Feuille de TD n° 3

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesurable, et $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des fonctions mesurables ̀valeurs réelles telles que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} < +\infty.$$

Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f μ-p.p.

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesurable avec $\mu(E) < \infty$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles. Montrer qu'il existe une suite $\{c_n\}$ strictement positive tel que,

$$\text{pour } \mu\text{-presque tout } x, \lim_{n\to\infty} c_n f_n(x) = 0.$$

(*Indication* : On pourra commencer par construire une suite a_n telle que $\sum_n \mu\{|f_n| > a_n\} < +\infty$ puis construire $(c_n)_n$ en fonction de $(a_n)_n$.)

Exercice 3. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de couples (p, q) avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$ tels que

$$|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

(*Indication* : On pourra poser $A_q = \{x \in [0, 1] : \exists p \in \mathbb{N}, |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\}$ pour entier $q \geq 1$ puis majorer la mesure de Lebesgue de A_q).

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

(*Indication* : On pourra commencer par montrer que : $\int \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} |f(nx)|\right) dx < \infty$.)

Exercice 5. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesurable avec $\mu(E) < \infty$ Montrer que (f_n) converge en mesure vers f si et seulement si pour toute sous-suite $(\phi(n))$ il existe une sous-sous suite $\phi(\gamma(n))$ tel que $f_{\phi(\gamma(n))}$ converge vers f μ-pp.

Exercice 6. *Intégration des fonctions radiales dans* $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, de la tribu des boréliens, et de la mesure de Lebesgue λ_n. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est radiale si il existe $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on ait $f(x) = g(\|x\|)$.

1. Montrer qu'une fonction radiale f est mesurable si et seulement si g l'est.

On veut établir pour g mesurable positive la formule d'intégration suivante

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x) = C \int_0^{+\infty} g(r) r^{n-1} dr \tag{7}$$

avec $C = n\lambda_n(B(0, 1))$ et $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Pour B borélien de $\mathbb{R}^+$ on pose $\widehat{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in B\}$.

2. Vérifier que $\widehat{B}$ est un borélien de $\mathbb{R}^n$.

On considère alors
$$\mu(B) = \lambda_n(\widehat{B}) \quad \text{et} \quad \nu(B) = C \int_B r^{n-1} dr\,.$$

3. Montrer que $\mu([0,a]) = \nu([0,a])$ pour tout $a \geq 0$.
4. En déduire, par exemple à l'aide du théorème de la classe monotone, que $\mu(B) = \nu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.
5. Conclure que (7) est satisfaite pour toute fonction g étagée positive, puis en général pour toute fonction g mesurable positive et f radiale associée.

Quelques applications.

1. Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrabilité de $x \mapsto \|x\|^\alpha$ au voisinage de 0 et de l'infini dans $\mathbb{R}^n$.

On veut exprimer le volume des boules de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$.

2. Montrer que $\lambda_n(B_2(0,1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ où $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$. *(Indication : on pourra utiliser* (7) *avec* $f(x) = e^{-\|x\|_2^2}$*. On rappelle de plus que* $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$*).*
3. En déduire deux expressions algébriques (sans intégrale) pour $\lambda_n(B_2(0,1))$, selon que n soit pair ou non.
4. Un phénomène bizarre ? Vérifier que quelque soit r fixé (éventuellement très grand), les volumes $\lambda_n(B_2(0,r))$ des boules euclidiennes de rayon r dans $\mathbb{R}^n$, tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
5. Déterminer le volume de la boule $B_1(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$ associée à la norme $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.