DM PRB201 2019

Exercice 1. [Calculs de distance pour une chaîne de Markov]

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < 1$, et soit une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace d'état $\Omega = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ de matrice de transition P telle que :

$$P(i,j) = a\,1_{\{j=i+1 \bmod n\}} + (1-a)\,\frac{1}{n} \qquad\qquad i,j \in \Omega$$

1. Montrer que la chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ possède une unique loi stationnaire π et la calculer. La chaîne est-elle réversible ?
2. Montrer par une récurrence que, pour tout $(i,j) \in \Omega^2$, pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$P^t(i,j) = a^t 1_{\{j=i+t \bmod n\}} + (1-a^t)\frac{1}{n}.$$

   Reconnaître la mesure de probabilité limite $\lim_{t\to\infty} P^t(i,\cdot)$, et retrouver le résultat de la question 1.
3. Montrer que, pour tout $i \in \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{N}$, la distance en variation totale satisfait :

$$\frac{1}{2}\sum_k |P^t(i,k) - \pi(k)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a^t$$

4. Montrer que, pour tout $i, j \in \Omega$ tel que $i \neq j$, pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}\sum_k |P^t(i,k) - P^t(j,k)| = a^t$$

5. Montrer que, pour tout $i \in \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j\in\Omega} \frac{(P^t(i,j) - \pi(j))^2}{\pi(j)} = (n-1)\,a^{2t}$$

Exercice 2. [Critère de Kolmogorov].

Soit P matrice de transition irréductible sur Ω, et π son unique mesure de probabilité stationnaire. On note R la propriété : "Pour tout $t \geq 2$, pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_t \in \Omega$ tels que $x_1 = x_n$,

$$\prod_{1\leq i\leq t-1} P(x_i, x_{i+1}) = \prod_{1\leq i\leq t-1} P(x_{i+1}, x_i)."$$

1. Supposons P réversible par rapport à π. Montrer que R est satisfaite.

Réciproquement, on suppose R satisfaite, et on souhaite montrer que P est réversible par rapport à π.

2. Montrer que, pour $t \geq 1$, et $x, y \in \Omega$:

$$P^t(x,y)P(y,x) = P(x,y)P^t(y,x)$$

3. Dans le cas où P est apériodique, en déduire que P est réversible par rapport à π.
4. On revient maintenant au cas où P est seulement supposée irréductible. En s'aidant de la conclusion de l'exercice 11 du TD1, trouver la limite de $\frac{\sum_{t=1}^{n} P^t(x,y)}{n}$ quand $n \to \infty$, puis conclure.

Exercice 3. [Décomposition de première entrée]

Soit P matrice stochastique sur Ω, et $(X_t)_{t\geq 0}$ la chaîne de Markov sur Ω de matrice de matrice de transition P.

1. Soit $y \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Posons $\tau_y^{(n)} = \min\{s : s \geq n, X_s = y\}$ le premier temps de passage en y après l'instant n. Observer que $\tau_y^{(n)}$ est un temps d'arrêt.
2. Montrer que, pour tout $t \geq n$,

$$P^t(x,y) = \sum_{n \leq s \leq t} \mathbb{P}_x(\tau_y^{(n)} = s) P^{t-s}(y,y), \quad x, y \in \Omega$$

3. En déduire :

$$\sum_{t=0}^{m} P^t(x,x) \geq \sum_{t=n}^{m+n} P^t(x,x).$$

4. Par un raisonnement probabiliste similaire (c'est-à-dire en introduisant un temps d'arrêt bien choisi), montrer que :

$$\sum_{t=0}^{m} P^t(x,x) \geq \sum_{t=0}^{m} P^t(y,x)$$

Commentaire : on pourra considérer la réécriture purement matricielle, c'est-à-dire sans introduire la chaîne de Markov associée, des preuves des deux inégalités obtenues en 3 et 4, afin de saisir l'intérêt du formalisme probabiliste.