, 2006.
- [23] T. Byczkowski, J. Malecki, and M. Ryznar. Hitting times of bessel processes. *Potential Analysis*, (38) :753–86, 2011.
- [24] L. Chittka, J. Thompson, and N. Wasser. Flower constancy, insect psychology and plant evolution. *Naturwissenschaften*, (86) :361–77, 1999.
- [25] P. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, 1994.
- [26] S. Méléard. Modèles aléatoires en écologie et évolution. Polycopié d'enseignement, 2013.
- [27] Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Probabilities and Its Applications. Springer, New York, 2nd edition, 2001.
- [28] J. Taylor and K. Worsley. Detecting Sparse Signal in Random Fields, with an Application to Brain Mapping. *Journal of the American Statistical Association*, 102 : 913–928, 2007.
- [29] R. J. Adler. Some New Random Field Tool for Spatial Analysis. Pré-publication.
- [30] J. Taylor. A Gaussian kinematic formula. *Annals of Probability*, pages 122–158, 34 2006.
- [31] K. Worsley. Boundary Corrections for the Expected Euler Characteristic of Excursion Sets of Random Fields, With an Application to Astrophysics. In *Advances in Applied Probability*, volume 27, pages 943–959. 1995.
- [32] Y. Xiao. Sample Paths Properties of Anisotropic Gaussian Random Fields. In D. Khoshnevisan and F. Rassoul-Agha, editors, *Lecture Notes in Math*, volume 1962, pages 145–212. Springer, New York, 2009.
- [33] Cressie and Huang. Classes of Nonseparable, Spatiotemporal, Stationary Covariance Functions. *Journal of the American Statistical Association*, 94, 1999.
- [34] Gneiting. Nonseparable, Stationary Covariance Functions for Space-Time Data. *Journal of the American Statistical Association*, 97 : 590–600, 2002.