Feuille d'exercices n°1 : Irréductibilité, apériodicité, réversibilité.

On suppose dans toute cette feuille que Ω ou V, selon les notations retenues dans chaque exercice, est un ensemble fini.

Exercice 1. [Matrice de transition symétrique]

1. Caractériser l'ensemble des matrices stochastiques P dont la mesure uniforme est une mesure stationnaire.

Une matrice stochastique P sur Ω est dite symétrique si pour tout $x, y \in \Omega$,

$$P(x,y) = P(y,x).$$

2. Donner une mesure stationnaire pour P.

Exercice 2. [Mesure stationnaire de la marche aléatoire simple sur un graphe] On appelle graphe une paire (V, E), où V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommmets, et E est un sous-ensemble de paires non ordonnées d'éléments de E, appelées arêtes. Noter que les paires de type $\{x, x\}$, appelées boucles, sont autorisées. On suppose G sans sommet isolé [1]. On définit une matrice stochastique sur V par

$$P(x,y) = \frac{\mathbf{1}_{x\sim y}}{\deg x},$$

appelée matrice de transition de la marche aléatoire sur G, où $\mathbf{1}_{x\sim y} = \mathbf{1}_{\{x,y\}\in E}$ est l'indicatrice des voisins de x, et $\deg x = \sum_{y\in V} \mathbf{1}_{x\sim y}$ est le nombre de voisins de x.

1. Vérifier que P est stochastique, sous quelle condition sur le graphe la matrice stochastique P est elle irréductible ?
2. Exprimer sous cette condition l'unique mesure (de probabilité) stationnaire π.
3. On dit que le graphe est régulier lorsque tous ses sommets ont même degré. Que dire dans ce cas ? Faire le lien avec l'exercice 1.

Exercice 3. [Matrice de transition réversible et opérateur auto-adjoint] Montrer que P est réversible par rapport à π ssi P est autoadjoint dans $(\mathbb{R}^\Omega, \langle ., . \rangle_\pi)$ avec le produit scalaire défini par défini par $\langle f, g\rangle_\pi = \sum_{x\in V} f(x)g(x)\pi(x)$ c'est-à-dire ssi pour tout $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$, $\langle Pf, g\rangle_\pi = \langle f, Pg\rangle_\pi$.

Exercice 4. [Matrice de transition réversible] Soit P une matrice stochastique sur Ω réversible par rapport à une mesure de probabilité π. Montrer que P^2 est encore réversible par rapport à π.

Exercice 5. On appelle n-cycle le graphe (V, E) avec $V = \{0, \dots, n-1\}$ et $\{x, y\} \in E$ ssi $x = y \pm 1 \mod n$, où on rappelle que deux entiers sont égaux modulo n si leur différence est un multiple de n. Ainsi, $E = \{\{x, y\}, |x - y| = 1\} \cup \{\{0, n-1\}\}$.

1. c'est-à-dire que $\deg(x) > 0$ pour tout sommet x

1. Justifier par un dessin du graphe l'appellation n-cycle.

Soit maintenant deux réels $p, q \in]0,1[$ de somme 1. On considère la matrice stochastique sur V

$$P(x,y) = \mathbf{1}_{\{y=x+1 \mod n\}} p + \mathbf{1}_{\{y=x-1 \mod n\}} q$$

2. Pour quelles valeurs de p la matrice stochastique P est-elle réversible ?

Exercice 6. [Lazy chain, ou chaîne paresseuse] Soit P une matrice stochastique, on pose $Q = (P+I)/2$.

1. Montrer que Q définit une matrice stochastique, et une matrice apériodique.
2. Observer qu'une mesure de probabilité π sur Ω est une mesure stationnaire pour P ssi elle est une mesure stationnaire pour Q.

Exercice 7. [Périodicité du n-cycle] On reprend l'exemple du n-cycle introduit dans l'exercice 5. On note P la matrice de transition de la marche aléatoire sur ce graphe. On pose $\mathcal{T}(x,y) = \{t \geq 0, P^t(x,y) > 0\}$. On définit un chemin de longueur t de x à y comme une collection de sommets $(x_s)_{0 \leq s \leq t} \in V^{t+1}$ tel que pour tout $s \in \{0, \ldots, t-1\}, \{x_s, x_{s+1}\} \in E$.

1. Observer que $t \in \mathcal{T}(x,y)$ ssi il existe un chemin de longueur t de x à y
2. Dans le cas $n = 4$, expliciter $\mathcal{T}(0,0), \mathcal{T}(0,1), \mathcal{T}(0,2), \mathcal{T}(0,3)$ et dans le cas $n = 5$, expliciter $\mathcal{T}(0,0), \mathcal{T}(0,1), \mathcal{T}(0,2), \mathcal{T}(0,3), \mathcal{T}(0,4)$.
3. Décrire $\mathcal{T}(x,y)$ dans le cas général en fonction des quantités k et $n-k$, où $k = |x-y|$.
4. En déduire la période de P si n est pair et si n est impair.
5. On suppose n impair. Trouver le plus petit entier t tel que pour tout $x, y \in V$, $P^t(x,y) > 0$.
6. Soit $j \geq 2$, et $n_1, \ldots, n_j \geq 2$. On forme un graphe en considérant un n_1-cycle, un n_2-cycle, ... et un n_j-cycle, puis en identifiant les sommets 0 de tous ces cycles de manière à former un graphe connexe. Sous quelle condition le graphe résultant est-il apériodique ?

Exercice 8. [Unicité de la mesure stationnaire] Soit P une matrice stochastique irréductible sur Ω. On cherche à montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité stationnaire pour P par une méthode distincte de celle vue en cours (basée sur la transposition et le théorème du rang). On note π_1 et π_2 deux mesures de probabilité stationnaires de P.

1. Soit $y \in \Omega$ qui minimise $x \mapsto \pi_1(x)/\pi_2(x)$. Partant de l'égalité

$$\sum_{x \in \Omega} \frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} \frac{\pi_2(x)}{\pi_2(y)} P(x,y) = \frac{\pi_1(y)}{\pi_2(y)}$$

   montrer que tout x tel que $P(x,y) > 0$ vérifie $\pi_1(y)/\pi_2(y) = \pi_1(x)/\pi_2(x)$.

2. Obtenir la même conclusion pour tout $x \in \Omega$, puis conclure.

Exercice 9. [Propriétés spectrales, I] On étudie les propriétés de P vu comme opérateur agissant par multiplication à gauche $P : \mathbb{C}^\Omega \to \mathbb{C}^\Omega, f \mapsto Pf$.

1. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|.\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \max_z |f(z)|$:

$$\|Pf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

2. On se retreint à $f \in \mathbb{R}^\Omega$ pour cette question. Soit π une mesure de probabilité stationnaire de P. On suppose que pour tout $x \in \Omega, \pi(x) > 0$. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|.\|_\pi$ induite par le produit scalaire $\langle f, g\rangle_\pi = \sum_z f(z)g(z)\pi(z)$:

$$\|Pf\|_\pi \leq \|f\|_\pi$$

(On pourra penser à utiliser Cauchy-Schwarz).
3. Soit f un vecteur propre de P associé à une valeur propre $\lambda \neq 1$. Montrer que $\sum_x f(x)\pi(x) = 0$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de P, alors son module satisfait $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 10. [Fonctions harmoniques sur un graphe infini] Une proposition du cours assure que les fonctions harmoniques par rapport à une matrice stochastique P irréductible sur un espace *fini* Ω sont constantes. L'objectif de l'exercice est de comprendre comment ces propriétés peuvent être mises en défaut pour un graphe infini.

Étant donné un graphe G, on définit donc une matrice stochastique P sur l'ensemble des sommets $V(G)$ de G comme dans l'exercice 2, et on dira simplement que $f : V(G) \to \mathbb{R}$ est harmonique sur G si f est harmonique par rapport à P ainsi définie.

1. Caractériser l'ensemble des fonctions harmoniques sur $\mathbb{Z}$ (vu comme graphe). $\mathbb{Z}$ admet-il des fonctions harmoniques bornées non constantes ?
2. Construire une fonction harmonique bornée non constante sur l'arbre binaire complet (un graphe connexe acyclique dans lequel tout sommet est de degré 3, sauf la racine qui est de degré 2 : le sommet racine a deux enfants, qui chacun ont deux enfants, qui chacun ...). On pourra commencer par chercher cette fonction à symétrie radiale, c'est-à-dire fonction de la seule distance à la racine.

Exercice 11. [Somme de Césaro et existence d'une mesure stationnaire] Soit μ une mesure de probabilité sur Ω vue ici comme un vecteur ligne. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k \quad \text{et} \quad \mu_n = \mu Q_n$$

la moyenne de Césaro des itérées de P, et son application à μ.

1. Vérifier que la mesure de probabilité μ_n satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$|\mu_n P(x) - \mu_n(x)| \leq 1/n.$$

2. Justifier l'existence d'une suite extraite $(n_k)_k$ telle que pour tout x, la suite $(\mu_{n_k})_k$ converge vers une limite notée ν. Montrer que la mesure limite ν est une mesure de probabilité stationnaire pour P.

Exercice 12. [Somme de Césaro : convergence sans extraction] On garde les notations de l'exercice 11. La matrice $I-P$ agit par multiplication par la droite selon $\mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}^\Omega, \nu \mapsto \nu(I-P)$ (noter que l'on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\Omega$ plutôt que le sous-ensemble des mesures de probabilité, de manière à rester dans le cadre de l'algèbre linéaire.)

1. Calculer νQ_n dans le cas où $\nu \in \mathrm{Im}(I-P)$ puis dans le cas où $\nu \in \mathrm{Ker}(I-P)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(I-P) \cap \mathrm{Im}(I-P) = \{0\}$, et conclure à l'aide du théorème du rang que $\mathrm{Ker}(I-P) \oplus \mathrm{Im}(I-P) = \mathbb{R}^\Omega$.

2. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\Omega$. En déduire qu'il existe $\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{R}^\Omega$ telles que $\mu = \nu_0(I-P) + \nu_1$ avec $\nu_1(I-P) = 0$. Calculer μ_n en fonction de ν_0 et ν_1 et en déduire que $\mu_n \to \nu_1$ quand $n \to \infty$.
3. Déduire des questions précédentes que $\nu_1 = \nu$.

Exercice 13. [Propriétés spectrales, II] Soit P stochastique irréductible réversible par rapport à une mesure de probabilité π. On munit l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle_\pi = \sum_x f(x)g(x)\pi(x)$. Posons $n = |\Omega|$.

1. Construire une base de vecteurs propres $(f_k)_{1\le k\le n}$, orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$. Indication : on pourra considérer la matrice auxilliaire Q définie par
$$Q(x,y) = \sqrt{\pi(x)/\pi(y)}\, P(x,y),$$
qui, en tant que matrice symétrique, admet une base de vecteurs propres orthonormée pour le produit scalaire usuel euclidien.
2. On notera les valeurs propres associées $(\lambda_k)_{1\le k\le n}$. En déduire que
$$P^t(x,y) = \sum_{k\ge 1} f_k(x)f_k(y)\pi(y)\lambda_k^t.$$
3. On suppose désormais les valeurs propres classés par valeur absolue décroissante. Étudier l'espace propre associé au vecteur propre 1, et en déduire
$$\left|\frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} - 1\right| \le |\lambda_2|^t \sum_{k\ge 2} f_k(x)f_k(y)$$
4. Observer que : $\langle \delta_x, \delta_x\rangle_\pi = \pi(x)$, puis développer f dans la base des f_k pour conclure que $\sum_k f_k^2(x) = \frac{1}{\pi(x)}$.
5. En déduire finalement
$$\left|\frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} - 1\right| \le \frac{|\lambda_2|^t}{\min_x \pi(x)}$$
Si P apériodique, $|\lambda_2| < 1$ (voir polycopié), et on obtient donc une nouvelle preuve du théorème de convergence, avec une vitesse de convergence exprimée en terme de valeur propre et vecteur propre cette fois ci.