Feuille de TD n° 2

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. On pose $A_n = \{|f| \leq n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si $\mu(E) \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_n) \neq 0$.
2. Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ et $\epsilon > 0$ tels que $\mu(A) \neq 0$ et pour tout $x \in A$, $|f(x)| \geq \epsilon$.

Exercice 2. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Montrer que :

1. Pour tout $a > 0$, $\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{\int_E f d\mu}{a}$.
2. Si $\int f d\mu < +\infty$, alors f est finie μ-p.p.
3. $\int_E f d\mu = 0$ si et seulement si f est nulle μ-p.p.
4. Si $g : E \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable positive telle que $f = g$ μ-p.p., alors $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.
5. Si $\int f d\mu < +\infty$, $\lim_{a\to\infty} a\mu(\{f \geq a\}) = 0$.

Exercice 3. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p. vers une fonction f.

1. On suppose qu'il existe n_0 tel que $\int_E f_{n_0}\, d\mu < \infty$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu$.
2. Que peut-on dire sans l'hypothèse d'intégrabilité ?

Exercice 4. [Lemme de Scheffé] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$, mesurables et positives. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f μ-p.p., avec f intégrable, et que

$$\int_E f_n\, d\mu \to \int_E f\, d\mu.$$

On cherche à montrer que $\int |f - f_n| d\mu \to 0$ quand $n \to \infty$. On rappelle les notations $x_+ = \max\{x, 0\}$ et $x_- = \max\{-x, 0\}$ des parties positive et négative de x respectivement.

1. Montrer que $\int (f - f_n)_+ d\mu \to 0$.
2. En déduire $\int (f - f_n)_- d\mu \to 0$.
3. Conclure.

Exercice 5. Dans les six cas suivants, où λ désigne la mesure de Lebesgue restreinte à $\mathbb{R}^+$, montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n\, d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

$$f_n^1(x) = |\cos(x)|^{1/n} e^{-x} \qquad f_n^2(x) = \frac{e^{-x^2}}{2\cos(x/n) - 1} 1_{\{3|\cos(x/n)|\geq 2\}}$$

$$f_n^3(x) = \sin(nx) 1_{[0,n]}(x) \qquad f_n^4(x) = \frac{\sin(x^n)}{x^n} \frac{1}{1+x^2}$$

$$f_n^5(x) = \frac{ne^{-x}}{\sqrt{1+n^2x^2}} \qquad f_n^6(x) = \frac{ne^{-nx}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$$

Exercice 6. Soit $\phi : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ une fonction mesurable et μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$. On note $\nu = \phi(\mu)$ la mesure image de μ par ϕ.

1. Montrer que pour toute fonction $f : (F, \mathcal{B}) \to ([0,+\infty], \mathcal{B}([0,+\infty]))$-mesurable, on a
$$\int_F f\, d\nu = \int_E f \circ \phi\, d\mu.$$
2. Soit $f : (F, \mathcal{B}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable. Montrer que f est ν-intégrable sur F si et seulement si $f \circ \phi$ est μ-intégrable sur E et que dans ce cas on a $\int_F f\, d\nu = \int_E f \circ \phi\, d\mu$.

Exercice 7. (Uniforme continuité de l'intégrale) Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_E |f|\, 1_{\{|f|\geq n\}}\, d\mu = 0$.
2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \big(\mu(A) < \eta \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon\big)$.
3. En déduire que si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue dx, alors $F : u \mapsto \int_{[0,u]} f(x)dx$ est uniformément continue.

Exercice 8. (Convergence en mesure)
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et$f$ des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que f_n converge vers f en mesure lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} \to 0.$$

1. Montrer que si $\int_E |f_n - f|\, d\mu \to 0$, alors f_n converge vers f en mesure. Montrer que la réciproque est fausse.
2. Montrer que si $f_n \to f$ μ-pp, alors f_n converge vers f en mesure. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que, si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f en mesure, alors on peut extraire une sous-suite qui converge μ-pp vers f. (On pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli [1]).
4. On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f en mesure et qu'il existe g intégrable tel que $|f_n| \leq g$.
   (a) Montrer que $\mu\{|f| > g\} = 0$
   (b) Montrer que $\int_E |f_n - f|\, d\mu \to 0$. (On pourra utiliser les résultats de l'exercice 7 au sujet de l'uniforme continuité de l'intégrale).

Exercice 9. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ mesurable. On définit l'application ν sur $\mathcal{A}$ par : $\nu(A) = \int f \mathbb{1}_A\, d\mu$.

1. Montrer que ν est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$. On dit que ν admet la densité f relativement à μ et on note $d\nu(x) = f(x)\, d\mu(x)$ ou simplement $\nu = f \cdot \mu$.
2. Montrer que, pour toute fonction $\phi : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ mesurable, on a
$$\int \phi\, d\nu = \int f\phi\, d\mu.$$
3. Caractériser les fonctions h intégrables par rapport à ν, et les ensembles mesurables de mesure nulle de ν.

1. Enoncé : Si $A_n \in \mathcal{A}$ vérifie $\sum \mu(A_n) < \infty$, alors $\mu(\limsup_n A_n) = 0$ où $\limsup_n A_n := \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{m\geq n} A_m$