Feuille d'exercices n° 1 : Variables aléatoires.

Exercice 1. [Loi uniforme et espace de probabilité] On suppose que $n \geqslant 2$ livres sont posés au hasard côte à côte sur une étagère. Parmi ces livres, il y a les $k \in \{2, \dots, n\}$ volumes d'une encyclopédie.

1. Donner un espace de probabilité rendant compte de cette expérience aléatoire et permettant de répondre aux questions qui suivent.
2. Quelle est la probabilité pour que tous les volumes de l'encyclopédie soient côte à côte ?
3. Soit $r \geqslant k$. Quelle est la probabilité pour que tous les volumes de l'encyclopédie soient dans les r premiers livres de l'étagère ?
4. On suppose que $k = 2$. Soit $\ell \in \{0, \dots, n-2\}$. Quelle est la probabilité qu'il y ait ℓ livres entre les deux volumes de l'encyclopédie sur l'étagère ? Combien de livres est-il le plus probable de trouver entre les deux volumes de l'encyclopédie sur l'étagère ?

Exercice 2. [Thinning de la loi de Poisson] Soit N de loi $\mathrm{Poi}(a)$ la loi de Poisson de paramètre $a > 0$, et $(B_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, également indépendante de X.

1. Calculer
$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{N} B_i = k_1, \sum_{i=1}^{N}(1 - B_i) = k_2\Big) \text{ pour } k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$
2. En déduire que les deux variables aléatoires $\sum_{i=1}^{N} B_i$ et $\sum_{i=1}^{N}(1-B_i)$ sont indépendantes, et identifier leur loi.

Exercice 3. [Thinning de la loi Géometrique] Soit G de loi $\mathrm{Geom}_{\mathbb{N}^\star}(p)$ la loi Géométrique sur $\mathbb{N}^\star$ de paramètre $p \in (0,1]$, et $(B_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli de paramètre $1/2$, également indépendante de G. Calculer

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{G} B_i = k\Big) \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

On pourra utiliser le fait que $(1-x)^{-r-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{n} x^n$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. [Loi de somme de variables indépendantes]

1. Calculer la loi de la somme de deux variables aléatoires $\mathrm{Bin}(n,p)$ et $\mathrm{Bin}(m,p)$ indépendantes, de paramètres respectifs $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$, et $m \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$.
2. Calculer la loi de la somme de deux variables aléatoires $\mathrm{Poi}(a)$ et $\mathrm{Poi}(b)$ indépendantes, de paramètres respectifs $a > 0$ et $b > 0$.
3. Calculer la loi de la somme de n variables aléatoires $\mathrm{Geom}_{\mathbb{N}^\star}(p)$ sur $\mathbb{N}^\star$ indépendantes de même paramètre $p \in (0,1]$.

Exercice 5. [Perte de mémoire Géométrique] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Déterminer toutes les lois possibles de X telles que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X \geq n + m \mid X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq m) > 0.$$

Exercice 6. [Perte de mémoire Exponentielle] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Déterminer toutes les lois possibles de X telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{P}(X \geq x + y \,|\, X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq y) > 0.$$

Exercice 7. [Perte de mémoire fractionnaire] Soit X de loi $\text{Exp}(\lambda)$ la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Quelle loi suit $\lfloor X \rfloor$?
2. Quelle loi suit $X - \lfloor X \rfloor$?
3. Montrer que ces deux variables sont en outre indépendantes.