Sur la sélection congruente des blocs de Jordan d'une matrice carrée singulière

Ikramov K.D. Sur la sélection congruente des blocs de Jordan d'une matrice carrée singulière // J. Sib. de math. num. / Acad. des Sci. de Russie. Branche Sib. - Novossibirsk, 2018. - Vol. 21, No 3. - P. 255-258.

Le concept de décomposition régularisante a été introduit par R. Horn et V. Sergeichuk, signifiant la représentation d'une matrice carrée par une somme directe de blocs de Jordan avec zéro sur la diagonale principale et une matrice non singulière. Cette représentation est atteinte par des transformations congruentes et diffère de la forme normale de Jordan. Pour des raisons expliquées dans cet article, nous préférons parler de la décomposition SN (autrement dit, décomposition singulière-non singulière) de la matrice plutôt que de la décomposition régularisante. En conséquence, les algorithmes fournissant cette décomposition sont appelés algorithmes SN. Nous proposons un algorithme rationnel qui simplifie considérablement les algorithmes SN proposés par Horn et Sergeichuk.

Mots-clés : transformation congruente, bloc de Jordan, décomposition SN, algorithme rationnel.

1. Soit A une matrice carrée de dimension $n \times n$. Pour la clarté, nous considérons A comme une matrice complexe, bien que tout ce qui est dit ci-dessous s'applique presque sans modification aux matrices sur n'importe quel champ (ou même un corps) avec involution.

Nous distinguons deux types de transformations congruentes : les congruences T, c'est-à-dire les transformations de la forme

$$A \to S^T AS \tag{1}$$

et les congruences *,

$$A \to S^* AS. \tag{2}$$

Dans les deux formules, S est une matrice arbitraire non singulière. Les transformations de la forme (1) correspondent au cas où l'involution dans $\mathbf{C}$ est l'identité $z \to z$, et les transformations de la forme (2) correspondent à la conjugaison complexe $z \to \bar{z}$.

Dans les deux cas, la matrice $\boldsymbol{S}$ peut être choisie de manière à ce que A prenne la forme

$$B \oplus J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_p}. \tag{3}$$

Ici, $J_{n_1}, \ldots, J_{n_p}$ sont des blocs de Jordan d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_p$ avec un zéro sur la diagonale principale, et B est une matrice non singulière, définie à une congruence près. La représentation (3) est appelée dans [1] la décomposition régularisante de la matrice A, la somme directe $J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_p}$ étant la partie singulière de cette décomposition, et la matrice B est dite définir sa partie régulière. Ces deux derniers termes sont également empruntés à l'article [1].

Dans [1], plusieurs algorithmes pour calculer la décomposition (3) sont décrits. Les auteurs les appellent algorithmes de régularisation, probablement parce qu'après l'extraction des blocs $J_{n_1}, \ldots, J_{n_p}$, il reste une matrice non singulière, c'est-à-dire régulière. À notre avis, ces appellations - décomposition régularisante, algorithme de régularisation - sont particulièrement malheureuses, car elles rappellent inévitablement la théorie de la régularisation d'A.N. Tikhonov, que les auteurs de [1] n'avaient pas en vue. Nous appellerons (3) la décomposition SR (c'est-à-dire singulière-régulière) de la matrice A, et les algorithmes qui calculent cette décomposition, les algorithmes SR.

L'un des algorithmes SR décrits dans [1] utilise uniquement des transformations unitaires (ou orthogonales dans le cas réel), ce que les auteurs considèrent comme un avantage important, bien que l'utilité de l'unitarité puisse être mise en doute lors de la résolution d'un problème mal posé, similaire à la tâche de construire la forme normale de Jordan.

À notre avis, un autre algorithme SR de [1], basé sur des transformations élémentaires de lignes et de colonnes de la matrice A, est inutilement compliqué. Le but de cette note est de simplifier autant que possible le processus SR, tout en restant dans la classe des transformations non orthogonales (non unitaires). Dans le cadre des systèmes d'algèbre informatique, cela permet une implémentation précise de l'algorithme, au moins pour les matrices avec des éléments rationnels ou gaussiens rationnels.

2. Pour être précis, nous parlerons de congruences T de la matrice A. Les invariants évidents de telles transformations sont le rang r_A et le défaut d_A de cette matrice. D'où il suit :

1. le nombre p de blocs de Jordan dans la décomposition SR (3) est égal au nombre d_A ;
2. les blocs d'ordre 1 dans (3) correspondent aux vecteurs situés à l'intersection des noyaux de la matrice A et de la matrice transposée A^T ; le nombre de ces blocs est égal à la dimension de cette intersection.

Calculer une base du noyau d'une matrice et une base de l'intersection de deux sous-espaces sont des tâches standards en algèbre linéaire, que l'on enseigne aux étudiants de première année. Par conséquent, toute la problématique de la réduction à la forme (3) revient à apprendre à extraire de A les blocs de Jordan d'ordre 2 et supérieur (à condition, bien sûr, que de tels blocs existent).

3. Supposons que la matrice A soit singulière et que son noyau $\mathcal{N}_A$, tout en pouvant intersecter le noyau $\mathcal{N}_{A^T}$ de la matrice A^T, ne coïncide pas avec lui.

Soit f un vecteur arbitraire de l'ensemble $\mathcal{N}A \backslash \mathcal{N}A^T$. Partons de la base initiale des vecteurs de coordonnées $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pour passer à une base arbitraire dans laquelle f est le premier vecteur. Dans la matrice $\tilde{A}$, obtenue à la suite de ce changement de base, la première colonne est nulle. Comme f n'appartient pas à

$\mathcal{N}_{A^T}$, la première ligne de $\tilde{A}$ contient, en revanche, des éléments non diagonaux non nuls. Par un échange de colonnes, nous faisons en sorte que l'élément en position $(1,2)$ soit non nul. Si cela peut être fait de plusieurs manières, alors, pour des raisons de stabilité numérique, nous plaçons en position $(1,2)$ l'élément ayant la plus grande valeur absolue. Pour compléter la transformation congruente, il est nécessaire d'échanger également les lignes correspondantes. Cet échange ne modifiera pas la première colonne (nulle).

Ensuite, à l'aide de l'élément $(1,2)$, nous procédons à l'élimination des autres éléments non diagonaux de la première ligne. Pour ce faire, nous soustrayons les colonnes suivantes de la deuxième colonne, multipliée par les coefficients appropriés. Des actions similaires doivent être effectuées avec les lignes de la matrice, ce qui ne changera pas la première colonne nulle.

La première ligne et la première colonne de la matrice ont maintenant l'aspect souhaité. L'étape suivante consiste à éliminer les éléments de la deuxième colonne. La première ligne dans cette élimination sert de guide, et son élément $(1,2)$ est l'élément guide. Lorsque l'élimination est terminée, cet élément devient le seul élément non nul de la deuxième colonne. Pour terminer formellement la congruence, il faudrait soustraire la première colonne, multipliée par les coefficients appropriés, des autres colonnes. Cependant, comme cette colonne est nulle, les opérations correspondantes sur les colonnes peuvent être omises.

Soit $\hat{A}$ la matrice obtenue après l'élimination dans la deuxième colonne. Si sa deuxième ligne contient des éléments non nuls, nous répétons pour cette ligne les mêmes actions qui ont été effectuées précédemment pour la première ligne de la matrice A, c'est-à-dire que par un échange de colonnes, nous plaçons un élément non nul (ou même l'élément ayant la plus grande valeur absolue) en position $(2,3)$, nous procédons à l'élimination des autres éléments non nuls de cette ligne, puis nous éliminons les éléments $(3,3),(4,3),\ldots,(n,3)$ de la troisième colonne. Chacune de ces actions est complétée par une congruence avec les opérations correspondantes sur les lignes ou les colonnes. Cela préserve tous les éléments nuls des deux premières colonnes.

Si la troisième ligne de la matrice obtenue contient des éléments non nuls, le processus décrit se poursuit de la manière déjà connue. Il se peut que nous atteignions ainsi la dernière ligne. Le résultat final sera alors une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & & \\ & 0 & \alpha_2 & & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & & 0 & \alpha_{n-1} \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_i \neq 0,\ i=1,2,\ldots,n-1,$$

congruente à la matrice originale A. Par une congruence supplémentaire avec une matrice de transformation diagonale, on peut transformer (4) en un bloc de Jordan J_n. Dans ce cas, ce bloc sera le seul terme de la décomposition CP (3).

Si l'on s'abstrait de ce cas extrême, le processus d'extraction d'un bloc de Jordan se terminera à une étape antérieure. Supposons qu'après $k-1$ étapes du processus décrit ci-dessus, où $k \leq n-2$, il s'avère que tous les éléments de la k-ième ligne sont nuls. Cela signifie que la matrice actuelle a la forme d'une somme directe

$$G_k \oplus A_{n-k},$$

où

$$G_k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & & \\ & 0 & \alpha_2 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & 0 & \alpha_{k-1} \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et A_{n-k} - matrice d'ordre $n-k$. En appliquant une congruence diagonale, nous transformons G_k en bloc de Jordan J_k, qui sera l'un des termes de la décomposition CP recherchée.

Si la matrice A_{n-k} est non singulière, alors elle sera un terme B de cette décomposition, et la décomposition elle-même sera la somme de deux termes. Sinon, le processus de formation des blocs de Jordan doit être appliqué à A_{n-k} comme décrit précédemment.

4. Les auteurs de l'article [1] considèrent la décomposition CP (3) comme la première étape du processus de construction de la forme canonique de la matrice A par rapport aux congruences. L'étape suivante consiste à simplifier la forme d'une matrice non singulière B. Dans le cas des congruences *, cette étape présente des difficultés spécifiques, que nous examinerons dans une publication distincte.

5. Comme il est bien connu, la partie nilpotente de la forme de Jordan d'une matrice complexe quelconque peut être déterminée par un calcul rationnel, c'est-à-dire un algorithme fini utilisant uniquement des opérations arithmétiques. Les nombres de blocs et leurs ordres pour la valeur propre nulle sont déterminés par les nombres

$$r_k = \operatorname{rank} A^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad r_0 = n \tag{5}$$

Il faut calculer la séquence $\{r_k\}$ jusqu'à ce qu'elle se stabilise, c'est-à-dire jusqu'à l'indice k_0 où l'égalité suivante est réalisée pour la première fois :

$$r_{k_0} = r_{k_0+1}$$

L'algorithme de calcul de la décomposition CP, tel que décrit au point 3 de cet article, est également rationnel. Cependant, la question de l'interprétation des paramètres $p, n_1, n_2, \ldots, n_p$ de la décomposition (3) en termes de quantités définies directement par la matrice A (voir (5)) reste ouverte.

Bibliographie

1. Horn R.A., Sergeichuk V.V. A regularization algorithm for matrices of bilinear and sesquilinear forms // Linear Algebra Appl. - 2006.- Vol. 412, iss. 2-3.-P. 380-395.

Reçu par la rédaction le 10 août 2017, version finale le 7 novembre 2017.