Feuille de TD n° 7

Exercice 1. Soit X variable aléatoire dont la loi est sans atomes ($\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) = 0$), et Y une variable aléatoire indépendante de X. Montrer que la loi de $X + Y$ est sans atome.

Exercice 2. Calculer les quantités suivantes, où le sup est pris sur l'ensemble (des lois de) variables aléatoires qui satisfont les contraintes énoncées après " ;". On identifiera dans chaque cas la ou les lois qui réalisent le sup lorsque celles-ci existent :

1. $\sup\{\mathbb{E}[X^2] \; ; \; \mathbb{P}(X \in [-1,1]) = 1\}$
2. $\sup\{\mathrm{Var}(X) \; ; \; \mathbb{P}(X \in [-1,1]) = 1\}$
3. $\sup\{\mathrm{Var}(X) \; ; \; \mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1\}$ [1]
4. $\sup\{\mathbb{E}[(X-Y)^2] \; ; \; X, Y \text{ i.i.d., } \mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1\}$
5. $\sup\{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|] \; ; \; \mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1\}$ [2]
6. $\sup\{\mathbb{E}[|X - Y|] \; ; \; X, Y \text{ i.i.d, } \mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1\}$ [3]

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles. On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ est complètement convergente vers X si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$.

1. Soit (X_n) complètement convergente vers X. Montrer que (X_n) converge p.s. vers X.
2. Soit (X_n) suite de variables aléatoires indépendantes qui converge p.s. vers une v.a. X *constante*. Montrer que (X_n) est complètement convergente vers X.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires réelles.

1. Supposons que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > M) < \infty$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{P}(\sup_n X_n < \infty) = 1$.
2. Réciproquement, si les v.a.r. $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et satisfont $\mathbb{P}(\sup_n X_n < \infty) = 1$, montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > M) < \infty$.

Exercice 5.

1. Observer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{x>n} \leq x \leq \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{x>n}.$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a. i.i.d positives. On suppose d'abord $\mathbb{E}[X_1] < \infty$.

2. Soit $x > 0$. Montrer que : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n/n > x) < \infty$.
3. Déduire $\mathbb{P}(\lim X_n/n = 0) = 1$.
4. Observer que $\{X_n/n \to 0\} \subset \{\max\{X_1, \ldots, X_n\}/n \to 0\}$.
5. Conclure que $\mathbb{P}(\lim(\max\{X_1, \ldots, X_n\}/n) = 0) = 1$.

On suppose désormais $\mathbb{E}[X_1] = \infty$.

6. Soit $x > 0$. Montrer que : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n/n > x) = \infty$.
7. Déduire $\mathbb{P}(\limsup X_n/n = \infty) = 1$.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. selon la loi exponentielle de paramètre 1, de densité $e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$, et $\varepsilon > 0$. Montrer que :

1. $\sum_n \mathbb{P}\left(X_n > (1+\varepsilon)\log(n)\right) < \infty$.
2. $\sum_n \mathbb{P}\left(X_n > \log(n)\right) = +\infty$.
3. En déduire $\mathbb{P}\left(\limsup(X_n/\log(n)) = 1\right) = 1$.

---

1. le déduire de la question précédente.
2. penser à Cauchy-Schwarz pour faire le lien avec les questions précédentes.
3. commencer par écrire pour $y \geq x$: $y - x = \int_x^y \mathrm{d}t = \int \mathbf{1}_{x<t<y} \mathrm{d}t$ et en tirer $\mathbb{E}[|X-Y|] = 2\int_0^1 \mathbb{P}(X < t < Y)\mathrm{d}t$.

Posons $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Montrer que :

4. $\mathbb{P}(Y_n/\log(n) < 1 - \varepsilon) \le e^{-n^\varepsilon}$.
5. $\sum_{n\ge 1} e^{-n^\varepsilon} < \infty$.
6. Déduire $\mathbb{P}\left(\liminf(Y_n/\log(n)) \ge 1 - \epsilon\right) = 1$.
7. Déduire de la question 3 que $\mathbb{P}\left(\limsup(Y_n/\log(n)) \le 1\right) = 1$.
8. Conclure que $\mathbb{P}(\lim Y_n/\log(n) = 1) = 1$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable. On suppose que pour tout $n \ge m$, $\mathbb{E}[X_n X_m] \le r(n-m)$, avec $\lim_{n\to\infty} r(n) = 0$. Montrer la convergence L^2 suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\sum_{1\le i\le n} X_i}{n}\right)^2\right] = 0.$$