Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1. (**Fonction muette)** Soit X variable aléatoire réelle.

1. Montrer que si X possède la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue alors pour toute application ϕ mesurable telle que ϕf soit intégrable :
$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)dx$$
(*Indication :* on pourra d'abord le prouver pour ϕ l'indicatrice d'un élément de $\mathcal{A}$).
2. Réciproquement, si cette identité est vérifiée pour toute fonction mesurable bornée ϕ, vérifier que X possède la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.
3. Montrer que si X admet la loi $\sum p_k \delta_{x_k}$ ($p_k \geq 0, \sum p_k = 1, x_k \in \mathbb{R}$) alors pour tout ϕ mesurable, intégrable par rapport à cette mesure :
$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_k \phi(x_k)p_k$$
4. Réciproquement, si cette identité est vérifiée pour toute fonction mesurable bornée ϕ, vérifier que X admet la loi $\sum p_k \delta_{x_k}$.

(C'est l'usage de la réciproque que l'on désigne sous le nom de méthode de la fonction muette).

Exercice 2. (**Fonction muette et transformées de loi)** On se propose d'appliquer la caractérisation vue à l'exercice précédent pour comprendre l'influence des paramètres dans certaines familles classiques de lois de probabilité .

1. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ exponentielle de paramètre λ, de densité $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$. Quelle fonction de X suit la loi $\mathcal{E}(1)$? En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Soit X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ la loi gaussienne ou normale de paramètres m et σ^2, de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Quelle fonction de X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$? En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.
3. Soit X de loi $\mathrm{Unif}(a,b)$ uniforme sur $[a,b]$, de densité $\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{]a,b[}$. Quelle fonction de X suit la loi $\mathrm{Unif}(0,1)$? En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

On finit par quelques transformées non linéaires de loi.

4. Soit X de loi Cauchy de paramètre a, de densité $\frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}$. Quelle est la loi de $\frac{1}{X}$?
5. Soit X de loi $\mathrm{Unif}(0,1)$. Quelle est la loi de $a\tan(\pi X)$?

Exercice 3. (**Calculs de moments)** Soit X une v.a réelle, et n un entier tel que $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. On appelle moment d'ordre n la quantité $\mathbb{E}[X^n]$.

1. Calculer le moment d'ordre n de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ centrée réduite :
   - au moyen d'une IPP.
   - en développant en série la fonction génératrice des moments $\phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$, avec X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
2. Soit $\alpha, \beta > 0$. Calculer le moment d'ordre n de la loi $\Gamma(\alpha, \beta)$, de densité : $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}1_{x>0}$.

Exercice 4. (**Absence de mémoire)**

1. Déterminer la loi et l'espérance d'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifie la propriété d'absence de mémoire suivante :
$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}(Y \geq k) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(Y \geq k+l \mid Y \geq k) = \mathbb{P}(Y \geq l).$$

2. Soit X une variable aléatoire strictement positive qui vérifie la propriété d'absence de mémoire suivante :

$$\forall (s,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \mathbb{P}(X \geq s) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

   En déduire la loi de X et son espérance (on pourra admettre : $\forall x, y > 0, f(x+y) = f(x)+f(y)$ et f monotone implique f linéaire). Que signifie cette propriété si X modélise la durée de fonctionnement d'une machine ?

3. Réciproquement, soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$ (la partie entière de X), puis la loi de sa partie fractionnaire $Z = X - \lfloor X \rfloor$. *(Une fois vue la notion d'indépendance : ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?)*

Exercice 5. (Espérance et approximation L^2) Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable. Montrer que l'application

$$y \longmapsto \mathbb{E}[(X-y)^2]$$

est bien définie, et admet un unique minimum $\mathrm{Var}(X)$ en $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 6. (Médiane) Soit X une variable aléatoire réelle (noter qu'on ne requiert pas d'hypothèse d'intégrabilité cette fois). On dit que m est une médiane de X si $\mathbb{P}(X < m) \leq 1/2 \leq \mathbb{P}(X \leq m)$.

1. On pose

$$m_0 := \inf\{t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq t) \geq 1/2\},\ m_1 := \sup\{t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X < t) \leq 1/2\}$$

   Montrer que m_0 et m_1 sont bien définis, et qu'il s'agit de médianes de X.

2. Montrer que l'intervalle $[m_0, m_1]$ est l'ensemble des médianes de X.
3. Soit X la loi uniforme sur l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$, avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Déterminer les médianes de X. (*Indication : regarder ce qui se passe pour $n = 1, 2, 3, 4$).*
4. Si X est une variable à densité sur I intervalle de $\mathbb{R}$, de densité strictement positive sur I, montrer que la médiane est unique.

Exercice 7. (Version unilatérale de l'inégalité de Chebychev) Soit X variable aléatoire de carré intégrable, que l'on supposera de plus centrée : $\mathbb{E}[X] = 0$.

1. Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$ tel que $a + b \neq 0$, $\mathbb{P}((X+b)^2 \geq (a+b)^2) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)+b^2}{(a+b)^2}$
2. En déduire que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X) + a^2}.$$