Feuille de TD n° 6

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in [0, 1/2]$. On pose :

$$X_n = \begin{cases} -n, & \text{avec probabilité} \quad \alpha \\ 0, & \text{avec probabilité} \quad 1-2\alpha \\ n, & \text{avec probabilité} \quad \alpha \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathrm{Var}(X_n)$, et trouver α tel que $\mathrm{Var}(X_n) = 1$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. En déduire
$$\inf \{\mathbb{P}(|X| > \varepsilon) \,:\, \mathbb{E}[X] = 0, \mathrm{Var}(X) = 1\} = 0$$
où l'infimum est pris sur les (lois de) variables aléatoires X.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\alpha \in [0, 1]$, on pose :

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{avec probabilité} \quad \alpha \cdot (1 - 1/n) \\ 1, & \text{avec probabilité} \quad 1-\alpha \\ n, & \text{avec probabilité} \quad \alpha/n \end{cases}$$

3. Calculer $\mathbb{E}[Y_n]$ et $\mathrm{Var}(Y_n)$, et trouver α tel que $\mathrm{Var}(Y_n) = \sigma^2$.
4. Soit $y \geq 1$, $\sigma^2 > 0$. En déduire
$$\inf \left\{\mathbb{P}(|Y| > y) \,:\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1, \,\mathbb{E}[Y] = 1, \mathrm{Var}(Y) = \sigma^2\right\} = 0$$
où l'infimum est à nouveau pris sur les (lois de) variables aléatoires Y.

Exercice 2. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ avec

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^i}, \quad i \in \mathbb{N}^\star.$$

Calculer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(\min(X, Y) \leq i)$
2. $\mathbb{P}(X = Y)$
3. $\mathbb{P}(Y > X)$
4. $\mathbb{P}(X \text{ divise } Y)$
5. $\mathbb{P}(X \geq kY)$ pour un entier $k \geq 1$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Rademacher, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. Soit

$$Z_n = \prod_{i=1}^n X_i.$$

Montrer que $Z_1, Z_2, Z_2, \ldots$ sont indépendantes.

Exercice 4. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On rappelle que $\limsup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k$ est la lim sup des événements A_n.

1. Rappeler la démonstration du lemme de Borel-Cantelli :
$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \text{ implique } \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

2. Si de plus les événements $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants, montrer[1] que :

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \text{ implique } \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

Exercice 5. Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in [0,1]$. On définit, pour $k \geq 1$, les événements :

$$A_k = \{\exists \text{ au moins } k \text{ "1" consécutifs parmi } B_{2^k}, \ldots, B_{2^{k+1}-1}\}$$

Montrer les deux énoncés suivants :

1. Si $p < 1/2$, montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 0$.
2. Si $p \geq 1/2$, montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 1$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$ par :

$$X_n = \begin{cases} -n^2, & \text{avec probabilité} \quad 1/(2n^2) \\ 0, & \text{avec probabilité} \quad 1 - 1/n^2 \\ n^2 & \text{avec probabilité} \quad 1/(2n^2) \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathbb{E}[|X_n|]$.
2. On considère l'énoncé : "Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui satisfait $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et $\mathbb{E}[|X_n|] = 1$ pour tout $n \geq 1$, alors $\mathbb{P}(\liminf X_n < 0) > 0$". Vrai ou Faux ?

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que

$$\mathbb{P}(X + Y = \alpha) = 1$$

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires constantes presque sûrement :

1. dans le cas où X et Y sont de carré intégrables[2].
2. dans le cas général[3].

1. On pourra considérer $B_{n,m} = \bigcup_{n\leq k\leq n+m} A_k$, et montrer notamment à l'aide de l'inégalité $\forall x \geq 0, e^{-x} \geq 1 - x$, que $\mathbb{P}((B_{n,m})^c) \to 0$ quand $m \to \infty$.
2. On pourra regarder la variance.
3. On pourra commencer par traduire de façon probabiliste le fait que X ne soit pas une variable aléatoire constante, et montrer qu'alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < P(X \leq \alpha) < 1$