Feuille d'exercices n° 3 : Indépendance

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère A et B deux éléments de $\mathcal{A}$, et $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω.

1. Calculer $\mathbb{P}(B \mid A)$ en fonction de $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \mid B)$.
2. Connaissant $\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \mid B), \mathbb{P}(A \mid C_i)$ et $\mathbb{P}(C_i)$, calculer $\mathbb{P}(B \mid A)$.
3. Soit p_i la probabilité pour qu'un couple ait exactement i enfants, calculer la probabilité pour qu'un couple ait un enfant unique sachant qu'il n'a pas de fille.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux sous-algèbres de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont indépendantes si

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) \text{ pour tout } B \in \mathcal{B} \text{ et } C \in \mathcal{C}.$$

On suppose que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$ et $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{H})$ où $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des familles d'ensembles stables par intersection finie.

Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$ pour tout $G \in \mathcal{G}$ et $H \in \mathcal{H}$.

Exercice 3. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de $\mathcal{F}$ la tribu de ses parties et de la probabilité uniforme. Trouver $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ tels que $\forall A_1 \in \mathcal{G}_1$ et $\forall A_2 \in \mathcal{G}_2, A_1$ et A_2 sont indépendants et tels que $\sigma(\mathcal{G}_1)$ et $\sigma(\mathcal{G}_2)$ ne sont pas indépendantes.

Exercice 4. On définit deux tribus sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \sigma(\{x, x > 0\}, \{0\}, \{x, x < 0\}) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \sigma(\{x, |x| \in B\};\, B \subset \mathbb{R}_+ \text{ mesurable}).$$

Caractériser toutes les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes de lois respectives $\mathrm{Exp}(\lambda_1)$ et $\mathrm{Exp}(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. On pose $M = \sup(X, Y)$ et $m = \inf(X, Y)$.

1. Montrer que $(m, M - m)$ admet la densité jointe :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\mathbb{1}_{x>0}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\lambda_1 e^{-\lambda_1 y}\right)\mathbb{1}_{y>0}.$$

2. En déduire que m et $M - m$ sont indépendantes et identifier leur lois.

Exercice 6. Soit X une v.a. réelle de loi symétrique (X et $-X$ ont même loi). Soit ε une v.a. indépendante de X telle que $P(\varepsilon = 1) = p = 1 - P(\varepsilon = -1)$, pour p dans $]0, 1[$.

1. Donner la loi de εX.
2. A quelle condition sur p, la covariance entre X et εX est-elle nulle ?
3. Soit $Y = \mathbb{1}_{X>0} - \mathbb{1}_{X<0}$. Donner la loi de Y, de XY. Calculer la covariance entre $|X|$ et Y. Ces deux v.a. sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Soit X et Y deux v.a. réelles indépendantes de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer la loi des coordonnées polaires (R, Θ) du couple (X, Y). Les v.a. réelles R et Θ sont-elles indépendantes ?
2. En déduire une façon de simuler une réalisation d'une v.a. réelle de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (on supposera que l'on dispose d'un générateur de nombre aléatoire "idéal" permettant d'obtenir des réalisations de VARs indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$).

Exercice 8. Soit X et Y deux v.a. réelles indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_1, \beta)$, pour $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$

1. Déterminer la loi du couple
$$\left(X + Y,\ \frac{X}{X + Y}\right).$$
2. En déduire les lois marginales de $X + Y$ et $X/X + Y$ et que ces deux variables aléatoires sont indépendantes.