

Mémoire de magistère

Benjamin Groux
Université Paris-Sud XI, Orsay

Octobre 2013

Introduction

J'ai effectué mon magistère de mathématiques à l'Université Paris-Sud XI d'Orsay entre 2009 et 2013. La première partie de ce mémoire est justement consacrée au déroulement de ma scolarité au sein du magistère. La seconde partie est consacrée à la présentation de mon sujet de thèse, qui a débuté le 1er septembre 2013. Enfin, ce mémoire comporte quatre annexes, qui sont les travaux que j'ai réalisés dans le cadre de mes études au magistère.

Remarque : Chaque annexe contient sa propre table des matières et sa propre numérotation des pages. De plus, ce sont les travaux que j'ai rendus en l'état, les erreurs n'y ont donc pas été corrigées.

Table des matières

Introduction	2
1 Descriptif de mon cursus au sein du magistère	4
2 Présentation de mon sujet de thèse	8
Annexe A « Quelques résultats sur la différentiabilité »	14
Annexe B « Stage de découverte des mathématiques appliquées à la recherche en génie civil »	21
Annexe C « Introduction à la théorie ergodique »	55
Annexe D « Principes de grandes déviations pour les matrices aléatoires »	108

1 Descriptif de mon cursus au sein du magistère

Dans cette section, je détaille mon parcours universitaire ainsi que chacune des activités que j'ai réalisées dans le cadre du magistère. En plus de ces activités, le magistère a été pour moi un excellent complément au parcours classique, notamment en vue de passer l'agrégation, me permettant d'acquérir du recul, d'appivoiser un peu L^AT_EX, de découvrir de nouveaux domaines des mathématiques, d'élargir ma culture et de repousser certaines limites.

Première année (2009-2010)

J'ai intégré la troisième année de licence mention Mathématiques Fondamentales et Appliquées ainsi que la première année de magistère de mathématiques après trois années de classe préparatoire MPSI, puis MP, au lycée Robespierre d'Arras (2006-2009). Je souhaitais faire un peu plus que le parcours classique, pour ensuite passer l'agrégation de mathématiques, et d'anciens étudiants arrageois ayant fait ce choix auparavant m'avaient parlé du magistère.

Durant cette première année, le magistère proposait des cours et activités en complément de ceux du parcours de la licence MFA :

- le cours « Programmation, algorithmique, théorie de la complexité » du premier semestre était obligatoire
- il fallait ensuite, toujours au premier semestre, suivre l'un des deux cours « Graphes et algèbre linéaire » ou « Mathématiques et biologie »
- au second semestre, un premier cours spécifique au magistère était organisé : « Compléments de topologie et de théorie de la mesure »
- en outre, l'unité « Projet » était obligatoire
- enfin, un stage de trois semaines en entreprise venait conclure cette année.

Je vais maintenant présenter un peu plus en détail ces activités.

Tout d'abord, le cours « Programmation, algorithmique, théorie de la complexité » était une réelle nouveauté pour moi. En effet, je n'avais jamais suivi de cours d'informatique à proprement parler. Après une période d'adaptation, j'ai trouvé ce cours intéressant et utile, mais je dois avouer que la fin du cours m'a paru difficile. J'ai pu utiliser certaines choses apprises durant ce cours, comme les calculs de complexité et surtout un point de vue nou-

veau sur la programmation informatique, dès les séances de TP du second semestre et de l'année de M1.

Ensuite, j'ai choisi de suivre le cours « Graphes et algèbre linéaire ». Ce cours était une nouveauté également. Il a fallu incorporer tout le vocabulaire spécifique aux graphes, mais une fois ce stade dépassé, j'ai trouvé intéressants les problèmes qu'on souhaitait résoudre sur les graphes. Ce cours m'a assez peu servi jusqu'à l'agrégation, où j'ai rencontré quelques graphes dans les exercices et dans la leçon de combinatoire uniquement. Les quelques notions que j'ai acquises durant ce cours ont commencé à me servir lors de mon année de M2, où j'ai rencontré des graphes en théorie des matrices aléatoires, mais aussi des graphes aléatoires lors de mon mémoire.

Durant le second semestre, j'ai assisté au premier cours spécifique au magistère : « Compléments de topologie et de théorie de la mesure ». Sur le coup, il m'a paru extrêmement compliqué. Avec le recul, je me rends compte que c'était une très bonne introduction au cours de topologie de M1 (dans le module « Analyse II ») et qu'il comblait une partie des choses qui n'avaient pas été vues dans le cours « Intégration de Lebesgue ». J'ai retrouvé beaucoup de choses évoquées dans ce cours lorsque je préparais l'agrégation.

Parallèlement, j'ai réalisé mon « Projet » sous la direction de Jean-Claude Saut, sur le thème des fonctions à variations bornées et du théorème de Rademacher. On trouvera une copie de mon travail dans l'annexe A. Cette étude m'a permis d'approfondir le cours de calcul différentiel du premier semestre, dans lequel je n'étais pas vraiment à l'aise, mais aussi de découvrir des objets et des résultats qui sont revenus lors de la préparation à l'agrégation, et même en M2 dans le cours de calcul stochastique.

Enfin, j'ai effectué un stage de trois semaines à l'IUT de Béthune sous la direction de Chafika Dantec-Djelal. Ce stage m'a permis de découvrir l'intérêt des mathématiques pour les autres disciplines, puisque j'ai été accueilli dans un laboratoire de recherche en génie civil, dont la spécialité est l'étude des bétons. On trouvera une copie de mon rapport de stage dans l'annexe B.

Deuxième année (2010-2011)

J'ai effectué ma deuxième année de magistère parallèlement à la première année du master Mathématiques Fondamentales et Appliquées.

Lors de cette deuxième année, le parcours du magistère était réduit à deux cours spécifiques :

- le cours « Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique » au premier semestre
- le cours « Introduction aux systèmes dynamiques » au second semestre.

Le cours « Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique » est celui qui m'a paru le plus intéressant parmi les trois cours spécifiques tout au long du magistère. Bien que les compléments étaient surtout des nouveautés pour moi, j'ai beaucoup apprécié la partie sur la théorie spectrale, qui m'a d'ailleurs été bien utile pour l'agrégation ! La partie sur l'analyse harmonique m'a paru plus difficile dans l'ensemble mais pas inintéressante non plus. J'ai pu y recourir quelques rares fois où j'ai travaillé sur les distributions l'année suivante.

Pour sa part, le cours « Introduction aux systèmes dynamiques » ne m'a pas emballé dès le départ, car je ne comprenais pas très bien les enjeux. Comme en parallèle, dans le cadre du M1, je devais réaliser un « Projet » et qu'un des thèmes proposés était la théorie ergodique, je me suis dit que c'était l'occasion de forcer les choses. J'ai donc réalisé un mémoire sur la théorie ergodique (qu'on trouvera dans l'annexe C) sous la direction de Nessim Sibony, ce qui m'a permis de surmonter mes difficultés et de m'intéresser réellement au cours du magistère. Malheureusement, par la suite, je n'ai pas eu réellement l'occasion de réutiliser le travail que j'avais effectué. En effet, j'ai seulement exploité une partie de mon travail pour la leçon sur les suites récurrentes à l'agrégation et pour un exposé sur le théorème de Birkhoff devant mes camarades agrégatifs.

Troisième année (2012-2013)

Après un an d'interruption pendant lequel j'ai intégré l'ENS Cachan en troisième année et obtenu l'agrégation (le magistère n'y est pas étranger), j'ai repris ma scolarité au magistère pour la troisième année, tout en suivant les cours du M2 Probabilités et Statistiques d'Orsay.

Les activités exigées pour cette dernière année étaient les suivantes :

- suivre un cours supplémentaire par rapport au parcours de M2 classique
- exposer oralement le sujet du mémoire de M2
- rédiger le présent mémoire

- faire une présentation orale du sujet de thèse (dont on trouvera une description dans la section 2).

Je n'ai pas réellement choisi de cours supplémentaire pour la validation du magistère puisque j'avais déjà décidé de suivre un ou deux cours en plus de ce qui était requis pour la validation du M2.

Au premier semestre, j'ai suivi les cours :

- « Grandes déviations »
- « Transitions de phase »
- « Théorèmes limites et processus de Poisson »
- « Calcul stochastique »
- « Concentration et sélection de modèles »
- « Méthodes asymptotiques en statistique »

puis, au second semestre :

- « Matrices aléatoires »
- « Équations différentielles stochastiques rétrogrades et EDP »
- « Processus stochastiques, quelques compléments »
- « Statistique et théorie de l'information »

Cela m'a permis de balayer une bonne partie des domaines des probabilités et des statistiques. Au second semestre, j'ai également effectué un mémoire sur les principes de grandes déviations pour les matrices aléatoires, sous la direction de Mylène Maïda. On en trouvera d'ailleurs un exemplaire dans l'annexe D. Ce mémoire a fait l'objet d'une présentation orale dans le cadre du magistère. Les diapositives de cette présentation, tout comme celles de la présentation de mon sujet de thèse, ne figurent pas dans les annexes ci-après, déjà suffisamment conséquentes.

Je vais continuer les travaux engagés dans le cadre de mon mémoire de M2 au début de ma thèse, dont le sujet est présenté dans la partie suivante.

2 Présentation de mon sujet de thèse

J'effectue ma thèse, intitulée « Transport optimal en probabilités libres et matrices aléatoires », sous la direction de Catherine Donati-Martin, professeur à l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, et de Mylène Maïda, professeur à l'Université de Lille I. Cette thèse s'inscrit dans le domaine des probabilités et plus précisément des matrices aléatoires.

Matrices aléatoires et probabilités libres

Cette branche des mathématiques, en plein essor depuis une bonne dizaine d'années, est fortement liée à de nombreux domaines des mathématiques et de la physique. On peut citer par exemple les graphes aléatoires, les algèbres d'opérateurs, la statistique en grande dimension, la mécanique statistique etc...

La théorie des matrices aléatoires consiste en l'étude du spectre de matrices dont les coefficients sont des variables aléatoires et dont la taille tend vers l'infini. Rigoureusement, on considère une suite de matrices aléatoires et on étudie la limite de leur spectre.

En général, on considère des matrices de l'une des formes suivantes :

- matrice de "type Wigner", c'est-à-dire une matrice hermitienne construite à partir de v.a. indépendantes $X_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$
- matrice de "type Wishart", c'est-à-dire une matrice $X^{n,p} = \frac{1}{n} Y^{n,p} (Y^{n,p})^*$ où $Y^{n,p} = (Y_1, \dots, Y_n)$ et Y_1, \dots, Y_n sont i.i.d. dans \mathbb{R}^p

puis, en notant $\lambda_n^1 \geq \dots \geq \lambda_n^n$ les valeurs propres de X , on s'intéresse à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de la mesure spectrale empirique

$$\mu_n^X = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_n^k} .$$

Même si on peut faire remonter l'origine de la théorie aux travaux du statisticien Wishart dans les années trente, le résultat fondamental date des années cinquante, avec les travaux du physicien Wigner et son fameux théorème, dont l'énoncé est le suivant [1, Théorème 2.1.1].

Soit μ une probabilité sur \mathbb{R} , d'espérance nulle, de variance 1 et dont tous les moments sont finis. Soient $W^{(n)}$ la matrice aléatoire symétrique obtenue à partir des v.a. i.i.d. de loi μ $W_{i,j}^{(n)}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, et $X^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} W^{(n)}$. Alors :

$$p.s., \mu_n^X \xrightarrow{\text{loi}} \mu_{sc} ,$$

où μ_{sc} désigne la loi semi-circulaire, c'est-à-dire la loi de densité

$$\sigma : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{[-2,2]}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Ensuite, les ensembles gaussiens (GOE/GUE, LOE/LUE) ont été très précisément étudiés, notamment car ils fournissent un cadre dans lequel les calculs sont explicites, avant de laisser place aux tentatives de généralisation de leurs propriétés à d'autres types de matrices.

D'autre part, dans les années quatre-vingt, des problèmes d'algèbres de von Neumann ont mené Voiculescu à créer un nouveau domaine des probabilités, appelé probabilités libres. Dans ce cadre, toutes les notions probabilistes classiques ont leur analogue : la loi semi-circulaire remplace la mesure gaussienne standard, l'indépendance est remplacée par la notion de liberté, on a une nouvelle convolution etc... Ce cadre s'avère être particulièrement adapté pour l'étude simultanée de plusieurs matrices aléatoires.

En effet, lorsqu'on dispose de deux matrices déterministes hermitiennes A et B , le problème de Horn consiste à chercher le spectre de $A + B$ connaissant ceux de A et de B . Ce problème a été résolu et les conditions de Horn permettent de décrire l'ensemble des spectres possibles pour $A + B$. Il faut toutefois remarquer que ces conditions ne sont pas très faciles à manipuler. Grâce aux probabilités libres, il est possible de traiter le cas où les matrices A et B sont aléatoires et qu'en plus leur taille tend vers l'infini. En effet, le théorème de Voiculescu (voir [1, Théorème 5.4.5] pour un énoncé précis) permet de connaître asymptotiquement la loi jointe de matrices aléatoires à partir des lois individuelles, et en particulier d'étudier leur somme.

Dans ce cadre des probabilités libres, je vais m'intéresser plus particulièrement à la théorie du transport optimal non commutatif.

Transport optimal « classique »

On fait remonter le problème du transport optimal classique à Monge (1781) mais cette théorie est véritablement en plein essor depuis une vingtaine d'années.

Formalisons le problème. On se place dans un espace topologique E et on considère une fonction de coût $c : E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ semi-continue

inférieurement. Le cas particulier le plus étudié est celui où (E, d) est un espace métrique et $c = d^p$ pour $p \geq 1$. Dans ce cas, pour deux mesures de probabilité μ et ν sur E , le coût optimal

$$T_c(\mu, \nu) = \inf_{(X, Y) : X \sim \mu, Y \sim \nu} \mathbb{E}[c(X, Y)]$$

s'exprime simplement à l'aide de la distance de Wasserstein : $T_{d^p}(\mu, \nu) = W_p(\mu, \nu)^p$. Puisque l'entropie relative

$$H(\nu|\mu) = \begin{cases} \int_E \ln\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\nu & \text{si } \nu \ll \mu \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

mesure la difficulté pour μ de dévier de son comportement typique et qu'elle est plus simple à manipuler que le coût optimal, il semble naturel de l'utiliser pour contrôler ce coût optimal. C'est pourquoi on cherche à obtenir des inégalités transport-entropie, également appelées inégalités de Talagrand. Souvent, on cherche à montrer que μ vérifie une inégalité T_2 , c'est-à-dire : pour toute probabilité ν sur E ,

$$W_2(\mu, \nu)^2 \leq CH(\nu|\mu),$$

où C est une constante déterministe, ou, lorsque ce n'est pas possible, une inégalité T_1 , c'est-à-dire : pour toute probabilité ν sur E ,

$$W_1(\mu, \nu)^2 \leq CH(\nu|\mu).$$

En 1996, Talagrand [10] obtient un résultat très significatif en démontrant que la mesure gaussienne standard dans \mathbb{R}^n muni de la distance euclidienne vérifie une inégalité T_2 . Après plusieurs tentatives de généralisation, ce sont Otto et Villani [9] qui obtiennent en 2000 un résultat important, à savoir qu'une mesure satisfaisant une inégalité de Sobolev logarithmique satisfait aussi une inégalité T_2 . En particulier, cela englobe les mesures de la forme $\mu = \frac{1}{Z}e^{-V(x)}dx$, où V est strictement convexe. Ce résultat est important pour plusieurs raisons, notamment il résulte d'un nouveau point de vue réutilisé par la suite et il permet d'hériter des résultats connus sur les inégalités de Sobolev logarithmiques, assez étudiées auparavant. Il existe ensuite d'autres résultats donnant des critères pour avoir une inégalité T_2 ou T_1 , comme celui de Bobkov et Götze [4], ou celui de Cattiaux, Guillin et Wu [5].

Les inégalités transport-entropie ont des applications puissantes, elles permettent par exemple d'obtenir des propriétés de concentration, des propriétés

de régularité pour des solutions d'équations aux dérivées partielles etc...

Si on ajoute à cela le fait que les probabilités libres ont des applications surprenantes, cela amène à penser qu'il pourrait être intéressant d'étudier les analogues des inégalités de Talagrand en probabilités libres, d'autant plus que la littérature est très riche dans le cas classique mais que peu de travaux se sont intéressés au cas libre pour le moment.

Transport optimal « libre »

En 2001, Biane et Voiculescu [3] ont démontré un analogue du résultat de Talagrand. En effet, la loi semi-circulaire, qui est l'analogue libre de la mesure gaussienne standard, vérifie une inégalité T_2 libre, faisant intervenir la fonction

$$\Sigma : \mu \mapsto \int \frac{1}{2}x^2 d\mu(x) - \iint \ln|x-y| d\mu(x)d\mu(y) - \frac{3}{4}$$

à la place de l'entropie H , d'où son appellation d'entropie libre.

Puis, comme dans le cas classique, cette inégalité a été généralisée. Hiai, Petz et Ueda [7] ont par exemple montré une inégalité T_2 libre pour des mesures d'équilibre associées à un potentiel convexe. Plus précisément, si V est strictement convexe et vérifie une hypothèse de croissance, alors la fonction

$$J_V : \mu \mapsto \int V(x) d\mu(x) - \iint \ln|x-y| d\mu(x)d\mu(y)$$

admet un unique minimiseur μ_V qui vérifie une inégalité T_2 libre. Enfin, Maïda et Maurel-Segala [8] ont obtenu une inégalité T_1 libre pour des potentiels plus généraux.

Ces résultats permettent déjà d'obtenir des inégalités de concentration pour des matrices aléatoires.

Questions ouvertes

Plusieurs questions intéressantes se posent alors.

- Tout d'abord, jusqu'où peut-on généraliser les inégalités T_1 et T_2 libres ?
- Ensuite, on ne semble pas avoir de résultat aussi optimal que celui d'Otto et Villani pour les probabilités libres. Quel serait l'analogue libre de l'inégalité de Sobolev logarithmique ?

- Par ailleurs, les lois dites à queue lourde ne rentrent pas dans la catégorie des mesures qu'on sait traiter. A-t-on quand même une inégalité T_1 libre pour celles-ci ?
- Enfin, quelles sont les applications des inégalités de Talagrand libres ?

Je me préoccuperais de ces questions au début de ma thèse. Plus précisément, je vais commencer par m'intéresser à une application particulière des inégalités de Talagrand, que je vais détailler un peu ci-après.

Les mesures de Gibbs, i.e. les mesures de la forme $\mu = \frac{1}{Z} e^{-V(x)} dx$ sur \mathbb{R} (ou sur \mathbb{R}^n), sont d'un intérêt particulier. Elles apparaissent en effet dans plusieurs modèles physiques comme des mesures d'équilibre associées à un potentiel V . La mesure de Gibbs associée au potentiel V peut être vue comme la limite quand $t \rightarrow +\infty$ de la loi de X_t , la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} V'(X_t) dt ,$$

où B est un mouvement brownien.

Via un modèle de matrices aléatoires, on peut être plutôt amené à considérer l'équation différentielle stochastique libre

$$dX_t = dS_t - \frac{1}{2} P'(X_t) dt ,$$

où S est un mouvement brownien libre, c'est-à-dire un processus sur \mathbb{R} défini comme le mouvement brownien mais pour lequel la loi gaussienne standard est remplacée par la loi semi-circulaire. Biane et Speicher [2] ont démontré que pour certains polynômes P , il y a existence et unicité des solutions, de plus, celles-ci se comportent quasiment comme leur analogue classique.

À partir de l'inégalité T_1 libre de Maïda et Maurel-Segala [8], qui s'applique à une famille de potentiels bien plus large que les autres inégalités de Talagrand libres, on peut espérer traiter une plus large classe d'équations différentielles stochastiques libres, et s'intéresser notamment au problème d'existence de solutions et aux propriétés éventuelles de celles-ci.

Références

- [1] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni. *An introduction to random matrices*. Cambridge University Press, 2010.
- [2] P. Biane and R. Speicher. Free diffusions, free entropy and free Fisher information. *Ann. I. H. Poincaré*, 2001.
- [3] P. Biane and D. Voiculescu. A free probability analogue of the Wasserstein metric on the trace-state space. *Geom. Funct. Anal.*, 2001.
- [4] S. G. Bobkov and F. Götze. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 1999.
- [5] P. Cattiaux, A. Guillin, and L.-M. Wu. A note on Talagrand's transportation inequality and logarithmic Sobolev inequality. *Probab. Theory Related Fields*, 2010.
- [6] N. Gozlan and C. Léonard. Transport inequalities. A survey. *Markov Processes and Related Fields*, 2010.
- [7] F. Hiai, D. Petz, and Y. Ueda. Free transportation cost inequalities via random matrix approximation. *Probab. Theory Related Fields*, 2004.
- [8] M. Maïda and E. Maurel-Segala. Free transport-entropy inequalities for non-convex potentials and application to concentration for random matrices. *arXiv :1204.3208*, 2012.
- [9] F. Otto and C. Villani. Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. *J. Funct. Anal.*, 2000.
- [10] M. Talagrand. Transportation cost for Gaussian and other product measures. *Geom. Funct. Anal.*, 1996.

Annexe A

« Quelques résultats sur la différentiabilité »

Quelques résultats sur la différentiabilité

La différentiabilité est au cœur de nombreux problèmes mathématiques et principalement en analyse. L'une de ses applications les plus importantes est l'étude des équations différentielles. Il est donc important d'avoir des conditions assurant la différentiabilité d'une fonction.

Ici, on s'intéressera au cas des fonctions à variations bornées et au théorème de Rademacher.

On va introduire les fonctions à variations bornées et aboutir au théorème de compacité de Helly. Au passage, on énoncera des propriétés plus ou moins élémentaires sur ces fonctions, qui sont utiles lorsqu'on s'intéresse de plus près à ces fonctions. Toutefois, on n'étudiera que les fonctions d'une variable, car le cas de fonctions de deux variables est déjà bien plus compliqué et au-delà, cela ne s'arrange pas. Il faut notamment faire intervenir la théorie des distributions et des mesures.

Par ailleurs, le théorème de Rademacher est un résultat simple mais surprenant, qui peut être utilisé facilement. Son intérêt est qu'il est utilisable pour des fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles.

Première partie

Fonctions à variations bornées

Définition 1. 1 *Soit J un intervalle de \mathbb{R} . Soit une application $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$. On appelle variation totale de u la quantité :*

$$\tau(u) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| \right\}$$

où N est un entier non nul et (x_0, \dots, x_n) sont des points de J tels que $x_0 < \dots < x_n$.

Si cette quantité est finie, on dit que u est à variations bornées.

On note BV l'ensemble des fonctions à variations bornées.

On va maintenant donner quelques propriétés élémentaires sur les fonctions à variations bornées.

Propriété 1. 2 –

- Une fonction monotone sur un intervalle borné est à variations bornées.
- Une fonction monotone admettant des limites finies aux bornes de son intervalle de définition est à variations bornées.
- Toute fonction à variations bornées est bornée.
- Toute fonction dont la dérivée est bornée est à variations bornées.
- Toute fonction f finie sur un intervalle (a, b) vérifie :

$$\forall c \in (a, b), \tau_{(a,b)}(f) = \tau_{(a,c)}(f) + \tau_{(c,b)}(f).$$

- L'ensemble BV des fonctions à variations bornées est stable par la plupart des opérations. On retiendra que BV est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ces résultats sont assez élémentaires. Leur intérêt principal est de reconnaître assez facilement certaines fonctions à variations bornées.

On va maintenant énoncer quelques propriétés moins immédiates, qui sont utiles pour la suite.

Propriété 1. 3 Soit $u :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction à variations bornées.

$\forall x \in]a, b[$, les limites à gauche et à droite de u en x sont bien définies.

De plus, u admet un nombre de points de discontinuité au plus dénombrable.

Ainsi, si u est à variations bornées, on peut redéfinir la valeur de u en chaque point de discontinuité en posant $u(x) = u(x^+)$. Par conséquent, u est continue à droite.

On va maintenant introduire la fonction variation totale de u , notée U , qui mesure la variation totale de la fonction u sur les intervalles $] - \infty, x[$. Cette fonction sera utile notamment dans les démonstrations futures.

Définition 1. 4 Soit u une fonction à variations bornées sur \mathbb{R} et continue à droite. La fonction variation totale de u est la fonction :

$$U : x \mapsto \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| \mid N \geq 1, x_0 < \dots < x_N = x \right\}$$

La fonction variation totale présente des propriétés intéressantes qui seront utiles pour certaines démonstrations.

Propriété 1. 5 –

- La fonction U est croissante.
- La fonction U est continue à droite.
- La fonction U vérifie $U(-\infty) = 0$ et $U(+\infty) = \tau(u)$.
- $\forall x < y$, on a : $|u(y) - u(x)| \leq U(y) - U(x)$.

On a énoncé les principales propriétés qui nous seront utiles pour aboutir au théorème de Helly.

Avant de passer à la partie "importante" des fonctions à variations bornées, on va rapidement évoquer une autre manière d'approcher les fonctions à variations bornées, à l'aide des fonctions monotones. C'est cette approche que privilégie Natanson, dans "Theory of Functions of a real variable".

Natanson montre que les fonctions croissantes ont un nombre de points de discontinuité au plus dénombrable et introduit la fonction de saut associée à une fonction.

Puis il s'intéresse à la différentiabilité des fonctions monotones. À l'aide de plusieurs lemmes, on en déduit essentiellement trois résultats importants :

- Toute fonction croissante définie sur un segment admet une dérivée finie en presque tout point. Autrement dit, elle est dérivable presque partout. De plus, la dérivée est mesurable et intégrable sur le segment.
- Une fonction à variations bornées est la somme de sa fonction de saut et d'une fonction continue à variations bornées.
- Une fonction est à variations bornées si et seulement si elle est la différence de deux fonctions croissantes. Par conséquent, elle est dérivable en presque tout point et sa dérivée est intégrable.

Dans "Analyse réelle et complexe", Rudin évoque une autre manière de démontrer la différentiabilité des fonctions à variations bornées, à l'aide de notions de théorie de la mesure.

Deuxième partie

Théorème de compacité de Helly

Avant de citer le théorème de Helly proprement dit, on va s'intéresser à deux propositions utiles lorsqu'on pousse plus loin l'étude des fonctions à variations bornées. Ces propriétés sont énoncées par Bressan, dans "Hyperbolic systems of conservation laws : The one dimensional Cauchy problem".

Proposition 2. 1 (Approximation par des fonctions en escalier) Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue à droite et à variations bornées.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier v telle que $\tau(v) \leq \tau(u)$ et $\|v - u\|_\infty \leq \varepsilon$.

Si de plus, on a $\int_{-\infty}^0 |u(x) - u(-\infty)| dx + \int_0^{+\infty} |u(x) - u(+\infty)| dx < +\infty$, alors on peut trouver v vérifiant de plus $\|v - u\|_{L^1} \leq \varepsilon$.

Proposition 2. 2 Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction à variations bornées. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ on a : } \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x + \varepsilon) - u(x)| dx \leq \tau(u).$$

Ce résultat est en fait utile lorsqu'on étudie les fonctions à variations bornées de plusieurs variables.

Théorème 2. 3 (Helly) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n .

Si il existe C et M tels que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \tau(u_k) \leq C$ et $|u_k(x)| \leq M$, alors il existe une fonction u à variations bornées et une suite extraite $(u_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement de limite u . De plus, on a : $\tau(u) \leq C$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, |u(x)| \leq M$.

Autrement dit, BV est compact dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On va maintenant démontrer une application aux fonctions de deux variables, ce qui est plus utile en pratique.

Corollaire 2. 4 Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n . Si il existe des constantes C, M et L telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, \tau(u_k(t, \cdot)) \leq C, |u_k(t, x)| \leq M$$

$$\text{et } \forall (s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2, \int_{-\infty}^{+\infty} |u_k(t, x) - u_k(s, x)| dx \leq L|t - s|,$$

alors il existe une suite extraite $(u_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers une limite u dans $L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie la propriété :

$$\forall (s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2, \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq L|t - s|.$$

De plus, les valeurs de u peuvent être uniquement déterminées en posant : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, u(t, x) = u(t, x^+)$.

On a alors $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, \tau(u(t, \cdot)) \leq C, |u(t, x)| \leq M$.

Troisième partie

Théorème de Rademacher

Définition 3. 1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. f est une fonction localement lipschitzienne si et seulement si

$$\forall x \in \Omega \exists \delta > 0 \text{ et } k_x > 0 \forall (u, v) \in]x - \delta, x + \delta[^2 |f(u) - f(v)| \leq k_x |u - v|.$$

Définition 3. 2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est absolument continue si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ pour tous intervalles }]\alpha_1, \beta_1[, \dots,]\alpha_n, \beta_n[\text{ disjoints}$$

$$\text{inclus dans } [a, b] \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$$

On remarque que toute fonction lipschitzienne est absolument continue (il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ où k est la constante de Lipschitz de la fonction). On remarque aussi que toute fonction absolument continue est continue (car la continuité consiste à vérifier le cas $n=1$).

On va maintenant énoncer un théorème qu'on admettra. Il a été démontré par Rudin dans son livre "Analyse réelle et complexe", chapitre 8. Il fait appel à des notions de théorie de la mesure notamment. (La mesure considérée ici est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}).

Théorème 3. 3 Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. Alors il y a équivalence entre :

1. f est absolument continue sur $[a, b]$
2. l'image de f par un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle
3. f est différentiable presque partout, $f' \in L^1(a, b)$ et $\forall x \in [a, b]$ on a $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

Ainsi, toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ absolument continue est différentiable presque partout, sa dérivée est intégrable et on a la relation du 3. En particulier, les fonctions lipschitziennes sont différentiables presque partout.

Le théorème de Rademacher permet de généraliser ce résultat à des fonctions de plusieurs variables et à valeurs vectorielles.

Théorème 3. 4 (Rademacher) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ localement lipschitzienne. Alors f est différentiable presque partout.

On va donner une application de ce théorème concernant le flot d'une équation différentielle. On va en fait estimer la différence entre une application lipschitzienne et la trajectoire du groupe local à un paramètre.

Théorème 3. 5 Soit $\phi : D \times [0, +\infty[\rightarrow D$ un flot continu vérifiant :

$$\forall (m, m') \in D^2, \forall (t, t') \in I_m \times I_{m'}, \|\phi_t m - \phi_{t'} m'\| \leq L\|m - m'\| + L'|t - t'|$$

Alors, pour toute application lipschitzienne $w : [0, T] \rightarrow D$, on a l'estimée :

$$\|w(T) - \phi_T w(0)\| \leq L \cdot \int_0^T \left\{ \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|w(t+h) - \phi_h w(t)\|}{h} \right\} dt$$

Annexe B

« Stage de découverte des mathématiques appliquées à la recherche en génie civil »

Stage de découverte des mathématiques
appliquées à la recherche en génie civil

Benjamin Groux

Juin 2010

Table des matières

Introduction	2
I Participation aux démarches expérimentales	3
II Recherches préliminaires à l'étude de la méthode des éléments finis	6
Quelques rappels mathématiques	6
Notions de théorie de l'élasticité	11
III Méthode des éléments finis	16
Présentation de la méthode	16
Exemple mathématique	18
Exemple d'une poutre en béton	20
IV Utilisation de l'informatique pour la résolution de problèmes	24
Initiation au logiciel Abaqus	24
Utilisation de logiciels classiques : Matlab, Maple	26
Conclusion	31
Bibliographie	32

Introduction

Ce stage a un double objectif : il sert à valider la première année de magistère de mathématiques, mais il sert aussi à découvrir le monde de la recherche ou de l'enseignement.

Mon stage s'est déroulé à l'IUT de Béthune, dans le Pas-de-Calais, du 7 au 25 juin 2010, suivant les horaires du département de génie civil dans lequel j'effectuais mon stage, c'est-à-dire du lundi au vendredi de 9h à 12h et de 13h30 à 16h30.

J'ai été encadré durant ce stage par Mme Chafika Dantec-Djelal, professeur-chercheur à l'Université d'Artois. Je la remercie d'ailleurs beaucoup de m'avoir permis de faire mon stage dans son département et de m'avoir accueilli chaleureusement.

Au départ, mon stage avait pour thème "Comportement rhéologique des bétons frais ; modélisation d'une poutre en béton armé soumise à un chargement". Finalement, nous avons décidé avec Mme Dantec de ne pas suivre un thème précis mais plutôt de me permettre de découvrir la recherche en me faisant participer aux différents ateliers proposés pour d'autres étudiants en stage et en côtoyant les différents élèves préparant une thèse. J'ai également pu discuter un peu avec quelques chercheurs et observer l'organisation du laboratoire, dont la spécialité est l'étude des bétons. Par ailleurs, j'avais pour but de comprendre l'intérêt des mathématiques pour les recherches et d'observer leur importance, en cherchant à comprendre la méthode des éléments finis.

Dans la première partie du stage, j'ai participé aux différents ateliers, puis dans un second temps, j'ai essayé de comprendre la méthode des éléments finis à l'aide de livres, car celle-ci est très utilisée en pratique. Cela m'a d'abord demandé quelques recherches complémentaires, notamment d'un point de vue physique, puisque je n'avais pas toutes les connaissances nécessaires, ainsi que quelques révisions des techniques de calcul mathématiques. Enfin, pour terminer le stage, j'ai commencé à apprendre l'utilisation du logiciel informatique Abaqus.

Première partie

Participation aux démarches expérimentales

Le laboratoire accueille quatre étudiants préparant actuellement une thèse. Avec les étudiants de l'école d'ingénieurs CESI d'Arras, ils ont donc constitué des groupes de travail pour effectuer différentes expériences, qui seront utiles pour leur thèse.

J'ai essentiellement suivi le groupe qui étudiait l'influence de la composition du béton sur la qualité des parements. Ensuite, il fallait également étudier l'influence de l'application d'huiles de démoulage sur la qualité du parement. Ces deux études sont purement qualitatives, car il s'agit de donner une note à la qualité du parement (selon différents critères dépendant du cahier des charges) pour déterminer le meilleur.

Dans un premier temps, les élèves ont testé sept types de béton différents, autrement dit, à chaque fois, les proportions de sable, ciment, cailloux et eau variaient. Pour chaque composition, on coulait du béton dans deux blocs cubiques d'environ 30 centimètres de côté. Chaque face latérale du cube pouvant se dévisser du socle, il est ainsi facile d'observer la qualité du parement après séchage, en dévissant la paroi du socle.

Avant de couler chaque cube, la consistance du béton était testé selon la méthode du cône d'Abrams. Autrement dit, on remplit un tronc de cône avec trois couches de béton, en piquant avec une tige métallique après avoir mis chaque couche. Puis on retire le cône et on mesure l'affaissement du béton. On sait alors s'il est conforme à la norme suivie et s'il faut rajouter de l'eau ou non.

Une fois le béton dans le cube, il fallait l'homogénéiser, à l'aide d'une tige vibrante que l'on plonge à différents points du cube pendant une certaine durée. Cette phase d'homogénéisation a d'ailleurs été l'objet d'études, pour savoir à quels points et combien de temps placer la tige vibrante. Pour notre configuration, c'est au centre du cube et à quelques centimètres des coins pendant 10 secondes environ (selon la norme faisant suite aux études).

Après environ 24 heures de séchage, on pouvait enfin libérer le bloc de béton et observer le parement.

La seconde phase d'expérimentation concernait l'influence de l'application d'agents de démoulage sur les parois intérieures du cube avant le coulage du



FIGURE 1 – Moule pour les cubes de béton



FIGURE 2 – Affaissement après avoir retiré le cône d'Abrams

béton. Deux industriels ont chacun procuré au laboratoire une huile (l'une végétale, l'autre minérale). Ces deux huiles permettent de démouler plus facilement le béton, toutefois, on ne connaît pas exactement leur influence sur la qualité du parement.

Le procédé expérimental était donc le même, à part qu'il fallait huiler les parois du cube avant d'y mettre le béton.

Le résultat est que les deux huiles détériorent le parement, on observe notamment de plus grands trous d'airs et des différences de teinte importantes. Il s'agira donc pour les industriels de créer de nouvelles huiles afin de pallier ce problème.

Un autre groupe de travail s'intéressait aux frottements à l'interface béton-coffrage. Ce phénomène intervient principalement lorsque des poutres verticales sont coulées. Dans leur étude, ils utilisaient un tribomètre, appareil mesurant les forces de frottement. J'ai assisté uniquement aux réglages préliminaires concernant la planéité de la paroi du coffrage.

Celle-ci doit en effet être droite au dixième de millimètre près (environ) pour ne pas fausser les expériences. Un appareil permet de balayer de manière transversale la paroi et indique la différence d'enfoncement par rapport à un point de référence de la paroi. On règle alors la position de la paroi par rapport à un rail à l'aide de petites cales fines, en carton par exemple. Le réglage étant très précis, il est également très long.

Deuxième partie

Recherches préliminaires à l'étude de la méthode des éléments finis

Afin de mettre en œuvre la méthode des éléments finis, il est nécessaire d'avoir quelques connaissances physiques, notamment concernant la théorie de l'élasticité. Cela est nécessaire pour la mise en équation des problèmes physiques, c'est-à-dire la première phase d'une étude. D'un point de vue mathématique, pour résoudre un problème "à la main", il faut savoir inverser une matrice, éventuellement rechercher le zéro d'une fonction et calculer des polynômes interpolateurs de Lagrange, ce qui n'est pas insurmontable. D'ailleurs, la plupart du temps, les calculs sont effectués par ordinateur, d'où l'importance des mathématiciens pour l'optimisation d'algorithmes etc...

Quelques rappels mathématiques

Les résultats rappelés ici sont bien connus, mais ils sont énoncés afin de montrer la variété et la quantité importante des outils mathématiques utilisés dans la résolution de problèmes physiques. Cela nous sera utile également pour la dernière partie, concernant la programmation. On ne citera que les résultats les plus simples, l'importance des mathématiques étant bien plus profonde encore.

Résolution d'un système linéaire

Pour résoudre un système linéaire ou inverser une matrice, on connaît la méthode d'élimination de Gauss, ou la méthode de Gauss-Jordan.

On cherche à résoudre un système linéaire $Ax = b$ où A est une matrice inversible. Intuitivement, on cherche à calculer A^{-1} puis $A^{-1}b$ pour trouver la solution. Toutefois, l'inversion de la matrice A est coûteuse, la méthode de Gauss permet de se ramener au cas d'un système triangulaire, ce qui est beaucoup moins coûteux. En effet, pour une matrice A triangulaire inférieure, on peut utiliser un procédé de "descente" pour calculer x_1 , puis x_2 , etc. jusqu'à x_n . On peut procéder de manière similaire pour une matrice triangulaire supérieure en "remontant".

Le but est d'éliminer tous les termes sous la diagonale en choisissant successivement comme pivots les termes diagonaux et en utilisant des transformations élémentaires. Pour cela, on construit une matrice augmentée de taille $(n + 1) \times n$ contenant la matrice A et le vecteur b dans la dernière colonne. Ensuite, on transforme la première colonne en soustrayant un multiple convenable de la première ligne, puis on passe à la seconde colonne et ainsi de suite. À la fin, on obtient en fait un système équivalent, qui est lui triangulaire supérieur, et donc facile à résoudre.

Remarques :

- Cette méthode ne fonctionne plus si un des termes diagonaux est nul. On peut alors procéder à un échange de lignes dans ce cas (on parle de méthode de Gauss avec échange). On peut montrer qu'en fait, cette méthode fonctionne si toutes les sous-matrices principales

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

extraites de A sont inversibles.

- En pratique, il est plus avantageux, pour les calculs numériques importants faisant intervenir notamment les arrondis, de choisir comme pivot le plus grand nombre en valeur absolue. Cela évite quelques erreurs d'approximation.
- Il n'est pas nécessaire de présenter la résolution sous forme de matrice augmentée, on peut se contenter de la présentation "classique" sous forme de système.
- En fait, la méthode de Gauss aboutit à la factorisation d'une matrice A en produit d'une matrice triangulaire inférieure L et d'une matrice triangulaire supérieure U .

On va maintenant s'intéresser à la méthode de Gauss-Jordan, qui va plus loin que la méthode de Gauss, puisqu'elle permet de se ramener à un système non pas échelonné mais diagonal. Cela n'est pas forcément très intéressant pour résoudre des systèmes linéaires, mais ça l'est pour inverser une matrice.

On construit cette fois une matrice augmentée de taille $2n \times n$ avec la matrice unité sur la droite. Puis le principe est exactement le même que précédemment, mais en plus, on élimine les termes au-dessus de la diagonale et on transforme les termes diagonaux en 1.

Remarque : L'algorithme est facile à mettre en œuvre. Cependant, sa

complexité n'est pas la meilleure ($O(n^3)$) et d'autres algorithmes ont une meilleure complexité.

Polynômes d'interpolation

L'intérêt des polynômes d'interpolation est qu'ils prennent la même valeur qu'une certaine fonction en un nombre de points donnés. Ils permettent donc une approximation de cette fonction sur un certain domaine. Ainsi, on étudie un polynôme plutôt qu'une fonction (parfois inconnue), ce qui est très appréciable lorsqu'on est amené à calculer des dérivées ou des intégrales par exemple.

Étant donnés $n+1$ points distincts x_0, \dots, x_n et $n+1$ valeurs y_0, \dots, y_n , il existe un unique polynôme P_n tel que pour tout $0 \leq i \leq n$, on ait $P_n(x_i) = y_i$. Les polynômes de Lagrange associés à ces points sont définis par :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ils forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'intérêt est que le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

est solution au problème précédent. C'est l'unique solution de degré n .

On appelle polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n d'une fonction f le polynôme de Lagrange associé à la famille de points $(x_i, f(x_i))_{0 \leq i \leq n}$. On le note $P_n f$.

Le problème est que les polynômes d'interpolation de Lagrange sont peu pratiques, notamment lorsque le nombre de points augmente. De plus, si par exemple on oublie de considérer un point, il faut tout recalculer.

On va en fait utiliser une autre base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, le but étant de passer d'un polynôme d'interpolation de degré $n-1$ à un polynôme de degré n .

On définit le polynôme de Newton de degré n associé aux points $x_0 \dots x_{n-1}$ par :

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

On cherche à calculer $q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x)$. Le polynôme q_n s'annule aux points $x_0 \dots x_{n-1}$ et est de degré n , donc forcément il existe a_n tel que $q_n(x) = a_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$. Sachant que $P_n(x_n) = y_n$, on a $a_n = \frac{y_n - P_{n-1}(x_n)}{\omega_n(x_n)}$. On notera par la suite $a_n = y[x_0, \dots, x_n]$, qu'on appelle $n^{\text{ième}}$ différence divisée de Newton.

Par récurrence, on obtient la formule des différences divisées de Newton du polynôme d'interpolation :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y[x_0, \dots, x_i] \omega_i(x)$$

Remarques :

- Bien que l'expression soit différente de celle obtenue pour les polynômes de Lagrange, le polynôme obtenu est le même car on a vu qu'il y avait unicité pour le degré minimal. On a juste changé la base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- On peut démontrer plusieurs relations sur les polynômes de Newton et les différences divisées de Newton, que l'on va citer rapidement :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i) \omega'_{n+1}(x_i)} y_i$$

$$y[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\omega'_{n+1}(x_i)}$$

$$y[x_0, \dots, x_n] = \frac{y[x_1, \dots, x_n] - y[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Cela permet par exemple de construire des algorithmes de calcul des coefficients.

- On a parfois des problèmes de convergence pour certaines fonctions. Dans ce cas, on utilise d'autres outils, comme l'interpolation par morceaux ou les splines.

Recherche du zéro d'une fonction

En pratique, on est souvent amené à résoudre des équations numériques du type $f(x) = 0$, ou plus généralement $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Il est donc vital d'avoir des méthodes permettant de trouver la (les) solution(s) à cette équation. On connaît plusieurs méthodes classiques, mais il en existe un grand nombre.

La méthode de la dichotomie semble la plus naturelle. En effet, connaissant un intervalle où se trouve une solution, on va chercher une approximation de celle-ci en divisant à chaque étape la longueur de l'intervalle par deux et en conservant l'intervalle dans lequel se situe la racine.

On est ainsi capable de déterminer avec une précision donnée ε la valeur de la racine. Le seul "coût" étant de pouvoir déterminer le signe de $f(c)$ à chaque étape (c étant le milieu de $[a, b]$).

On a également la méthode de Newton. Connaissant une valeur approximative mais pas trop éloignée de la solution, on linéarise l'expression de la fonction au voisinage de ce point. En fait, cela revient à chercher l'abscisse du point d'intersection de la tangente au point considéré et de l'axe des abscisses. Il s'agit donc de résoudre l'équation $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ à chaque étape.

On peut décider de faire une boucle avec un critère d'arrêt du type $|f(x)| \leq \varepsilon$ ou $|x_{n+1} - x_n| \leq \eta$, ou alors de faire n itérations.

Cette fois, le coût est le calcul de la dérivée au point considéré, ce qui est déjà plus contraignant que la détermination d'un signe.

De plus, cette méthode présente un inconvénient puisque l'algorithme ne s'arrête pas près d'une solution, ou on peut trouver un point ne se situant plus dans le domaine de définition de la fonction. Pire encore, il est possible que la méthode diverge.

La méthode de la sécante est dérivée de la méthode de Newton, mais cette fois, on ne calcule pas la dérivée, ce qui est trop coûteux, mais on remplace $f'(x_n)$ par $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$. On a donc besoin cette fois de deux points de départ.

Remarque : il existe d'autres algorithmes, telles que la méthode du point fixe, la méthode de la tangente, ou la méthode du gradient conjugué, mais on ne les présente pas car elles ne nous seront pas utiles pour la suite de toute manière.

Approximation de la valeur d'une intégrale

On va rapidement énoncer les résultats concernant les quatre méthodes classiques, à savoir les méthodes des rectangles, des rectangles médians, des trapèzes et de Simpson. On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ et une subdivision régulière de cet intervalle en n segments (on note : $\forall k \in \{0, \dots, n\}, a_k = a + k \frac{b-a}{n}$).

Dans la méthode des rectangles, la somme de Riemann choisie est celle

correspondant à la famille $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1}$, ou $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$. On parle de méthode des rectangles à gauche ou à droite. Alors, dans le cas d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 , la différence

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \right|$$

est majorée par un terme en $\frac{1}{n}$.

La méthode des rectangles médians repose sur le même principe, sauf qu'on considère la famille $(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})_{0 \leq i \leq n-1}$.

La méthode des trapèzes consiste à faire la moyenne des rectangles à gauche et à droite. Elle est toutefois plus efficace, car, si f est de classe \mathcal{C}^2 , la différence

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} \right|$$

est majorée par un terme en $\frac{1}{n^2}$.

La méthode la plus efficace, mais également la plus gourmande en calculs, est la méthode de Simpson. Cette fois, on approche la courbe par des arcs de parabole au lieu de segments. Ces arcs de parabole correspondent au polynôme du degré 2 prenant les mêmes valeurs que f aux points a_i , $\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ et a_{i+1} . On peut les calculer avec une méthode vue précédemment. On obtient, pour une fonction de classe \mathcal{C}^4 , une erreur en $\frac{1}{n^4}$.

Notions de théorie de l'élasticité

On va ici introduire les notions de base concernant l'élasticité et la rigidité des matériaux. Certains éléments nous seront utiles pour traiter un exemple concret dans la suite. Toutefois, on ne s'intéressera pas à tout ce qui a un rapport avec la théorie des tenseurs, ce qui élimine une partie intéressante de la théorie mais qui n'est pas utile ici.

Déformations

Le champ de déformation d'un solide est le champ qui donne la relation entre deux configurations, c'est-à-dire deux états du solide. Une déformation est une application continue d'une configuration à l'autre et bijective. On écrit $x = \phi(X)$, où x désigne la nouvelle position, X l'ancienne position, et ϕ la déformation.

Le gradient de déformation est défini par : $F = D_x \phi$.

On introduit de la même manière le champ des déplacements $u : X \mapsto \phi(X) - X$ et le gradient de déplacement $D_x u : X \mapsto F(X) - X$ (obtenu en différentiant l'expression précédente).

Dans le cadre de l'élasticité, on s'intéresse à des petites déformations, ce qui nous conduit à la définition suivante du tenseur de déformation fini : $\varepsilon = \frac{1}{2}(D_x u + {}^t D_x u)$. Il est symétrique.

Un champ de déplacement est dit homogène si il existe u_0 et A tels que pour tout point X du solide, $u(X) = u_0 + A.(X - X_0)$, X_0 étant le point d'origine de la déformation.

Voici quelques exemples usuels de déformations :

- On parle de déformation pure si $u(X) = \varepsilon.(X - X_0)$. On peut décomposer une déformation pure en somme de trois extensions simples dans les directions de l'espace, ou en somme de cisaillements simples s'il n'y a pas de variation de volume.
- Une simple extension e dans la direction n s'écrit : $u(X) = e.(n.(X - X_0)).n$.
- Une dilatation uniforme e s'écrit : $u(X) = e.(X - X_0)$.
- Enfin, il existe le cisaillement simple θ par rapport à deux vecteurs unitaires perpendiculaires m et n . Alors on a :
 $u(X) = \theta [(m.(X - X_0)).n + (n.(X - X_0)).m]$. Le volume est constant.
On peut décomposer un cisaillement simple en somme de deux extensions simples.

On trouvera des schémas illustrant ces déformations à la figure 3.

Contraintes

Les contraintes traduisent l'action des forces sur un solide. On s'intéresse ici aux causes plutôt qu'aux effets.

On considère un volume V soumis à des forces volumiques f_v et surfaciques f_s . On appelle vecteur contrainte la force surfacique subie par un sous-domaine de V en x . On le note $T(x, t, n)$. La norme de ce vecteur a la dimension d'une force surfacique, c'est-à-dire d'une pression. En pratique, on décompose ce vecteur en deux composantes : une contrainte normale $T_n = T(x, t, n).n$ et une contrainte tangentielle $T_t = T(x, t, n) - T_n.n$. Par convention, la contrainte normale est négative lorsque les efforts sont dirigés vers l'intérieur.

On définit le tenseur des contraintes de Cauchy par : $\sigma(x, t) : n \mapsto T(x, t, n)$. Il représente les efforts à l'intérieur du matériau. Il est symétrique.

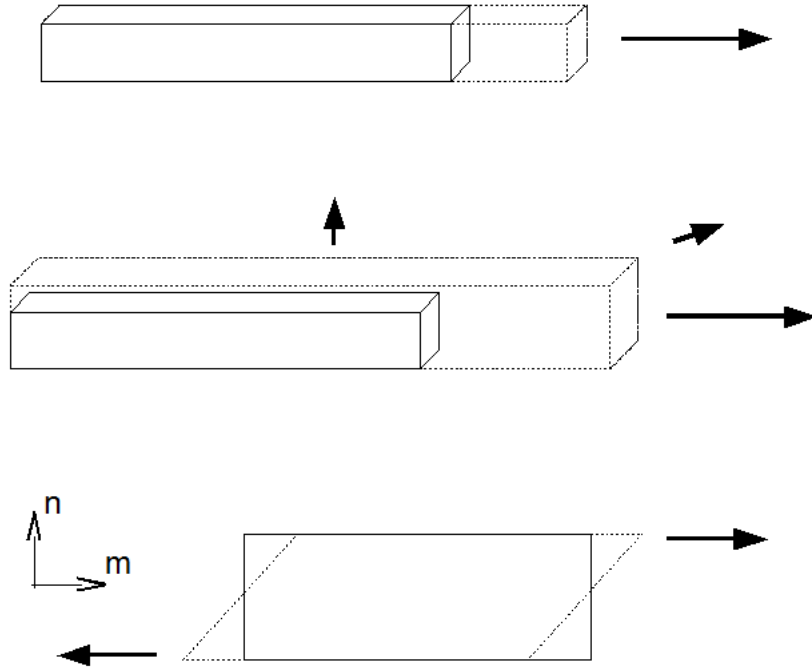


FIGURE 3 – Exemples de déformations usuelles

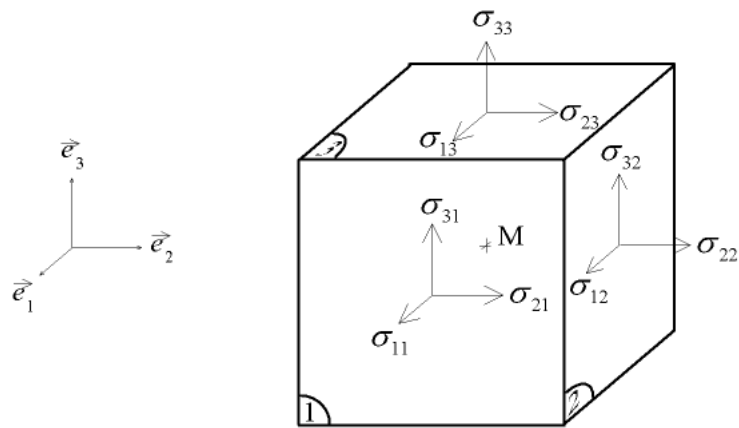


FIGURE 4 – Contraintes s'exerçant sur un volume élémentaire

En pratique, on a, avec les notations de la figure 4 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Propriétés : Par continuité des efforts, sur la surface extérieure du volume ($x \in \partial V$), on a : $\sigma(x, t)(n) = f_s(x, t)$. On a aussi continuité du vecteur contrainte T , des déplacements u et des vitesses, mais pas forcément du tenseur des contraintes σ .

Lien entre déformations et contraintes

Remarquons d'abord que dans le cadre de petites déformations, on ne conserve que les termes linéaires donc on a une relation de la forme $\sigma = C\varepsilon$. C est appelé tenseur d'élasticité et il est décrit par 21 paramètres (au lieu de 81 normalement). En supposant de plus que l'élasticité est isotrope, on obtient l'équation de souplesse : $\sigma = \lambda \text{Tr}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon$ (I désigne un tenseur). Les nombres λ et μ sont appelés coefficients de Lamé du matériau.

En pratique, on utilise plutôt comme coefficients le module d'Young et le coefficient de Poisson, notés E et ν . Physiquement, ils représentent respectivement l'allongement et la tendance au rétrécissement du matériau. La relation obtenue est alors la suivante :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu}\sigma - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\text{Tr}(\sigma)I = \frac{1 + \nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\text{Tr}(\sigma)I$$

Cette dernière relation est appelée loi de Hooke.

Toutefois, chaque matériau a sa loi de comportement propre et cette loi dépend de nombreux paramètres. C'est pourquoi, en pratique, on détermine à chaque fois la loi de comportement du matériau, sans utiliser de modèle. Le principe est le suivant :

- On applique des efforts F sur le matériau et on mesure l'allongement Δl qui en résulte (ou le rétrécissement).
- On obtient alors la loi de comportement en plaçant des points pour tracer $\sigma_c = F/S_0$ en fonction de $\varepsilon_c = \Delta l/l_0$.
- Le problème est que ce n'est pas très fidèle à la réalité, puisque, dans la réalité, la section et la longueur du matériau varient. On applique donc les transformations : $\sigma_v = \sigma_c(1 + \varepsilon_c)$ et $\varepsilon_v = \ln(1 + \varepsilon_c)$.
- On choisit un modèle (par exemple $\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon^n$), qu'on recoupe avec les données expérimentales pour déterminer la loi de comportement réelle du matériau.

Pour la suite, on appliquera la loi de Hooke sous la forme : $\sigma = E\varepsilon$.

Matrice de rigidité

La matrice de rigidité d'un élément, notée K , satisfait à l'équation $F = KU$, où F désigne le vecteur des actions (forces et moments) s'appliquant à l'élément et U le vecteur déplacement (translations et rotations).

Pour construire la matrice de rigidité globale d'une structure, on regroupe les matrices de rigidité élémentaires des différents éléments (de manière à toujours avoir une forme $F = KU$, donc pas deux fois le même terme dans les vecteurs globaux F et U) :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

Par exemple, pour une barre de traction-compression simple de section S , de longueur L et de module d'Young E , les efforts sont deux forces F_1 et F_2 appliquées aux extrémités, les déplacements sont deux translations u_1 et u_2 dans la direction de la barre, et la matrice de rigidité élémentaire est :

$$K = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si on décompose notre grande barre en deux barres de traction-compression simple, l'équation globale sera :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

où les F_i et les u_i désignent respectivement les forces et les déplacements de l'extrémité gauche de la barre (indice 1), du milieu de la barre (indice 2) et de l'extrémité droite de la barre (indice 3).

Troisième partie

Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est très utilisée en génie civil. Le principe général est de découper une structure en petits éléments plus simples à étudier, puis de regrouper les données afin de déterminer le comportement global de la structure.

Le schéma général d'un raisonnement est le suivant :

- On considère notre système physique et on écrit les lois physiques qui lui sont associées. On aboutit généralement à une équation aux dérivées partielles.
- Pour la résoudre (numériquement), on utilise la méthode des résidus pondérés par exemple, et on aboutit à une forme variationnelle, ou intégrale.
- On utilise ensuite la méthode des éléments finis proprement dite, ce qui nous permet de passer d'un problème analytique à un problème algébrique (système par exemple).
- Enfin, on résout le système, ce qui nous donne une solution approchée du problème.

La méthode des éléments finis n'est donc qu'une étape dans la résolution d'un problème.

Présentation de la méthode

Il existe différentes méthodes pour étudier une structure par éléments finis. Voici la démarche générale que l'on suit :

- On traduit le problème physique sous forme d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles à satisfaire sur un domaine Ω , avec éventuellement des conditions sur la frontière $\partial\Omega$.
- On construit la forme variationnelle du problème, c'est-à-dire qu'on traduit l'équation précédente (et aussi les conditions initiales s'il y en a) sous forme intégrale. Parfois, cette forme s'obtient directement grâce à une loi physique (principe énergétique le plus souvent).
- Vient ensuite l'étape du maillage : on choisit une partition du domaine Ω . Les mailles sont les sous-domaines de Ω .
- On choisit le nombre et les positions des nœuds dans les mailles, et les valeurs imposées à ces nœuds. On choisit également les fonctions définissant la solution locale en fonction des valeurs inconnues aux

nœuds (et de ses dérivées éventuellement). La plupart du temps, ces fonctions sont des polynômes d'interpolation de Lagrange. On obtient ainsi des éléments.

- On passe à l'étape de discrétisation : pour trouver la solution approchée, il suffit de trouver les valeurs attribuées aux nœuds. Il suffit donc de trouver un certain nombre de valeurs, sachant qu'elles satisfont à des équations. On assemble alors toutes les relations obtenues.
- On peut ainsi passer à la résolution du problème discret (inversion d'une matrice le plus souvent).
- À partir des valeurs aux nœuds et des polynômes interpolateurs, on déduit la solution approchée.
- Éventuellement, on se sert de cette solution pour calculer d'autres grandeurs.
- Enfin, on exploite les résultats : on s'intéresse à la qualité de la solution obtenue et on regarde si elle satisfait au cahier des charges.

Le maillage est en général la plus longue étape du problème. Le nombre et le type d'éléments ne doivent pas être choisis totalement au hasard, ils sont liés à la géométrie du domaine, à la précision que l'on souhaite obtenir et à d'éventuelles conditions de régularité de la solution approchée. Par ailleurs, certains théorèmes nous indiquent quels types d'éléments permettent d'avoir une solution convergente vers la solution exacte lorsque le maillage se resserre.

En pratique, il existe des mailles de référence. On choisit des mailles ayant une forme simple (polygones en dimension 2, polyèdres en dimension 3) et de bonnes proportions, c'est-à-dire des côtés de longueurs comparables. Par ailleurs, il faut faire un compromis entre le coût du calcul et la finesse du maillage. Enfin, certains logiciels possèdent des algorithmes pour définir le maillage, ce qui peut être utile.

À partir des mailles (souvent très régulières), on choisira arbitrairement des nœuds puis des fonctions d'interpolation pour chaque degré de liberté aux nœuds.

Dans les deux exemples suivants, on utilisera deux méthodes qui ne sont pas rigoureusement identiques pour illustrer le fait que des variantes existent. Toutefois, on reste dans des cas très simples d'applications, c'est pour cela qu'on n'a pas introduit la théorie des tenseurs et ses applications à la théorie de l'élasticité dans le paragraphe précédent.

Exemple mathématique

On cherche la solution de l'équation différentielle $f''(x) + 2f'(x) - 3x = 0$ sur le segment $[0, 1]$, de conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(1) = 0$. (On sait qu'il existe une et une seule solution.) Cet exemple est simple car on travaille en dimension 1, et on peut même expliciter la solution de cette équation.

En effet, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est le plan vectoriel engendré par $x \mapsto 1$ et $x \mapsto e^{-2x}$. Ensuite, on peut rechercher une solution particulière (sous la forme d'un polynôme du second degré). La fonction $x \mapsto \frac{3}{4}(x^2 - x)$ convient. Enfin, on utilise les conditions initiales. On trouve finalement que la solution est la fonction $x \mapsto \frac{3}{4}(x^2 - x) + \frac{3}{8}e^2(e^{-2x} - 1)$.

On va maintenant résoudre cette équation grâce à la méthode des éléments finis. Tout d'abord, on va choisir un maillage du segment $[0, 1]$, par exemple, on le divise en trois intervalles de longueur $\frac{1}{3}$. On décide ensuite de placer des nœuds aux extrémités et au milieu de chaque maille, on les note x_1, \dots, x_7 , et on note f_1, \dots, f_7 les valeurs de la solution que l'on va construire en ces points.

On peut facilement calculer la fonction polynomiale (de degré 2) prenant les valeurs f_1, f_2, f_3 en x_1, x_2, x_3 respectivement. Connaissant les valeurs des x_i , on peut simplifier et donner les expressions de la solution approchée \tilde{f} en fonction des f_i :

– Sur $[0, \frac{1}{3}]$,

$$\tilde{f}(x) = (18f_3 - 36f_2 + 18f_1)x^2 + (-3f_3 + 12f_2 - 9f_1)x + f_1$$

– Sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$,

$$\tilde{f}(x) = (18f_5 - 36f_4 + 18f_3)x^2 + (-15f_5 + 36f_4 - 21f_3)x + 3f_5 - 8f_4 + 6f_3$$

– Sur $[\frac{2}{3}, 1]$,

$$\tilde{f}(x) = (18f_7 - 36f_6 + 18f_5)x^2 + (-27f_7 + 60f_6 - 33f_5)x + 10f_7 - 24f_6 + 15f_5$$

Il reste toujours à déterminer les valeurs des f_i . Pour cela, on va se ramener à un système algébrique de 7 équations ayant pour inconnues les f_i . Avant cela, on s'intéresse à la formulation variationnelle du problème.

On rappelle que pour une fonction g continue sur un ouvert Ω , on a :

$$\forall x \in \Omega \quad g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^0(\Omega) \quad \int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = 0$$

Il s'agit donc de trouver une fonction vérifiant : $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^0([0, 1])$,

$$\int_0^1 \phi(x) (f''(x) + 2f'(x) - 3x) dx = 0$$

avec $f(0) = 0$ et $f'(1) = 0$.

En intégrant par parties et en utilisant les conditions aux limites, on peut donc se ramener au problème suivant : trouver une fonction vérifiant : $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^0(0, 1)$,

$$-\int_0^1 \phi'(x) f'(x) dx - \phi(0) f'(0) - 2 \int_0^1 \phi'(x) f(x) dx + 2\phi(1) f(1) - 3 \int_0^1 \phi(x) x dx = 0$$

Évidemment, on ne peut pas tester toutes les fonctions, on choisit donc une des deux formes variationnelles précédentes et on teste seulement un certain nombre de fonctions choisies pour aboutir à un système régulier. De plus, on choisit de ne pas imposer $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}'(1) = 0$.

Ici, on choisit comme fonctions tests les fonctions affines par morceaux valant 1 en un certain nœud et 0 aux autres nœuds, car ces fonctions ont une dérivée constante mais non nulle partout, ce qui permet de calculer facilement les intégrales. En remplaçant $\tilde{f}(x)$ par une des expressions polynômiales obtenues précédemment, on aboutit au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{23}{6} f_1 - \frac{14}{3} f_2 + \frac{17}{6} f_3 - \frac{1}{72} = 0 \\ 5f_1 - 12f_2 + 7f_3 - \frac{1}{12} = 0 \\ \frac{1}{6} f_1 + \frac{14}{3} f_2 - 12f_3 + \frac{22}{3} f_4 - \frac{1}{6} f_5 - \frac{1}{6} = 0 \\ 5f_3 - 12f_4 + 7f_5 - \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{1}{6} f_3 + \frac{14}{3} f_4 - 12f_5 + \frac{22}{3} f_6 - \frac{1}{6} f_7 - \frac{1}{3} = 0 \\ 5f_5 - 12f_6 + 7f_7 - \frac{5}{12} = 0 \\ \frac{1}{6} f_5 + \frac{14}{3} f_6 - \frac{29}{6} f_7 - \frac{17}{72} = 0 \end{cases}$$

On est alors en présence d'un système classique à inverser, et on en déduit les valeurs des f_i :

$$f_1 = \frac{4107}{54872}, f_2 = -\frac{7063}{8664}, f_3 = -\frac{236893}{164616}, f_4 = -\frac{25563}{13718},$$

$$f_5 = -\frac{350779}{164616}, f_6 = -\frac{374605}{164616}, f_7 = -\frac{127275}{54872}.$$

Finalement, on obtient comme solution approchée la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{65733}{13718} x^2 - \frac{168429}{27436} x + \frac{4107}{54872} & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3 \\ \frac{1020}{361} x^2 - \frac{7077}{1444} x - \frac{6549}{54872} & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ \frac{69}{38} x^2 - \frac{273}{76} x - \frac{29805}{54872} & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Il reste ensuite à étudier la qualité de la solution obtenue, qui est, rappelons-le, une approximation de la solution de l'équation différentielle. À titre de comparaison, on peut tracer les courbes représentatives des deux fonctions :

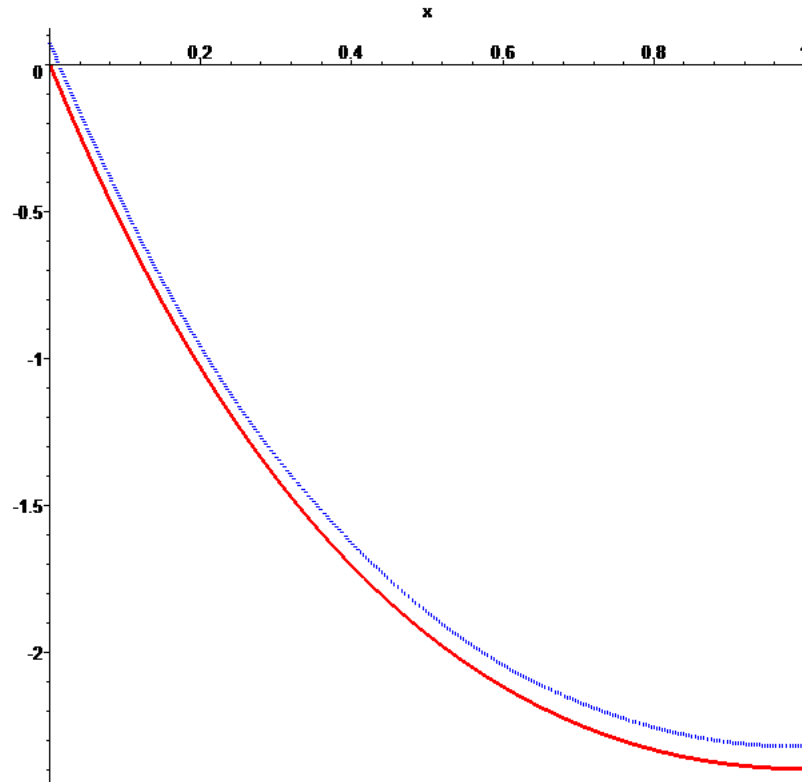


FIGURE 5 – La solution exacte et son approximation construite ci-dessus

On peut faire également d'autres comparaisons. Par exemple la solution approchée n'est pas très régulière (elle est seulement continue, c'est le minimum car on est obligé de choisir des nœuds aux extrémités des éléments). De plus, elle ne respecte pas exactement les conditions aux limites etc... Toutefois, on peut considérer que c'est une bonne approximation car l'erreur est au maximum de 3,2 % (en $x = 1$). Ensuite, tout dépend du cahier des charges.

Exemple d'une poutre en béton

On considère tout d'abord une barre élastique verticale, encastree à son extrémité supérieure, et soumise à son poids. On note L sa longueur, E son module d'Young, ρ sa masse volumique, S sa section et x l'abscisse d'un point.

On choisit trois nœuds, situés aux extrémités et au milieu de la barre.

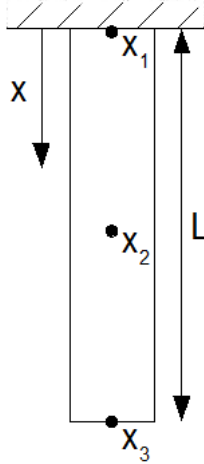


FIGURE 6 – Schéma du problème

On paramètre la barre avec

$$N(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1-\xi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\xi}{2} \end{pmatrix}, \quad \xi \in [-1, 1]$$

Autrement dit, l'abscisse de tout point est repérée par : $x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2$ pour chaque élément.

On admet que la forme variationnelle, obtenue à partir du principe de l'énergie potentielle totale, s'écrit :

$$W = \int_0^L \left(ES \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \rho g S u^* \right) dx = 0$$

pour tout déplacement virtuel u^* vérifiant la condition $u^*(0) = 0$, et que pour l'étape de discrétisation, on écrit, pour les deux éléments :

$$W^1 = (u_1^* \quad u_2^*) (k^1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - f_n^1) \quad \text{et} \quad W^2 = (u_2^* \quad u_3^*) (k^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - f_n^2)$$

avec

$$k^1 = k^2 = \frac{2ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_n^1 = f_n^2 = \frac{1}{4} \rho g S L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Après assemblage, on obtient l'équation $KU = F$ avec ici :

$$K = \frac{2ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \frac{1}{4}\rho gSL \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'un point de vue physique, u_n représente le vecteur déplacement élémentaire, k la matrice de rigidité élémentaire et f_n le vecteur élémentaire des sollicitations. La matrice K est la matrice de rigidité globale et le vecteur F le vecteur global des sollicitations.

La résolution avec la condition $u_1 = 0$ donne :

$$\begin{cases} u_2 = \frac{3}{8} \frac{\rho g L^2}{E} \\ u_3 = \frac{1}{2} \frac{\rho g L^2}{E} \end{cases}$$

On a donc déterminé les déplacements aux nœuds dus au poids de la barre. On peut également déterminer les déformations et les contraintes. On remarque qu'ils sont constants. On obtient, pour le premier élément :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{L/2} = \frac{3}{4} \rho g \frac{L}{E} \quad \text{et} \quad \sigma = E\varepsilon = \frac{3}{4} \rho g L$$

et pour le deuxième élément :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_3 - u_2}{L/2} = \frac{1}{4} \rho g \frac{L}{E} \quad \text{et} \quad \sigma = E\varepsilon = \frac{1}{4} \rho g L$$

En fait, les solutions exactes sont :

$$u(x) = \frac{\rho g L^2}{E} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right) \quad \text{et} \quad \sigma(x) = \rho g L \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

On peut s'en approcher de plus en plus en augmentant le nombre d'éléments finis utilisés dans la discrétisation de la structure. On remarque que dans ce problème, on aboutit à des solutions non continues. Cela est dû au choix des éléments, qui est vraiment très simplifié ici.

Application numérique : Pour une barre en béton de longueur $L = 1$ m, de section $S = 25$ cm², de masse volumique $\rho = 2000$ kg/m³ et de module d'Young $E = 35000$ MPa, le déplacement de l'extrémité libre de la barre est $u = 28$ μm, ce qui est tout à fait négligeable.

On donne les courbes du déplacement et de la contrainte en fonction de x , position par rapport à l'extrémité encastree de la barre. La courbe rouge indique la solution exacte, la courbe bleue représente la solution approchée. On peut faire de nombreuses remarques, comme le manque de régularité (dû au choix des éléments), la coïncidence de certaines valeurs et la mauvaise qualité de l'approximation (due à un maillage pas assez fin).

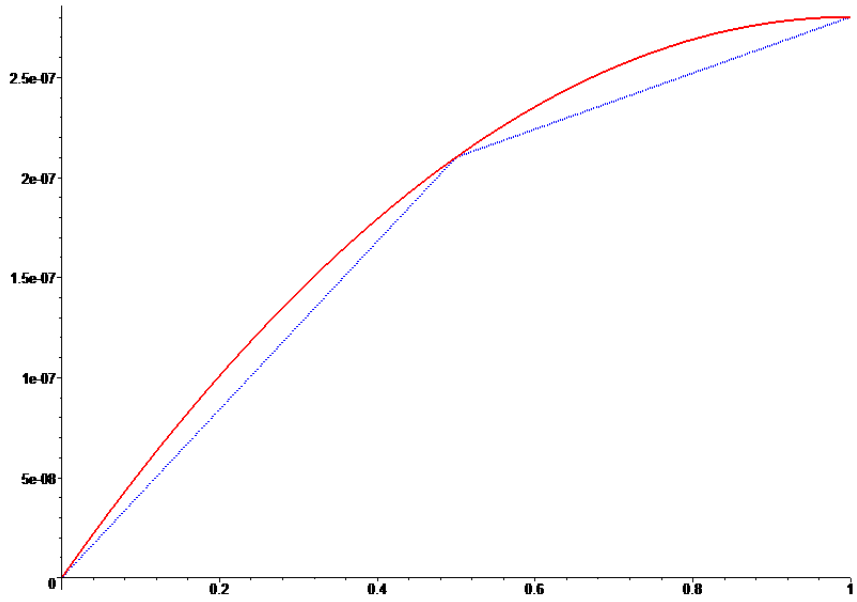


FIGURE 7 – Courbe du déplacement le long de la barre

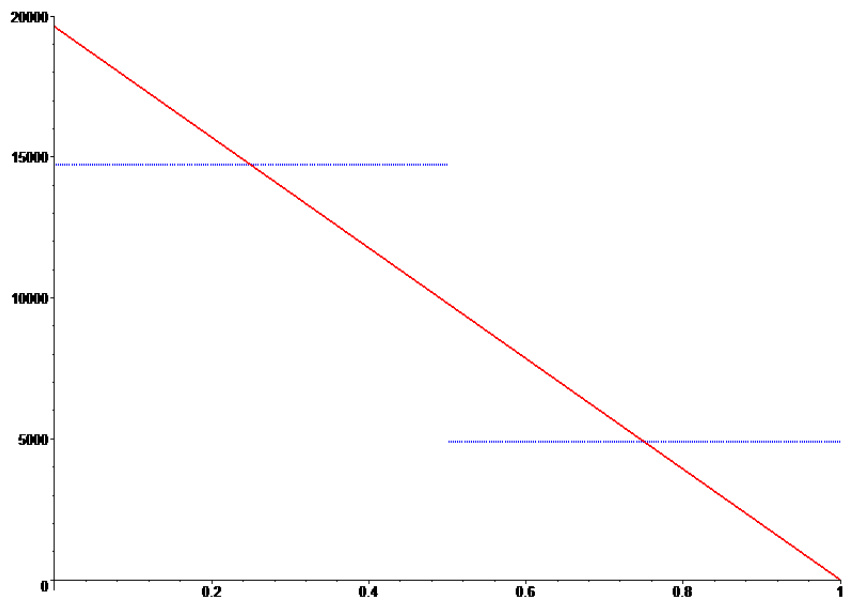


FIGURE 8 – Courbe de la contrainte le long de la barre

Quatrième partie

Utilisation de l'informatique pour la résolution de problèmes

Comme on l'a vu précédemment, les calculs peuvent vite devenir assez lourds dans la résolution des problèmes, il est donc intéressant de s'appuyer sur un logiciel de calcul, ce qui une fois encore, montre l'importance des mathématiciens et des informaticiens pour la physique notamment. Avant de s'intéresser à cet aspect, on va introduire un des nombreux logiciels traitant des éléments finis, il s'agit d'Abaqus. Ce logiciel permet de créer une structure avec plusieurs parties et plusieurs matériaux, puis il est possible de traiter différents problèmes concrets.

L'inconvénient de ce logiciel est qu'il est difficile ne serait-ce que d'entrer toutes les données nécessaires au problème, et à la fin de mon stage, j'en étais encore à cette étape. Je n'ai donc pas pu réaliser une étude complète, beaucoup trop longue, je me suis contenté de prendre un peu en main ce logiciel complexe.

Initiation au logiciel Abaqus

Pour faire un essai, il a été décidé de traiter l'exemple de l'impact linéique d'un cylindre ayant une certaine vitesse sur une plaque reposant sur deux appuis. Ensuite, si le temps le permettait, il était question de charger une poutre en béton armé et d'étudier son comportement, ou encore de l'étirer.

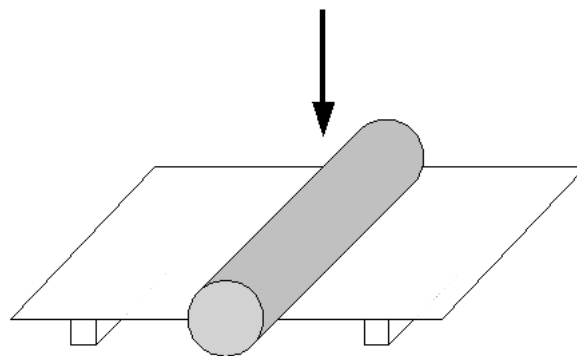


FIGURE 9 – Schéma du problème à simuler

Pour entrer toutes les données nécessaires au problème, il faut passer par différents modules dans le logiciel. Ces modules sont : "Part", "Property", "Assembly", "Step", "Interaction", "Load", "Mesh", "Job", "Visualisation". Dans la suite, on présente chacun de ces modules de manière générale, sans rentrer dans le détail des réglages subtils.

Premier module : Part. On définit ici la géométrie des pièces qui interviennent dans le problème, que ces pièces soient rigides ou déformables, en 2 ou 3 dimensions.

Deuxième module : Property. On définit ici les caractéristiques des matériaux de la structure (module d'Young, coefficient de Poisson etc...). On affecte ensuite un matériau à chaque composante de la structure.

Troisième module : Assembly. Ce module permet de repositionner et assembler les parties créées précédemment. On peut donc appliquer des translations, des rotations, des contraintes etc.

Quatrième module : Step. Lors d'un impact par exemple, ce module permet d'utiliser un effet de dynamisme. Par ailleurs, dans ce module, on choisit les sorties que l'on souhaite obtenir (soit l'évolution d'une grandeur au fil du temps, soit un ensemble de valeurs à un instant donné).

Cinquième module : Interaction. C'est ici que sont définies les interactions entre les différentes parties de la structure, sous la forme d'un contact ou d'une équation.

Sixième module : Load. Ce module a pour but de définir les conditions aux limites, les conditions initiales etc. On peut donc créer des blocages, des appuis, mais aussi des symétries etc...

Septième module : Mesh. Ici, on peut notamment affecter le maillage.

Huitième module : Job. C'est ce module qui permet de lancer les calculs.

Neuvième module : Visualisation. On peut maintenant suivre l'évolution en temps réel du phénomène et obtenir diverses informations et courbes.

Utilisation de logiciels classiques : Matlab, Maple

Ces logiciels ne sont pas vraiment utilisés en pratique car il existe des logiciels traitant des éléments finis qui permettent de faire les calculs. Toutefois, il est intéressant de voir comment on peut utiliser les logiciels qu'on connaît bien pour une partie de résolution d'un problème. Dans la suite, on donne les algorithmes correspondant à quelques rappels mathématiques vus dans la deuxième partie, ainsi qu'un exemple de code pour Maple et un exemple de code pour Matlab.

Résolution d'un système linéaire

L'algorithme suivant illustre la méthode de Gauss. En partant de la matrice augmentée, il permet de se ramener à une matrice triangulaire supérieure et un vecteur :

$$\begin{array}{l} \hline \text{pour } k \text{ de } 1 \text{ à } n - 1 \\ \quad \text{pour } j \text{ de } k + 1 \text{ à } n \\ \qquad L_j \leftarrow L_j - a_{jk}/a_{kk}L_k \\ \hline \end{array}$$

TABLE 1 – Algorithme de Gauss

Par ailleurs, si on considère A triangulaire supérieure, l'algorithme ci-dessous permet de résoudre l'équation $Ax = b$.

$$\begin{array}{l} \hline x_n = b_n/a_{nn} \\ \text{pour } k \text{ de } n - 1 \text{ à } 1 \\ \quad x_k = b_k \\ \quad \text{pour } j \text{ de } k + 1 \text{ à } n \\ \qquad x_k = x_k - a_{jk}x_j \\ \quad x_k = x_k/a_{kk} \\ \hline \end{array}$$

TABLE 2 – Algorithme de résolution d'un système linéaire triangulaire supérieur

En combinant les deux algorithmes, on est capable de résoudre un système linéaire.

Le code Maple correspondant est le suivant :

```

gauss :=proc(n,A,B)
local i,j,k,z;
for k from 1 to n-1 do
    for j from k+1 to n do
        z :=A[j,k];
        for i from 1 to n do
            A[j,i] :=A[j,i]-z/A[k,k]*A[k,i]; od;
            B[j,1] :=B[j,1]-z/A[k,k]*B[k,1]; od; od;
[A,B];
end proc;

systtriang :=proc(n,A,B)
local i,j,k,x;
x :=[];
for i from 1 to n-1 do
    x :=[op(x),B[i,1]]; od;
x :=[op(x),B[n,1]/A[n,n]];
for k from 1 to n-1 do
    for j from n-k+1 to n do
        x[n-k] :=x[n-k]-A[n-k,j]*x[j]; od;
    x[n-k] :=x[n-k]/A[n-k,n-k]; od;
x;
end proc;

resolution :=proc(n,A,B)
local L,X;
L :=gauss(n,A,B);
X :=systtriang(n,L[1],L[2]);
X;
end proc;

```

TABLE 3 – Code Maple pour résoudre un système linéaire

On donne également l'algorithme correspondant à la méthode de Gauss-Jordan, à appliquer aussi à la matrice augmentée.

pour k de 1 à n
 si il existe i tel que $a_{ik} \neq 0$,
 alors $L_i \leftrightarrow L_k$
 $L_k \leftarrow \frac{1}{a_{kk}} L_k$
 pour j de 1 à n , $j \neq k$,
 $L_i \leftarrow L_i - a_{ik} L_k$

TABLE 4 – Algorihtme de Gauss-Jordan

Polynômes d'interpolation

On connaît la manière de calculer les polynômes d'interpolation, il suffit donc d'utiliser la formule dans un code, ce qui ne pose pas de problème.

Recherche du zéro d'une fonction

On donne ci-dessous l'algorithme permettant de déterminer x tel que $f(x) = 0$ pour une fonction continue f donnée, et ce avec une précision ε , avec la méthode de dichotomie. On suppose que $f(a)f(b) < 0$, autrement dit que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, ce qui signifie que f s'annule entre a et b .

tant que $b - a > \varepsilon$
 $c = \frac{a+b}{2}$
 si $f(a)f(c) < 0$
 alors $b = c$
 sinon si $f(b)f(c) < 0$
 alors $a = c$
 sinon erreur

TABLE 5 – Méthode de dichotomie

Le code Matlab correspondant à la méthode de dichotomie apparaît ci-dessous. On remarquera qu'on peut réaliser un code similaire avec Maple.

```

approx=fonction(f,a,b,epsilon)
A=a ;
B=b ;
while B-A>epsilon
    C=(A+B)/2 ;
    if f(A).f(C)<0
        B=C ;
    else if f(B).f(C)<0
        A=C ;
    else "erreur"
    end
end
end
approx=C ;

```

TABLE 6 – Code Matlab pour la méthode de dichotomie

L'algorithme suivant correspond à la méthode de Newton, qui permet d'approcher x tel que $f(x) = 0$ pour une fonction dérivable f donnée, en choisissant comme point de départ x_0 . On fait ici n itérations, mais on peut décider de faire une boucle avec un critère d'arrêt comme on l'a expliqué précédemment.

$$\begin{array}{l}
 \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n \\
 x_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}
 \end{array}$$

TABLE 7 – Méthode de Newton

Enfin, voici l'algorithme pour la méthode de la sécante. Il permet de déterminer x tel que $f(x) = 0$ pour une fonction continue f donnée, avec comme points de départ x_0 et x_1 . On peut également décider d'un critère d'arrêt.

$$\begin{array}{l}
 \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n \\
 x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\
 x_0 = x_1 \\
 x_1 = x_2
 \end{array}$$

TABLE 8 – Méthode de la sécante

Approximation de la valeur d'une intégrale

Comme pour les polynômes d'interpolation, les formules sont connues explicitement donc il n'y a pas de problème normalement, quitte à appeler une fonction permettant de calculer un polynôme interpolateur (pour la méthode de Simpson).

Conclusion

Ce stage m'a permis de découvrir un laboratoire de mathématiques appliquées (en l'occurrence de génie civil) et d'être en contact avec des chercheurs et des étudiants préparant une thèse. Par ailleurs, j'ai pu résoudre quelques problèmes physiques, certes pas très difficiles, mais intégralement. J'ai également constaté le rôle central des mathématiques, comme de l'informatique, et c'est d'ailleurs pour cela qu'une partie du dossier y est volontairement consacrée.

De plus, j'ai pu réviser quelques outils mathématiques (pas forcément tous exposés dans le dossier), et j'ai pu être initié à de nouvelles théories (comme la méthode des éléments finis), ce qui ne peut que m'être bénéfique pour la suite de mes études en Mathématiques Fondamentales et Appliquées. De plus, certaines recherches m'ont amené sur des pistes lointaines (tenseurs, méthode de Galerkin, multiplicateurs de Lagrange etc), ce qui a éveillé ma curiosité et m'a permis de voir des choses qui me seront peut-être enseignées dans les années futures.

Ce stage me sera donc bénéfique pour la suite, car, en plus de permettre la validation de ma première année de magistère, il m'aura permis de découvrir une autre approche des mathématiques, de découvrir de nouvelles choses et d'observer l'organisation d'un laboratoire de recherche.

Bibliographie

- « Introduction aux éléments finis », Richard H. Gallagher, édition Pluraris
- « Modélisation des structures par éléments finis », volume 1 (solides élastiques), Jean-Louis Batoz et Gouri Dhatt, édition Hermes
- « Emploi des éléments finis en génie civil », livre 1, "La modélisation des ouvrages", Michel Prat, édition Hermes
- « Une présentation de la méthode des éléments finis », Gouri Dhatt et Gilbert Tourzot, édition Mathematics
- Cours « La méthode des éléments finis », Jean Garrigues
- Cours « Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique », Guillaume Legendre
- Site internet www.wikipedia.fr

Annexe C

« Introduction à la théorie ergodique »

Introduction à la théorie ergodique

Benjamin Groux
TER encadré par Nessim Sibony

Mai 2011

Table des matières

Introduction	2
1 Exemples fondamentaux	3
1.1 Définitions	3
1.2 Transitivité	5
1.3 Minimalité	6
1.4 Le doublement de l'angle	7
1.5 Les rotations sur le cercle	9
1.6 Le décalage	10
2 Mesures invariantes	13
2.1 Définition et caractérisations	13
2.2 Existence de mesures invariantes	14
2.3 Retour aux exemples fondamentaux	16
2.4 Autres exemples	19
3 Récurrence	22
3.1 Généralités	22
3.2 Théorème de récurrence de Birkhoff	22
3.3 Récurrence multiple	23
3.4 Théorème de récurrence de Poincaré	24
3.5 Théorème de récurrence de Kac	25
3.6 Retour aux exemples fondamentaux	26
4 Ergodicité	28
4.1 Définition et caractérisations	28
4.2 Existence de mesures ergodiques	30
4.3 Retour aux exemples fondamentaux	32
4.4 Théorème ergodique en moyenne de Von Neumann	34
4.5 Théorème ergodique ponctuel de Birkhoff	37
4.6 Quelques applications	41
A Annexe : Résultats généraux utilisés	45
Bibliographie	51

Introduction

En physique, on cherche à comprendre le comportement de certains systèmes régis par des équations différentielles. On ne peut pas toujours résoudre explicitement ces équations différentielles, c'est pourquoi on étudie qualitativement le comportement du système lorsque le temps est de plus en plus grand. Le phénomène physique à l'origine de la théorie ergodique est la cinétique des gaz, étudiée par Boltzmann, mais d'autres domaines entrent dans ce cadre, telle la mécanique céleste.

Pour comprendre le comportement des systèmes, on ne va pas étudier directement les équations différentielles qui les régissent mais on va se donner un espace de phases X et une transformation T de cet espace. La donnée de ce couple constitue un système dynamique discret. On n'étudiera pas ici les systèmes dynamiques continus, où on étudie un groupe de transformations $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ plutôt qu'une suite d'itérées $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Par ailleurs, il existe deux points de vue dans l'étude des systèmes dynamiques : celui de la topologie et celui de la théorie de la mesure. On parle alors respectivement de systèmes dynamiques topologiques et mesurés ; la théorie ergodique est l'étude des systèmes dynamiques mesurés. On étudiera les exemples fondamentaux de systèmes dynamiques, puis on démontrera des théorèmes de récurrence, dus notamment à Poincaré (1890) et Kac (1947), l'objectif final étant de démontrer des théorèmes ergodiques, dont ceux de Von Neumann (1932) et de Birkhoff (1931).

L'intérêt de la théorie ergodique est qu'elle a un grand nombre d'applications, non seulement dans les domaines de la physique, mais également dans de nombreuses branches des mathématiques, telles que la théorie des nombres, l'algèbre, les probabilités etc.

Notations. Dans la suite, on désignera par x la classe $x + \mathbb{Z}$ d'un réel x dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . De plus, f désignera indifféremment la classe d'une fonction $f \in \mathcal{L}^p$ dans L^p ou un représentant dans \mathcal{L}^p d'une classe $f \in L^p$.

1 Exemples fondamentaux

1.1 Définitions

Définition. Un système dynamique topologique est un couple (X, T) , où X est un espace topologique et T est une application de X dans X .

Définition. Un système dynamique mesurable est un triplet (X, \mathcal{B}, T) , où X est un espace topologique, \mathcal{B} est la tribu borélienne de X et T est une application de X dans X mesurable.

Définition. On suppose que X est muni de sa tribu borélienne \mathcal{B} et d'une mesure μ . On dit que μ est invariante par T (ou T -invariante), ou encore que T préserve μ , ssi $\forall B \in \mathcal{B}, \mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$. Autrement dit, la mesure image $T_*\mu$ et μ sont égales.

Définition. Un système dynamique mesuré est un quadruplet (X, \mathcal{B}, μ, T) , où X est un espace topologique, \mathcal{B} est la tribu borélienne de X , μ est une mesure sur (X, \mathcal{B}) et T est une application de X dans X mesurable qui préserve μ .

Remarques.

- On peut également munir X d'une tribu quelconque, mais dans la suite, on considérera que X est muni de sa tribu borélienne.
- On parle également de système dynamique probabilisé lorsque μ est une mesure de probabilité.

Définition. On dit qu'un système dynamique est inversible si et seulement si T est un homéomorphisme.

Définitions. Soient deux systèmes dynamiques topologiques (X, T) et (Y, S) .

- On dit que (Y, S) est un quotient de (X, T) si il existe une application continue $\psi : X \rightarrow Y$ telle que $\psi \circ T = S \circ \psi$ et $\psi(X) = Y$. ψ est alors appelé un semi-conjugué.
- On dit que (X, T) et (Y, S) sont conjugués, ou isomorphes, si il existe un homéomorphisme $\psi : X \rightarrow Y$ tel que $\psi \circ T = S \circ \psi$. Autrement dit, on a supposé de plus que ψ est inversible et son inverse est continue.

Remarque. Ces notions sont utiles car les dynamiques de deux systèmes conjugués sont similaires comme on le verra plus loin. Par exemple, si (X, T)

et (Y, S) sont conjugués, alors il faut et il suffit de connaître la dynamique de l'un pour connaître la dynamique de l'autre.

Définitions. On se donne un système dynamique (topologique ou mesuré) et $x \in X$.

- L'orbite (positive) de x est l'ensemble $\{T^n(x), n \in \mathbb{N}\}$. Lorsque T est un homéomorphisme, on appelle orbite l'ensemble $\{T^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ ou $\{T^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ selon les cas.
- On dit que x est un point fixe ssi $T(x) = x$, autrement dit son orbite est réduite à $\{x\}$.
- On dit que x est un point périodique ssi il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n(x) = x$, autrement dit son orbite est finie.
- Dans ce cas, la période de x est le plus petit entier n vérifiant $T^n(x) = x$, c'est-à-dire le cardinal de l'orbite.

Propriété. Soit (Y, S) un quotient de (X, T) et soit $x \in X$. On note ψ un semi-conjugué. Alors ψ envoie l'orbite de x sur celle de $\psi(x)$, autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(T^n(x)) = S^n(\psi(x))$.

Preuve. Il suffit de constater par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\psi \circ T^n = S^n \circ \psi$. □

Proposition. Soient (A, \mathcal{T}_A) et (B, \mathcal{T}_B) deux espaces topologiques. Si $f : A \rightarrow B$ est une application continue et surjective, alors l'image par f d'une partie dense de A est une partie dense de B .

Preuve. Soit X une partie dense dans A . Soient $b \in B$ et V un voisinage de b . Par surjectivité de f , il existe $a \in A$ tel que $b = f(a)$. Par continuité de f , $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a . Par densité de X , il existe $x \in X \cap f^{-1}(V)$, donc $f(x) \in V$. Cela prouve que $f(X)$ est dense dans B . □

Corollaire. Soit (Y, S) un quotient de (X, T) et soit $x \in X$. On note ψ un semi-conjugué. Si l'orbite $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans X , alors l'orbite $(S^n(\psi(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans Y .

Preuve. ψ est continue et surjective, et l'image par ψ de l'orbite de x est l'orbite de $\psi(x)$ comme on l'a vu précédemment. D'après la proposition ci-dessus, si l'orbite de x est dense, alors celle de $\psi(x)$ l'est également. □

1.2 Transitivité

Définition. Soit un système dynamique (X, T) inversible, avec X compact. L'homéomorphisme T est dit transitif ssi il existe un point $x \in X$ dont l'orbite est dense dans X . Un tel point x est dit transitif.

Remarques.

- Un point périodique ne peut donc pas être transitif.
- Il est également possible de définir la transitivité lorsque T est quelconque, en se restreignant à l'étude des orbites positives.

Proposition (Caractérisation des homéomorphismes transitifs).

Soit (X, T) un système dynamique inversible, avec X compact. On a équivalence entre :

- (1) T est transitif
- (2) Si U est un ouvert non vide de X tel que $T(U) = U$, alors U est dense dans X
- (3) Si U et V sont deux ouverts non vides de X , alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$
- (4) L'ensemble E des points $x \in X$ dont l'orbite est dense dans X est un G_δ dense

Preuve. • On suppose que T est transitif. Soit U un ouvert de X tel que $T(U) = U \neq \emptyset$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $T^n(U) = U$. Par ailleurs, il existe $x \in X$ d'orbite dense dans X . Il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $T^n(x) \in U$, d'où pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $T^m(x) \in T^{m-n}(U) = U$. On a donc $\{T^m(x)\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset U \subset X$, avec l'orbite $\{T^m(x)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ dense dans X . Donc U est dense dans X , ce qui démontre l'implication (1) \Rightarrow (2).

• Soit U un ouvert non vide de X . L'union $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U)$ est clairement invariante par T . Alors, si la propriété (2) est vérifiée, cet ensemble est dense dans X . Donc pour tout ouvert V non vide de X , on a $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Donc la propriété (3) est vérifiée.

• On suppose que la propriété (3) est vérifiée. Par compacité, il existe une famille dénombrable $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans X . Il est clair que $x \in E$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{Z}, T^m(x) \in B(x_n, \frac{1}{k})$. Donc on a : $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} T^m B(x_n, \frac{1}{k})$. De plus, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, la réunion $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} T^m B(x_n, \frac{1}{k})$ est un ouvert dense dans X . En effet, T est bicontinue et $B(x_n, \frac{1}{k})$ est un ouvert de X , et par hypothèse, la réunion rencontre tout ouvert non vide de X . Comme X est compact, il est complet, donc d'après le lemme de Baire, E est un G_δ dense dans X .

• Enfin, l'implication (4) \Rightarrow (1) est évidente, ce qui achève la preuve. □

Proposition. Si (Y, S) est un quotient de (X, T) et T est transitif, alors S est transitif. Par conséquent, si (X, T) et (Y, S) sont conjugués, alors T est transitif si et seulement si S l'est.

Preuve. D'après la dernière proposition du 1.1, si un point a une orbite dense, alors son image par un semi-conjugué est dense également. Cela prouve le premier point.

Dans le cas où (X, T) et (Y, S) sont conjugués, d'après ce qui précède, si T est transitif, alors S l'est, et réciproquement. Cela prouve le second point. \square

1.3 Minimalité

Définition. Soit un système dynamique (X, T) inversible, avec X compact. L'homéomorphisme T est dit minimal ssi toutes les orbites sont denses dans X .

Remarques.

- Il est donc clair qu'un homéomorphisme minimal est transitif.
- Comme pour la transitivité, il est possible de définir la notion de minimalité lorsque T est quelconque, en se restreignant aux orbites positives.

Proposition (Caractérisation des homéomorphismes minimaux).

Soit (X, T) un système dynamique inversible, avec X compact. On a équivalence entre :

- (1) T est minimal
- (2) Si F est un fermé non vide de X tel que $T(F) = F$, alors $F = X$
- (3) Si U est un ouvert non vide de X , alors $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U)$

Preuve. • On suppose que T est minimal. Soit F un fermé de X tel que $T(F) = F \neq \emptyset$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $T^n(F) = F$. Si on considère $x \in F$, alors par hypothèse, on a : $X \subset \overline{\{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}} \subset F \subset X$, donc $F = X$. On a donc montré que (1) \Rightarrow (2).

• On suppose la propriété (2) vérifiée. Soit U un ouvert non vide de X . Considérons l'ensemble $E = X \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U))$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $T^n(U)$ est ouvert donc E est fermé. De plus, $U \neq \emptyset$ donc $E \neq X$. Enfin, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U)$ est stable par T et T est bijective donc $T(E) = E$. Donc, par hypothèse, $E = \emptyset$, c'est-à-dire $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U)$.

• Enfin, on suppose que la propriété (3) est vérifiée. Soient $x \in X$ et U un ouvert

non vide de X . Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in T^n(U)$, donc $T^{-n}(x) \in U$. Donc l'orbite de x rencontre tout ouvert non vide de X , donc cette orbite est dense dans X . Cela prouve la dernière implication (3) \Rightarrow (1). \square

Proposition. Soit un système dynamique (X, T) inversible, avec X compact. Alors il existe un fermé non vide $Y \subset X$ tel que $T(Y) = Y$ et $T : Y \rightarrow Y$ est minimal.

Preuve. On note \mathcal{E} l'ensemble des fermés de X invariants par T . \mathcal{E} est muni de l'ordre partiel \subseteq .

Puisque X est compact, toute intersection décroissante de fermés non vides de X invariants est un fermé non vide de X invariant. En effet, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, si l'intersection d'une famille de fermés est vide, alors il existe une sous-famille finie dont l'intersection est vide. On obtient le résultat par contraposition.

Donc pour toute famille totalement ordonnée de \mathcal{E} , l'intersection de ses éléments est dans \mathcal{E} . D'après le lemme de Zorn, \mathcal{E} possède un élément minimal Y . Ainsi, le seul fermé non vide invariant par $T : Y \rightarrow Y$ est Y . Donc, par la proposition précédente, $T : Y \rightarrow Y$ est minimal. \square

Proposition. Si (Y, S) est un quotient de (X, T) et T est minimal, alors S est minimal. Par conséquent, si (X, T) et (Y, S) sont conjugués, alors T est minimal si et seulement si S l'est.

Preuve. La preuve est la même que pour la transitivité (cf. 1.2.). \square

1.4 Le doublement de l'angle

On considère $X = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ et $T : X \rightarrow X$ (bien définie). De manière équivalente, on peut considérer $Y = \mathbb{S}^1$ et $S : Y \rightarrow Y$.

Ces systèmes sont conjugués puisque $\psi : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme et $\psi \circ T = S \circ \psi$.

Proposition. Pour tous $p \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$, $x \in \left[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p} \right[$, on a : $T^p(x) = 2^p x - k$.

Preuve. On procède par récurrence sur p .

La propriété est claire pour $p = 1$, k ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1. Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$, alors $T(x) = 2x$, et si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$, alors $T(x) = 2x - 1$.

On suppose maintenant la propriété vérifiée à un rang p . Soient $k \in \llbracket 0, 2^{p+1} - 1 \rrbracket$ et $x \in [\frac{k}{2^{p+1}}, \frac{k+1}{2^{p+1}}[$. Alors on remarque que $2x \in [\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}[$ et que $2x - 1 \in [\frac{k-2^p}{2^p}, \frac{k+1-2^p}{2^p}[$. Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$, alors par hypothèse de récurrence, on a : $T^{p+1}(x) = T^p(2x) = 2^p(2x) - k$, et si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$, alors on a : $T^{p+1}(x) = T^p(2x - 1) = 2^p(2x - 1) - (k - 2^p) = 2^{p+1}x - k$.

On a finalement prouvé la propriété annoncée. \square

Corollaire. L'ensemble des points périodiques de T est :

$$\left\{ \frac{k}{2^p - 1}, p \in \mathbb{N}^*, k \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket \right\}$$

et cet ensemble est dense dans X .

Preuve. • Soient $x \in [0, 1[$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Il existe $k \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$ tel que $x \in [\frac{k}{2^{p-1}}, \frac{k+1}{2^{p-1}}[$, donc $T^p(x) = 2^p x - k$ est égal à x si et seulement si $x = \frac{k}{2^p - 1}$.

Donc un point $x \in [0, 1[$ est périodique si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$ tels que $x = \frac{k}{2^p - 1}$.

• Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in [0, 1[$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2^p - 1} < \varepsilon$ et $k \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$ tel que $x \in [\frac{k}{2^{p-1}}, \frac{k+1}{2^{p-1}}[$. Donc $\left| x - \frac{k}{2^p - 1} \right| < \frac{1}{2^p - 1} < \varepsilon$.

Cela prouve la densité de l'ensemble des points périodiques. \square

Proposition. Le doublement de l'angle est transitif mais il n'est pas minimal.

Preuve. • Soient U et V deux ouverts non vides de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . U et V contiennent donc des intervalles dyadiques $I = [\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}[$ et $I' = [\frac{k'}{2^{p'}}, \frac{k'+1}{2^{p'}][$ respectivement, où $p, p' \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$ et $k' \in \llbracket 0, 2^{p'} - 1 \rrbracket$. Le point $x = \frac{k'}{2^{p'}} + \frac{k}{2^{p+p'}}$ est dans I' et, d'après une proposition ci-dessus, on a $T^{p'}(x) = 2^{p'}x - k' = \frac{k}{2^p}$. Donc $x \in T^{-p'}(I) \cap I'$. Donc $T^{-p'}(U) \cap V \neq \emptyset$. Cela prouve que T est transitif.

• Le point 0 étant fixe, il n'est pas transitif. Donc T n'est pas minimal. \square

Remarque. En fait, il est également possible de considérer plus généralement les applications $T_\lambda : x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. On montrera alors que ces systèmes sont des quotients des décalages (cf. section 1.6). Le résultat ci-dessus peut donc être vu comme une conséquence de la transitivité du décalage.

1.5 Les rotations sur le cercle

On considère $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et pour tout $\alpha \in X$, $T_\alpha : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X \\ x & \mapsto & x + \alpha \end{array}$. De manière équivalente, on peut considérer $Y = \mathbb{S}^1$ et les $S_\alpha : \begin{array}{ccc} Y & \rightarrow & Y \\ z & \mapsto & e^{2i\pi\alpha} z \end{array}$. Ces systèmes sont conjugués, par le même homéomorphisme que précédemment. Ce sont des cas particuliers de systèmes de Kronecker.

Remarque. Vu le problème, toutes les orbites ont le même comportement, à translation près. On peut donc se ramener à l'étude de l'orbite de 0 si nécessaire.

Proposition. On a équivalence entre :

- (1) Toutes les orbites sont périodiques
- (2) Une orbite est périodique
- (3) α est rationnel

Preuve. • L'implication (1) \Rightarrow (2) est évidente.

• Ensuite, si l'orbite de 0 a pour période $q \in \mathbb{N}^*$, alors on a : $0 + q\alpha = T^q(0) = 0$ donc $q\alpha \in \mathbb{Z}$ donc $\alpha \in \mathbb{Q}$. On a donc (2) \Rightarrow (3).

• Enfin, si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors, en notant $\alpha = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, il est clair que pour tout x on a : $T^q(x) = x + q\alpha = x + p = x$. Donc tous les points sont périodiques. On a donc montré (3) \Rightarrow (1). \square

Remarque. On a l'équivalence similaire : tous les points sont fixes si et seulement si α est entier.

Proposition. Si α est irrationnel, alors la rotation T_α est minimale.

Preuve. \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compact donc il existe une suite $\left(T_\alpha^{\varphi(n)}(0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$, extraite de l'orbite, convergente dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , de limite notée x . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $|T_\alpha^{\varphi(n)}(0) - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|T_\alpha^{\varphi(m)}(0) - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc $|T_\alpha^{\varphi(n)-\varphi(m)}(0) - 0| = |T_\alpha^{\varphi(n)}(0) - T_\alpha^{\varphi(m)}(0)| < \varepsilon$.

On a montré qu'on peut trouver un point de l'orbite de 0 arbitrairement proche de 0. On peut donc trouver un point de l'orbite de 0 arbitrairement proche de n'importe quel point de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Cela prouve que l'orbite de 0 est dense, donc T_α est transitif.

Soient $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, il existe une sous-suite $\left(T_\alpha^{\psi(n)}(0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'orbite de 0 convergente de limite $y-x$. Donc la suite $\left(T_\alpha^{\psi(n)}(x) = T_\alpha^{\psi(n)}(0) + x\right)_{n \in \mathbb{N}}$

converge de limite y .

Donc pour tout point x , l'orbite $(T_\alpha^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans X , puisque pour tout point, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers ce point. Cela prouve que T_α est minimal. \square

Remarque. On a vu que si α est rationnel, alors toutes les orbites sont périodiques donc T_α n'est pas transitif donc pas minimal.

1.6 Le décalage

On considère un entier $k \geq 2$, $\Lambda_k = \{1, \dots, k\}$ et $X_k = \Lambda_k^{\mathbb{Z}}$ afin de définir $T_k : X_k \rightarrow X_k$. Pour cela, il faut vérifier que X_k est un espace topologique, on va utiliser pour cela une distance.

Remarque. On appelle alphabet l'ensemble Λ_k , et mot tout élément de X_k . Ce système est un cas particulier de système de Bernoulli.

Proposition. Pour tous $x, y \in X_k$, on note :

$$d(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} d_d(x_n, y_n)$$

où $N(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n \text{ ou } x_{-n} \neq y_{-n}\}$ et d_d est la distance discrète sur Λ_k .

d est une distance sur X_k .

Preuve. • On va d'abord montrer l'égalité entre les deux termes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $x_n = y_n$ si et seulement si $d_d(x_n, y_n) = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq y_n$ ou $x_{-n} \neq y_{-n}$ si et seulement si $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \max\left(\frac{1}{2^n} d_d(x_n, y_n), \frac{1}{2^n} d_d(x_{-n}, y_{-n})\right)$. D'où l'égalité.

• On va vérifier qu'on a bien une distance.

D'abord, pour tous $x, y \in X_k$, $d(x, y) \geq 0$. On a de plus $d(x, x) = 0$ (évident), et si $d(x, y) = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $d_d(x_n, y_n) = 0$ donc $x = y$.

Ensuite, il est clair que pour tous $x, y \in X_k$, $d(x, y) = d(y, x)$.

Enfin, pour tous $x, y, z \in X_k$, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $d_d(x_n, z_n) \leq d_d(x_n, y_n) + d_d(y_n, z_n)$ donc $\frac{1}{2^{|n|}} d_d(x_n, z_n) \leq \frac{1}{2^{|n|}} d_d(x_n, y_n) + \frac{1}{2^{|n|}} d_d(y_n, z_n)$. Donc $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Finalement, d est une distance sur X_k . \square

Proposition. L'espace X_k est un compact.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de Tychonov au compact Λ_k . \square

Proposition. L'application T_k est un homéomorphisme.

Preuve. Soient $x, y \in X_k$ distincts. d étant à valers dans l'ensemble $\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, y) = \frac{1}{2^N}$, donc pour tout $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$, on a $x_n = y_n$, donc pour tout $n \in \llbracket -N-1, N-1 \rrbracket$, on a $x_{n+1} = y_{n+1}$, donc $d(T_k(x), T_k(y)) \leq (\frac{1}{2})^{N-1} = 2d(x, y)$. Donc T_k est 2-lipschitzienne, donc continue. Il est clair que T_k est bijective, d'inverse $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$. Et T_k^{-1} est de même 2-lipschitzienne donc continue. Donc T_k est un homéomorphisme. \square

Proposition. Le décalage est transitif mais il n'est pas minimal.

Preuve. • On considère la suite de tous les mots possibles :

$$1 \dots k11 \dots 1k21 \dots kk111 \dots kkk1111 \dots$$

On note $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ cette suite, avec $\forall n < 0, x_n = 1$ par exemple. On va montrer que ce point x est transitif.

Soient $y \in X_k$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(\frac{1}{2})^N < \varepsilon$. Comme x est la suite des mots possibles, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $x_r = y_{-(N-1)}, \dots, x_{r+2N-2} = y_{N-1}$. Donc $(T_k^{r+N-1}(x))_{-(N-1)} = y_{-(N-1)}, \dots, (T_k^{r+N-1}(x))_{N-1} = y_{N-1}$, donc $d(T_k^{r+N-1}(x), y) \leq (\frac{1}{2})^N < \varepsilon$. Cela prouve que x est transitif.

• Le point $(\dots, 1, 1, 1, \dots)$ est fixe donc son orbite n'est pas dense dans X_k . Donc T_k n'est pas minimal. \square

Remarque. On peut considérer également le décalage sur $\Lambda_k^{\mathbb{N}}$, auquel cas on n'a plus un homéomorphisme. Il faut donc être prudent. Dans ce cas, on ne parle plus de décalage bilatère, mais de décalage unilatère.

Le décalage est en fait étroitement lié au doublement de l'angle et plus généralement aux multiplications de l'angle.

Proposition. Soit $k \geq 2$ un entier. On note S_k la multiplication $x \mapsto kx$ sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} et T_k le décalage sur $\Lambda_k^{\mathbb{N}}$. Alors $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, S_k)$ est un quotient de $(\Lambda_k^{\mathbb{N}}, T_k)$.

Preuve. Soit $\psi : \Lambda_k^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n-1}{k^n}$. (La série est convergente puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq \frac{x_n-1}{k^n} \leq \frac{k-1}{k^n}$, et $\frac{1}{k} < 1$, donc ψ est bien

définie.)

Pour toutes suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\Lambda_k^{\mathbb{N}}$, on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n - y_n}{k^n} \right| \leq \sum_{n=N(x,y)}^{+\infty} \frac{k-1}{k^n} = \left(\frac{1}{k}\right)^{N(x,y)-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x,y)} \left(\frac{2}{k}\right)^{N(x,y)} k \leq kd(x,y)$$

Donc ψ est k -lipschitzienne donc continue.

De plus, comme on le rappellera plus loin (cf. nombres normaux, section 4.6), tout réel $x \in [0, 1[$ admet un développement de la forme $x = \frac{i_1}{k} + \frac{i_2}{k^2} + \frac{i_3}{k^3} + \dots$ où $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $i_j \in \{0, \dots, k-1\}$. Donc ψ est surjective. On remarque au passage que ψ n'est pas injective (par exemple $\psi(1kk\dots) = \psi(k11\dots)$), cela est dû au fait que le développement précédent n'est pas forcément unique.

Enfin, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda_k^{\mathbb{N}}$, on a, dans \mathbb{R} / \mathbb{Z} :

$$k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n - 1}{k^n} = k(x_0 - 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n - 1}{k^{n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_{n+1} - 1}{k^n}$$

Donc $S_k \circ \psi = \psi \circ T_k$.

On a donc montré que $(\mathbb{R} / \mathbb{Z}, S_k)$ est un quotient de $(\Lambda_k^{\mathbb{N}}, T_k)$. □

2 Mesures invariantes

2.1 Définition et caractérisations

Rappel. Soit X muni de sa tribu borélienne \mathcal{B} et d'une mesure μ , soit une application $T : X \rightarrow X$. On dit que μ est invariante par T ssi $\forall B \in \mathcal{B}, \mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$, ssi $T_*\mu = \mu$.

Remarque. Dans la suite, on supposera que μ est une mesure de probabilité et que $p \geq 1$.

Proposition (Caractérisation des mesures invariantes). Soient (X, \mathcal{B}, T) un système dynamique mesurable et μ une probabilité sur (X, \mathcal{B}) . μ est T -invariante si et seulement si $\forall f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu), \int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu$.

Preuve. Remarquons d'abord que l'invariance de μ est équivalente au fait que les fonctions indicatrices vérifient la propriété. En effet, pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a : $\int_X \mathbf{1}_B \circ T d\mu = \int_X \mathbf{1}_B(T(x))d\mu(x) = \int_X \mathbf{1}_{T^{-1}(B)}(x)d\mu(x) = \mu(T^{-1}(B))$. Cela prouve le sens \Leftarrow . De plus, si μ est T -invariante, alors les fonctions indicatrices vérifient la propriété donc les fonctions étagées également par linéarité. Soit $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Les fonctions $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$ sont mesurables positives. Il existe deux suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives qui convergent en croissant de limites f_+ et f_- dans $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ respectivement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_X f_n \circ T d\mu = \int_X f_n d\mu$ et $\int_X g_n \circ T d\mu = \int_X g_n d\mu$. D'après le théorème de Beppo-Levi, en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, on a $\int_X f_+ \circ T d\mu = \int_X f_+ d\mu$ et $\int_X f_- \circ T d\mu = \int_X f_- d\mu$, d'où, en soustrayant les deux termes : $\int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu$, ce qui achève la preuve. \square

Proposition. Dans le cas particulier où X est compact et T est un homéomorphisme, alors :

μ est T -invariante si et seulement si $\forall f \in \mathcal{C}^0(X), \int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu$.

Preuve. Comme X est compact, $\mathcal{C}^0(X) \subset L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ donc le sens \Rightarrow est évident par la proposition précédente.

Montrons la réciproque. Soit $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Quitte à appliquer ce qui suit à f_+ et f_- , on peut supposer que f est positive. Par densité de $\mathcal{C}^0(X)$ dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, f est la limite dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues positives, qu'on peut supposer croissante. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\int f_n d\mu$ converge donc de limite $\int f d\mu$. De plus, d'après le théorème de Beppo-Levi, $\int f_n \circ T d\mu$ tend vers $\int f \circ T d\mu$. Par hypothèse et par unicité de la limite, on a donc $\int f \circ T d\mu = \int f d\mu$. Par la proposition précédente, μ est T -invariante. \square

Remarque. Par récurrence, on a donc l'équivalence : μ est T -invariante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ (resp. $\forall f \in \mathcal{C}^0(X)$), on a : $\int_X f \circ T^n d\mu = \int_X f d\mu$.

Proposition. Soit (Y, S) un quotient de (X, T) , on note ψ un semi-conjugué. On munit X et Y de leurs tribus boréliennes, notées \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement. Si μ est une probabilité T -invariante, alors $\psi_*\mu$ est une probabilité S -invariante.

Preuve. On suppose que μ est T -invariante. On note $\nu = \psi_*\mu$. Pour tout $B \in \mathcal{B}'$, on a alors : $\nu(S^{-1}(B)) = \mu(\psi^{-1}(S^{-1}(B))) = \mu(T^{-1}(\psi^{-1}(B))) = \mu(\psi^{-1}(B)) = \nu(B)$. Donc ν est S -invariante. \square

2.2 Existence de mesures invariantes

Lemme. Soit (X, \mathcal{B}, T) un système dynamique mesurable et soit $x \in X$. Si x est un point périodique de période n , alors la mesure

$$\mu_x = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i(x)}$$

est une probabilité invariante par T .

Remarque. En particulier, si x est un point fixe de T , alors la mesure δ_x est une probabilité invariante.

Preuve. Tout d'abord, la mesure $\mu_x = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i(x)}$ est bien une mesure de probabilité sur X , puisque $x, T(x), \dots, T^{n-1}(x)$ sont distincts. Ensuite, comme $T^n(x) = x$, pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a :

$$\mu_x(T^{-1}(B)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{T^{-1}(B)}(T^i(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_B(T^{i+1}(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_B(T^i(x)) = \mu_x(B).$$

Cela montre que μ_x est invariante par T . \square

Rappel. Pour tout compact X , l'espace $\mathcal{C}^0(X)$ des fonctions continues sur X à valeurs dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), muni de la norme infinie, est un espace de Banach séparable.

Théorème (Krylov-Bogoliubov). Soit (X, \mathcal{B}, T) un système dynamique mesurable. Si X est compact et T est continue, alors il existe une probabilité invariante par T .

Preuve. On note $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans $\mathcal{C}^0(X)$. On fixe un point $x \in X$ (dont la mesure invariante dépendra).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_k(T^n(x))\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est bornée (par $\|f_k\|_\infty$). Par un procédé d'extraction diagonale, il existe une injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n=0}^{\varphi(N)-1} f_k(T^n(x))\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge, de limite notée $C(f_k)$.

Soient $f \in \mathcal{C}^0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon$. On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n=0}^{\varphi(N)-1} f(T^n(x)) - C(f_k) \right| \leq \left| \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n=0}^{\varphi(N)-1} f(T^n(x)) - \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n=0}^{\varphi(N)-1} f_k(T^n(x)) \right| + \left| \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n=0}^{\varphi(N)-1} f_k(T^n(x)) - C(f_k) \right|.$$

$$\text{Donc } \limsup_{N \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n=0}^{\varphi(N)-1} f(T^n(x)) - C(f_k) \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, cela prouve que la suite $\left(\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n=0}^{\varphi(N)-1} f(T^n(x))\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge, de limite notée $C(f)$.

Il est clair que $C : f \mapsto C(f)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0(X)$ de norme 1, vérifiant $\forall x \in X, f(x) \geq 0 \Rightarrow C(f) \geq 0$, et $C(1) = 1$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure de probabilité μ telle que pour toute $f \in \mathcal{C}^0(X)$, $C(f) = \int_X f d\mu$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $C(f_k \circ T) = C(f_k)$. En effet :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n=0}^{\varphi(N)-1} f_k(T^{n+1}(x)) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(N)} \left(\sum_{n=0}^{\varphi(N)-1} f_k(T^n(x)) + f_k(T^{\varphi(N)}(x)) - f_k(x) \right).$$

Donc, par continuité de C , pour tout $f \in \mathcal{C}^0(X)$, on a $C(f \circ T) = C(f)$. Autrement dit, $\forall f \in \mathcal{C}^0(X)$, $\int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu$, c'est-à-dire que μ est T -invariante. \square

Remarques.

- On peut aussi utiliser le fait que l'ensemble $\mathcal{M}_1(X)$ est compact pour la topologie faible étoile, puis, en utilisant le lemme, pour $x \in X$, on extrait une sous-suite convergente de $(\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i(x)})_{n \in \mathbb{N}}$. On conclut en utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $T_* \mu_n = \mu_n + \frac{1}{n}(\delta_{T^n(x)} - \delta_x)$.
- Attention ! Ce théorème ne donne aucun résultat d'unicité. Comme on le verra dans les exemples suivants, il n'y a pas forcément unicité de la mesure invariante.

2.3 Retour aux exemples fondamentaux

Le doublement de l'angle

Proposition. La mesure de Lebesgue λ est invariante par le doublement de l'angle.

Preuve. Pour tout intervalle $I = [a, b]$, $T^{-1}(I) = [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}] \cup [\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}]$, donc $\lambda(T^{-1}(I)) = \lambda(I)$.

Les mesures λ et $T_*\lambda$ coïncident donc sur les intervalles, qui engendrent la tribu borélienne \mathcal{B} . Par unicité dans le théorème d'extension de Carathéodory, ces mesures sont égales, autrement dit λ est invariante par le doublement T . \square

Remarques.

- On a étudié les points périodiques, on peut donc construire d'autres mesures invariantes comme on l'a vu précédemment. De plus, elles sont toutes singulières à la mesure de Lebesgue.
- On peut montrer qu'il existe des mesures non atomiques invariantes et singulières à la mesure de Lebesgue.

Les rotations sur le cercle

Proposition. La mesure de Lebesgue λ est invariante par les rotations T_α . De plus, si α est irrationnel, alors c'est la seule probabilité invariante.

Preuve. • Pour tout intervalle $I = [a, b]$, $T_\alpha^{-1}(I) = [a - \alpha, b - \alpha]$. La mesure de Lebesgue vérifie donc pour tout intervalle I : $\lambda(T_\alpha^{-1}(I)) = \lambda(I)$. D'après le théorème d'extension de Carathéodory, la mesure de Lebesgue est invariante par la rotation T_α .

• On suppose que α est irrationnel. Soit μ une mesure T_α -invariante. Les coefficients de Fourier des mesures μ et $T_{\alpha*}\mu$ sont donc égaux. Donc, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a, en utilisant la formule de transfert :

$$c_m(\mu) = c_m(T_{\alpha*}\mu) = \int e^{2i\pi mx} d(T_{\alpha*}\mu)(x) = \int e^{2i\pi m(x+\alpha)} d\mu(x) = e^{2i\pi m\alpha} c_m(\mu)$$

donc $c_m(\mu) = 0$ si $m \neq 0$. Et on a clairement $c_0(\mu) = 1$. Donc les coefficients de Fourier de μ sont égaux à ceux de λ , donc $\mu = \lambda$. \square

Remarques.

- On a déjà vu que si α est rationnel, alors toutes les orbites sont périodiques donc on peut construire d'autres mesures invariantes, singulières à la mesure de Lebesgue.

- Plus généralement, il est possible de s'intéresser aux rotations $T : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$ sur les tores $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Alors la mesure de Lebesgue est encore invariante. En effet, soit $f \in \mathcal{C}^0(X)$. f est développable en série de Fourier. On a alors :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^n} a_{k_1, \dots, k_n} e^{2i\pi(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}$$

et

$$\begin{aligned} (f \circ T)(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^n} a_{k_1, \dots, k_n} e^{2i\pi(k_1(x_1+a_1) + \dots + k_n(x_n+a_n))} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^n} b_{k_1, \dots, k_n} e^{2i\pi(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} \end{aligned}$$

Donc en intégrant les égalités, on obtient :

$$\int f dx_1 \dots dx_n = a_{0, \dots, 0} = b_{0, \dots, 0} = \int f \circ T dx_1 \dots dx_n$$

d'où l'invariance de la mesure de Lebesgue.

- On peut aussi montrer que c'est la seule mesure invariante si et seulement si la famille $(1, a_1, \dots, a_n)$ est \mathbb{Q} -libre (en utilisant également les coefficients de Fourier des mesures). On dit alors que le système est uniquement ergodique. On n'étudiera pas cette notion ici.

Le décalage

Définition. On appelle cylindre toute partie de $X_k = \Lambda_k^{\mathbb{Z}}$ de la forme $C_{A_{-n} \dots A_n} = \dots \times \Lambda_k \times A_{-n} \times \dots \times A_n \times \Lambda_k \times \dots$, autrement dit $C_{A_{-n} \dots A_n} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \forall i \in \llbracket -n, n \rrbracket, x_i \in A_i\}$, où $n \in \mathbb{N}$ et A_{-n}, \dots, A_n sont des parties non vides de Λ_k .

Propriétés.

- L'ensemble des réunions finies de cylindres forme une algèbre de Boole, notée \mathcal{A} .
- Les cylindres sont ouverts et fermés.
- Les cylindres engendrent la topologie de X .

Preuve. • Tout d'abord, X_k appartient à \mathcal{A} . Ensuite, \mathcal{A} est stable par réunion finie. Enfin, pour tout cylindre $C_{A_{-n} \dots A_n}$, ${}^c C_{A_{-n} \dots A_n}$ appartient à \mathcal{A} puisqu'on a : ${}^c C_{A_{-n} \dots A_n} = \bigcup_{i=-n}^n \dots \times \Lambda_k \times (\Lambda_k \setminus A_i) \times \Lambda_k \times \dots$. Finalement, \mathcal{A} est une algèbre

de Boole.

- Par ailleurs, les cylindres sont bien des ouverts. En effet, on voit que pour $x \in C_{A_{-n}\dots A_n}$ et $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2^n}[$, les éléments de X_k à distance au plus ε de x sont dans $C_{A_{-n}\dots A_n}$.

De plus, les cylindres sont fermés car compacts d'après le théorème de Tychonov.

- Enfin, pour la topologie produit sur X_k , une base d'ouverts est formée des produits de la forme $\dots \times \Lambda_k \times U_{-n} \times \dots \times U_n \times \Lambda_k \times \dots$, où $n \in \mathbb{N}$ et U_{-n}, \dots, U_n sont des ouverts de Λ_k . Comme les cylindres sont ouverts, cela prouve qu'ils engendrent la topologie. \square

Conséquence. On se donne une probabilité ν sur Λ_k , ce qui revient à se donner des réels positifs p_1, \dots, p_k tels que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

En posant, pour tout cylindre, $\mu(C_{A_{-n}\dots A_n}) = \prod_{i=-n}^n \nu(A_i)$, μ s'étend de manière unique en une mesure de probabilité sur \mathcal{B} . La mesure μ est alors appelée mesure de Bernoulli.

Preuve. μ est définie sur les cylindres. On peut ensuite la définir sur les réunions finies de cylindres disjoints en posant, pour tous cylindres C, C' tels que $C \cap C' = \emptyset$: $\mu(C \cup C') = \mu(C) + \mu(C')$. μ est alors définie sur l'algèbre de Boole \mathcal{A} .

On a $\mu(X_k) = 1$ (car X_k est le cylindre trivial). μ est de plus additive sur \mathcal{A} . Ensuite, pour toute suite décroissante $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{A} telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset$, comme les C_n sont fermés et X_k est compact, il existe i_1, \dots, i_p tels que $\bigcap_{j=1}^p C_{i_j} = \emptyset$. Donc, par décroissance, à partir d'un certain rang, les C_n sont vides, donc à partir d'un certain rang, $\mu(C_n) = 0$. Donc $(\mu(C_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite 0. Enfin, la tribu engendrée par \mathcal{A} est \mathcal{B} puisque les cylindres engendrent la topologie.

D'après le théorème d'extension de Carathéodory, μ se prolonge de manière unique en une mesure sur \mathcal{B} . Et μ est bien une mesure de probabilité. \square

Remarque. Les mesures de Bernoulli sont des cas particuliers de mesures de Markov.

Proposition. La mesure μ construite ci-dessus est invariante par le décalage.

Preuve. Soit $C = \dots \times \Lambda_k \times A_{-n} \times \dots \times A_n \times \Lambda_k \times \Lambda_k \times \dots$ un cylindre. On a $T_k^{-1}(C) = \dots \times \Lambda_k \times \Lambda_k \times A_{-n} \times \dots \times A_n \times \Lambda_k \times \dots$. Donc on a $\mu(T_k^{-1}(C)) = \prod_{i=-n}^n \nu(A_i) = \mu(C)$.

D'après le théorème d'extension de Carathéodory, μ est invariante par le décalage. \square

2.4 Autres exemples

Fractions continues

Notation. Pour tout réel u , on note $[u]$ sa partie entière et $\{u\} = u - [u]$ sa partie fractionnaire.

On considère $X =]0, 1]$. Pour tout $x \in]0, 1]$, on pose $a_1 = a_1(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ et $T(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} - a_1(x)$. Lorsque c'est bien défini, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a_n(x) = a_1(T^{n-1}(x))$.

Propriétés. On suppose que les expressions sont bien définies.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_1 est constante sur $I_k = \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$ de valeur k
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$, on a $T^n(x) < 1$
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$, on a $a_n(x) \geq 1$
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$, on a :

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + T^n(x)}}}}}$$

- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$, on a :

$$x = \frac{p_n + p_{n-1}T^n(x)}{q_n + q_{n-1}T^n(x)}$$

où les entiers p_n et q_n sont définis par :

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ q_0 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1 = 1 \\ q_1 = a_1 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{cases}$$

- La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante de limite égale à $+\infty$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, T^n induit une bijection de $J_{k_1 \dots k_n}$ sur $]0, 1]$, d'inverse

$$\psi_{k_1 \dots k_n} : y \mapsto \frac{p_n + p_{n-1}y}{q_n + q_{n-1}y}$$

où $J_{k_1 \dots k_n} = I_{k_1} \cap T^{-1}(I_{k_2}) \cap \dots \cap T^{-n+1}(I_{k_n})$.

Preuve. Le premier point est évident. Le deuxième point découle du fait que T est à valeurs dans $]0, 1[$. Le troisième point se montre par récurrence en utilisant le point précédent. Le quatrième point utilise le fait que pour tout $x \in]0, 1]$, $x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)}$. Le cinquième point se montre par récurrence. Le sixième point est évident en constatant que pour tout n , $p_{n+1} \geq p_n$ et $q_{n+1} \geq q_n + 1$. Le septième point se démontre par récurrence. Et le dernier point se démontre en utilisant le cinquième point et en remarquant que $J_{k_1 \dots k_n} = \{x \in]0, 1] \mid a_1(x) = k_1, \dots, a_n(x) = k_n\}$ \square

Remarques.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X = \bigsqcup_{k_1 \dots k_n} J_{k_1 \dots k_n}$
- L'application $T : X \rightarrow X$ est appelée transformation de Gauss.
- Cette méthode s'appelle développement en fraction continue. On peut montrer que le développement en fraction continue $x \mapsto (a_1(x), a_2(x), \dots)$ s'arrête si et seulement si x est rationnel et qu'il y a bijection entre $]0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ et l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de \mathbb{N}^* . De plus, on a :

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

On en déduit un développement similaire pour tout réel, en appliquant à $x - [x]$.

Proposition. La mesure de probabilité $\mu = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{dx}{1+x} \right)$ est invariante par la transformation de Gauss.

Preuve. Remarquons d'abord que μ est bien une probabilité sur X . Soit un intervalle $I = [a, b]$. On a $T^{-1}([a, b]) = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a} \right]$ car T est bijective sur chaque intervalle $I_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ (sur ces intervalles, a_1 est constante de valeur n). Donc on a :

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}([a, b])) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(\left[\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right]\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln 2} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n+a}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n+b}\right) \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+a+1}{n+b+1}\right) - \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) \\
&= -\frac{\ln\left(\frac{1+a}{1+b}\right)}{\ln 2} = \mu([a, b])
\end{aligned}$$

D'après le théorème d'extension de Carathéodory, μ est T -invariante. \square

Produits de Blaschke

On considère $X = \mathbb{S}^1$. De plus, on fixe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ et on étudie
 $T : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$
 $z \mapsto z \prod_{i=1}^n \frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z}$. (T est bien à valeurs dans \mathbb{S}^1 .)

Proposition. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{S}^1 (renormalisée) est une probabilité invariante par T .

Preuve. On note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{S}^1 (renormalisée par 2π).

Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une fonction continue. D'après le théorème de Poisson, f se prolonge en une fonction $\tilde{f} : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$, continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ et harmonique sur \mathbb{D} . On a alors $\tilde{f}(0) = \int_{\mathbb{S}^1} f d\lambda$.

Par ailleurs, T est holomorphe sur \mathbb{D} et envoie \mathbb{D} sur \mathbb{D} , donc, par harmonicité de \tilde{f} sur \mathbb{D} , $\tilde{f} \circ T$ est harmonique sur \mathbb{D} . De plus, T est continue sur $\bar{\mathbb{D}}$, T envoie $\bar{\mathbb{D}}$ sur $\bar{\mathbb{D}}$, et \tilde{f} est continue sur $\bar{\mathbb{D}}$, donc $\tilde{f} \circ T$ est continue sur $\bar{\mathbb{D}}$. D'après le théorème de Poisson, on a donc $\tilde{f} \circ T(0) = \int_{\mathbb{S}^1} \tilde{f} \circ T d\lambda$. Comme T envoie \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^1 et \tilde{f} coïncide avec f sur \mathbb{S}^1 , cette égalité s'écrit aussi : $\tilde{f} \circ T(0) = \int_{\mathbb{S}^1} f \circ T d\lambda$.

Finalement, en remarquant que $T(0) = 0$, on obtient que $\int_{\mathbb{S}^1} f \circ T d\lambda = \tilde{f}(0) = \int_{\mathbb{S}^1} f d\lambda$. D'après la caractérisation des mesures invariantes pour X compact, on obtient que λ est T -invariante. \square

Remarque. Si on avait considéré uniquement $T : z \mapsto \prod_{i=1}^n \frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z}$, on n'aurait pu conclure que dans le cas où l'un des a_i est nul. En effet, on a $T(0) = 0$ si et seulement si $\prod_{i=1}^n (-a_i) = 0$. Autrement dit, c'est le cas qu'on a considéré (on a mis directement z en facteur).

3 Récurrence

On s'intéresse dans ce paragraphe non pas au retour des orbites à leur point de départ (périodicité) mais plus généralement au retour des orbites au voisinage de leur point de départ (récurrence).

La notion de récurrence est à rapprocher des notions de transitivité et surtout de minimalité.

3.1 Généralités

Définition. Soit (X, T) un système dynamique et soit $x \in X$. On dit que x est récurrent ssi pour tout ouvert U contenant x , il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $T^n(x) \in U$. Autrement dit, l'orbite passe une infinité de fois au voisinage de son point de départ.

Remarques.

- De manière équivalente, x est récurrent si et seulement si il existe une suite $(T^{\varphi(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de l'orbite de x , qui converge de limite x .
- Les points fixes, et plus généralement les points périodiques, sont récurrents.
- Par ailleurs, un point transitif est récurrent. Donc il est évident que si T est minimal, alors tout point est récurrent. La preuve du théorème de récurrence de Birkhoff utilise ce fait.

Proposition. Soit (Y, S) un quotient de (X, T) et soit $x \in X$. On note ψ un semi-conjugué. Si x est récurrent pour T , alors $\psi(x)$ est récurrent pour S .

Preuve. Soient $x \in X$ et V un ouvert contenant $\psi(x)$. Par continuité de ψ , $\psi^{-1}(V)$ est un ouvert contenant x donc, par récurrence de x , il existe une partie infinie A de \mathbb{N} telle que $\forall n \in A, T^n(x) \in \psi^{-1}(V)$. Autrement dit, $\forall n \in A, S^n(\psi(x)) = \psi(T^n(x)) \in V$, ce qui prouve que $\psi(x)$ est récurrent. \square

3.2 Théorème de récurrence de Birkhoff

Théorème (de récurrence de Birkhoff). Soit (X, T) un système dynamique. Si X est compact et T est un homéomorphisme, alors il existe un point récurrent.

Preuve. On a vu dans le paragraphe sur la minimalité que sous ces hypothèses, il existe un fermé non vide $Y \subset X$ invariant par T , tel que $T : Y \rightarrow Y$ soit minimal. Comme on l'a vu ci-dessus, tout point de Y est récurrent, donc il existe un point de X qui est récurrent. \square

3.3 Récurrence multiple

Sur le même modèle que ce qui a été fait ci-dessus, il est possible de définir la récurrence multiple. On obtient alors un résultat similaire au théorème de récurrence de Birkhoff : le théorème de Furstenberg-Weiss.

On évoque cette notion sans démontrer les résultats, l'objectif étant d'illustrer son intérêt, notamment en théorie des nombres.

Définition. Soient (X, T) un système dynamique, $x \in X$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que x est k -récurrent ssi pour tout ouvert U contenant x , il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $T^n(x), \dots, T^{kn}(x) \in U$.

Remarque. Le cas $k = 1$ correspond donc à la notion de récurrence vue précédemment.

Théorème (Furstenberg-Weiss). Soit (X, T) un système dynamique. Si X est compact et T est un homéomorphisme, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un point k -récurrent.

Application (théorème de Van der Waerden). Soit une partition de $\mathbb{N} : \mathbb{N} = \bigsqcup_{j=1}^m I_j$. L'une des parties contient des progressions arithmétiques de longueur arbitrairement grandes. Autrement dit, pour tout $a, b, l \in \mathbb{N}$, il existe $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $a + b, \dots, a + lb \in I_j$.

On a même un résultat plus fort que le théorème de Van der Waerden.

Théorème (Szemerédi). Soit I une partie de \mathbb{N} de densité strictement positive, c'est-à-dire telle que $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Card}(I \cap \llbracket 1, N \rrbracket) > 0$. Alors il existe dans I des progressions arithmétiques de longueur arbitrairement grandes.

Remarques.

- Sous les hypothèses du théorème de Van der Waerden, l'une des parties I_j a une densité au moins supérieure à $\frac{1}{k}$ (car \mathbb{N} a pour densité 1). Donc l'application du théorème de Szemerédi donne le résultat du théorème

de Van der Waerden.

- Toutefois, ces résultats ne permettent pas de dire si les nombres premiers contiennent des progressions arithmétiques de longueur arbitrairement grande (car leur densité est en $\frac{1}{\ln p}$). Ce résultat est donné par le théorème de Green-Tao.

3.4 Théorème de récurrence de Poincaré

Théorème (de récurrence de Poincaré). Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique probabilisé et soit $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) > 0$. Alors, pour μ -presque tout $x \in A$, l'orbite $\{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ retourne infiniment souvent dans A .

Preuve. On note $F_1 = \{x \in A \mid \forall n \geq 1, T^n(x) \notin A\}$.

Soient $n > m \geq 1$. Si il existe $x \in T^{-m}(F_1) \cap T^{-n}(F_1)$, alors $T^m(x) \in F_1$ et $T^{n-m}(T^m(x)) \in F_1 \subset A$, ce qui est impossible par définition de F_1 . Donc $T^{-m}(F_1) \cap T^{-n}(F_1) = \emptyset$.

Les ensembles $T^{-n}(F_1)$ sont donc disjoints, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T^{-n}(F_1)) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T^{-n}(F_1)\right) \leq \mu(X) = 1.$$

Par ailleurs, par invariance de μ , il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(T^{-n}(F_1)) = \mu(F_1)$. On a donc $\mu(F_1) = 0$, ce qui montre que pour μ -presque tout $x \in A$, l'orbite repasse par A .

De même, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on montre que $\mu(F_m) = 0$, où $F_m = \{x \in A \mid \forall n \geq m, T^n(x) \notin A\}$. Donc $\mu(\{x \in A \mid \exists m \in \mathbb{N}^* \forall n \geq m T^n(x) \notin A\}) = \mu(\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} F_m) = 0$. Donc pour μ -presque tout $x \in A$, l'orbite repasse une infinité de fois dans A . \square

Remarque. Une autre preuve consiste à montrer que $\mu(A \cap E) = \mu(A)$, où $E = \limsup T^{-n}(A) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} T^{-n}(A)$ est l'ensemble des points dont l'orbite passe par A une infinité de fois. Cette preuve sera refaite dans la proposition sur la caractérisation des mesures ergodiques (implication (1) \Rightarrow (3)).

Corollaire. Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique probabilisé. Si X est compact et T est continue, alors μ -presque tout point de X est récurrent pour T .

Preuve. X est séparable donc il existe une base dénombrable d'ouverts de X , notée \mathcal{C} . (On peut par exemple considérer les boules de rayon $\frac{1}{n}$ centrées en les

points d'une famille dense dans X .) D'après le théorème de récurrence de Poincaré, pour tout $B \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble μ -négligeable N_B tel que l'orbite de tout point de $B \setminus N_B$ repasse une infinité de fois dans B . $N = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} N_B$ est encore μ -négligeable, et tout point de $X \setminus N$ est récurrent (puisque un tel point repasse une infinité de fois dans tout ouvert B de \mathcal{C}), ce qui prouve le résultat. \square

Remarque. Ce corollaire permet donc de donner une démonstration du théorème de récurrence de Birkhoff n'utilisant pas l'axiome du choix.

3.5 Théorème de récurrence de Kac

Le théorème de récurrence de Kac donne un résultat quantitatif sous l'hypothèse supplémentaire que μ est ergodique.

Définition. Soient (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique probabilisé et $A \in \mathcal{B}$. On définit le temps du premier retour en A comme l'application :

$$n_A : \begin{array}{l} A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ x \mapsto \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid T^n(x) \in A\} \end{array}$$

Remarque. D'après le théorème de récurrence de Poincaré, ce temps de retour est fini pour μ -presque tout $x \in A$.

Définition. Avec les mêmes notations, on dit que μ est ergodique ssi les parties mesurables invariantes par T sont de mesure 0 ou 1.

Remarque. L'étude des mesures ergodiques fera l'objet de tout le paragraphe suivant.

Théorème (de récurrence de Kac). Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système probabilisé et soit $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) > 0$. Si μ est ergodique, alors le temps moyen de retour en A est :

$$\int_A n_A(x) d\mu_A(x) = \frac{1}{\mu(A)}$$

où μ_A désigne la probabilité $\frac{\mu(A \cap \cdot)}{\mu(A)}$.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les ensembles suivants :

$$A_n = \{x \in A \mid n_A(x) = n\}; B_n = \{x \in X \mid T(x) \notin A, \dots, T^{n-1}(x) \notin A, T^n(x) \in A\}$$

Les A_n sont clairement disjoints et on a $A = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ à un ensemble de mesure nulle près, d'après le théorème de récurrence de Poincaré. Les B_n sont également disjoints. De plus, on a $0 < \mu(A) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} T^{-n}(A)) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n)$. Or μ est ergodique et l'union $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ est invariante par T , donc $\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = 1$. Ensuite, on a :

$$\int_A n_A(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \mu(A_n) \right)$$

D'une part, on a par définition $B_1 = T^{-1}(A)$ donc, par invariance, on a : $\mu(B_1) = \mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Ensuite, si pour un certain $k > 1$, on a $\mu(B_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mu(A_n)$, alors on a :

$$T^{-1}(B_k) = T^{-1}(B_k \cap A) \sqcup T^{-1}(B_k \cap (X \setminus A)) = T^{-1}(A_k) \sqcup B_{k+1}$$

Donc par invariance $\mu(B_k) = \mu(T^{-1}(B_k)) = \mu(T^{-1}(A_k)) + \mu(B_{k+1}) = \mu(A_k) + \mu(B_{k+1})$, ce qui donne : $\mu(B_{k+1}) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mu(A_n)$ par hypothèse de récurrence.

On a donc montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mu(B_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Finalement, on a : $\int_A n_A(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k) = 1$. On a donc, de manière équivalente, $\int_A n_A(x) d\mu_A(x) = \frac{1}{\mu(A)}$. \square

Remarque. On verra un autre résultat quantitatif comme corollaire du théorème ergodique de Birkhoff.

3.6 Retour aux exemples fondamentaux

Le doublement de l'angle

Proposition. Presque tous les points sont récurrents pour le doublement de l'angle.

Preuve. Ceci découle du corollaire du théorème de récurrence de Poincaré, puisqu'on est dans un cas où X est compact et T est continue. \square

Remarque. On ne sait toutefois pas décrire les points récurrents. On sait juste que les points périodiques sont récurrents.

Les rotations du cercle

Proposition. Tout point est récurrent pour les rotations T_α .

Preuve. Dans le cas où α est rationnel, on a vu que tout point est périodique. Et un point périodique est récurrent.
Dans le cas où α est irrationnel, on a vu que T_α est minimale, c'est-à-dire que toute orbite est dense. Et un point dont l'orbite est dense est récurrent. \square

Le décalage

Proposition. Les points récurrents pour le décalage sont les mots qui, chaque fois qu'ils contiennent un mot fini, contiennent dans la suite une deuxième copie de celui-ci.

Preuve. Ce résultat est évident au vu de la distance dont on a muni X_k . En effet, soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_k$ et $\varepsilon > 0$. Soit N le plus petit entier tel que $(\frac{1}{2})^N < \varepsilon$. L'orbite de x repasse à une distance au plus ε de x si et seulement si le mot $x_0 \dots x_N$ apparaît une seconde fois dans la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le résultat est alors clair. \square

4 Ergodicité

4.1 Définition et caractérisations

Définition. Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique probabilisé. On dit que μ est T -ergodique, ou que T est μ -ergodique, ssi $\forall B \in \mathcal{B}, T^{-1}(B) = B \Rightarrow \mu(B) \in \{0, 1\}$. Autrement dit, tout borélien invariant par T est de mesure 0 ou 1.

Remarque. Ainsi, si le système est ergodique, il ne peut être décomposé en deux parties disjointes T -invariantes de mesures strictement positives. Lorsque le système n'est pas ergodique, il existe un théorème de décomposition ergodique, auquel on ne s'intéressera pas ici.

L'intérêt de l'ergodicité est d'étudier des systèmes réduits, comme par exemple lorsqu'on décompose un polynôme en produit de facteurs irréductibles, ou un espace vectoriel en somme directe de sous-espaces stables.

Proposition (Caractérisation des mesures ergodiques). Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique probabilisé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) T est μ -ergodique
- (2) $\forall B \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(T^{-1}(B) \Delta B) = 0, \mu(B) \in \{0, 1\}$
- (3) $\forall A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) > 0, \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(A)) = 1$
- (4) $\forall A, B \in \mathcal{B}$ tels que $\mu(A) > 0, \mu(B) > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$
- (5) Pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $f \circ T = f$, f est constante μ -presque partout
- (6) Pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $f \circ T = f$ μ -p.p., f est constante μ -presque partout
- (7) Pour toute fonction $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ telle que $f \circ T = f$ μ -p.p., f est constante μ -presque partout

Preuve. • On suppose que T est μ -ergodique. Soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $T^{-1}(B)$ et B diffèrent d'un ensemble de mesure nulle, c'est-à-dire $\mu(T^{-1}(B) \Delta B) = 0$. Par récurrence, on montre que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $T^{-m}(B)$ et B diffèrent d'un ensemble de mesure nulle. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \bigcup_{m \geq n} T^{-m}(B)$ diffère de B d'un ensemble de mesure nulle. Donc $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ diffère de B d'un ensemble de mesure nulle, c'est-à-dire $\mu(E) = \mu(B)$. Par ailleurs, E est T -invariant. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a clairement $T^{-1}(E_n) = E_{n+1}$, et $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, donc $T^{-1}(E) = \bigcap_{n \geq 1} E_n = E$. Par ergodicité, $\mu(E)$ vaut 0 ou 1. Donc $\mu(B)$ vaut 0 ou 1, ce qui montre l'implication (1) \Rightarrow (2).

• On suppose que (2) est vérifiée. Alors, si $B \in \mathcal{B}$ vérifie $T^{-1}(B) = B$, on a

$\mu(T^{-1}(B)\Delta B) = 0$ donc $\mu(B)$ vaut 0 ou 1. Donc l'implication (2) \Rightarrow (1) est claire.

- On suppose que T est μ -ergodique. Soit $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) > 0$. On introduit à nouveau, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \bigcup_{m \geq n} T^{-m}(A)$, et $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$. On a vu dans le premier point que $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \mu(E)$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^{-1}(E_n) = E_{n+1}$, donc par invariance de μ , $\mu(E_{n+1}) = \mu(T^{-1}(E_n)) = \mu(E_n)$. Donc $\mu(E_n)$ est constant, et en particulier, on a $\mu(E) = \mu(E_0)$. Ainsi, puisque $A \subset E_0$, on a : $0 < \mu(A) \leq \mu(E_0) = \mu(E)$, avec E invariant (vu précédemment également). Donc, par ergodicité, $\mu(E_0) = \mu(E) = 1$. On a donc montré l'implication (1) \Rightarrow (3).

- On suppose que la propriété (3) est vérifiée. Soient $A, B \in \mathcal{B}$ tels que $\mu(A) > 0$ et $\mu(B) > 0$. Par hypothèse, on a $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(A) \cap B) = \mu(B) > 0$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$, ce qui prouve la propriété (4).

- On suppose que la propriété (4) est vérifiée. Soit $A \in \mathcal{B}$ invariant par T . Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^{-n}(A) = A$. Si $\mu(A) \neq 0$, alors, par hypothèse, pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(B) > 0$, $\mu(A \cap B) > 0$. Comme $\mu(A \cap^c A) = 0$, on en déduit que $\mu(^c A) = 0$, donc que $\mu(A) = 1$. Ainsi, $\mu(A)$ vaut 0 ou 1. Donc T est μ -ergodique, ce qui prouve (4) \Rightarrow (1).

- On suppose que f vérifie $f \circ T = f$ μ -p.p. et que f n'est pas constante μ -p.p. Alors il existe $x \in X$ tel que, en notant $A' = f^{-1}([x, +\infty[)$, on ait $0 < \mu(A') < 1$. Comme $f \circ T = f$ μ -p.p., A' et $T^{-1}(A')$ coïncident en dehors d'une partie négligeable. Par conséquent, l'ensemble $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} T^{-m}(A')$ et A' coïncident en dehors d'une partie négligeable (même principe que le premier point). En particulier, on a $0 < \mu(A) < 1$, avec A invariant par T . Donc T n'est pas μ -ergodique. Par contradiction, cela prouve l'implication (1) \Rightarrow (6).

- Les implications (6) \Rightarrow (5) et (6) \Rightarrow (7) sont évidentes.

- Les implications (5) \Rightarrow (1) et (7) \Rightarrow (1) se démontrent de la même manière. Supposons que (5) ou (7) soit vérifiée. Soit $B \in \mathcal{B}$ invariant par T . On a $\mathbf{1}_B \circ T = \mathbf{1}_{T^{-1}(B)} = \mathbf{1}_B$. Par hypothèse, $\mathbf{1}_B$ est constante μ -presque partout, soit égale à 0 ($\mu(B) = 0$), soit égale à 1 ($\mu(B) = 1$), ce qui prouve que T est μ -ergodique. \square

Proposition. Soit (Y, S) un quotient de (X, T) , on note ψ un semi-conjugué. On munit X et Y de leurs tribus boréliennes, notées \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement. Si μ est une probabilité T -ergodique, alors $\psi_*\mu$ est une probabilité S -ergodique.

Preuve. On suppose que μ est T -ergodique. On note $\nu = \psi_*\mu$. Soit $B \in \mathcal{B}'$ tel que $S^{-1}(B) = B$. On a alors $T^{-1}(\psi^{-1}(B)) = \psi^{-1}(S^{-1}(B)) = \psi^{-1}(B)$, donc $\nu(B) = \mu(\psi^{-1}(B))$ vaut 0 ou 1. Donc ν est S -ergodique. \square

Définition. Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique probabilisé. Pour

tous $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $x \in X$, $N \in \mathbb{N}^*$, on appelle moyenne de Birkhoff de f la quantité :

$$S_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n(x).$$

4.2 Existence de mesures ergodiques

On se donne un système dynamique mesurable (X, \mathcal{B}, T) . Par des arguments géométriques, on va établir que l'ensemble $\mathcal{M}_T(X)$ des probabilités invariantes par T contient une mesure ergodique dans le cas où X est compact et T est continue.

Rappel. Lorsque X est compact, $\mathcal{M}_T(X)$, tout comme l'ensemble $\mathcal{M}_1(X)$ des probabilités sur X , est muni de la topologie faible-étoile. Pour cette topologie, on sait que $\mathcal{M}_1(X)$ est compact.

Proposition. Dans le cas où X est compact et T est continue, $\mathcal{M}_T(X)$ est un convexe compact de $\mathcal{M}_1(X)$.

Preuve. • Il est clair que $\mathcal{M}_T(X)$ est convexe. En effet, soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X)$ et $\alpha \in [0, 1]$. En notant $\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$, pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a : $\mu(T^{-1}(B)) = \alpha\mu_1(T^{-1}(B)) + (1 - \alpha)\mu_2(T^{-1}(B)) = \alpha\mu_1(B) + (1 - \alpha)\mu_2(B) = \mu(B)$, donc $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$.

• Comme $\mathcal{M}_1(X)$ est compact, il suffit de montrer que $\mathcal{M}_T(X)$ est fermé. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_T(X)$, convergente de limite μ dans $\mathcal{M}_1(X)$ pour la topologie faible-étoile. Autrement dit, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(X)$, $\int f d\mu_n$ tend vers $\int f d\mu$ quand $n \rightarrow +\infty$. Donc, par continuité de T , pour toute fonction f continue sur X , $\int f \circ T d\mu_n$ et $\int f d\mu_n$ tendent respectivement vers $\int f \circ T d\mu$ et $\int f d\mu$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par invariance des μ_n et unicité de la limite, on a $\int f \circ T d\mu = \int f d\mu$. Donc $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$. On a donc montré que $\mathcal{M}_T(X)$ est fermé, donc compact dans $\mathcal{M}_1(X)$. \square

Proposition. Soit $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$. μ est une mesure ergodique si et seulement si μ est un point extrême de $\mathcal{M}_T(X)$.

Preuve. • Tout d'abord, si μ n'est pas ergodique, alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $T^{-1}(B) = B$ et $0 < \mu(B) < 1$. En notant que pour tout $A \in \mathcal{B}$, $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap^c B)$, on a :

$$\mu(A) = \mu((A \cap B) \sqcup (A \cap^c B)) = \mu(B) \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} + \mu({}^c B) \frac{\mu(A \cap^c B)}{\mu({}^c B)}$$

donc μ s'écrit $\alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$, avec $0 < \alpha < 1$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X)$. Donc μ n'est pas un point extrême de $\mathcal{M}_T(X)$.

• Ensuite, si μ est ergodique, alors soient $\alpha \in]0, 1[$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X)$ tels que $\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$. On va montrer que $\mu = \mu_1 = \mu_2$. On voit que μ_1 et μ_2 sont absolument continues par rapport à μ , donc, d'après le théorème de Radon-Nikodym, ces mesures admettent des densités par rapport à μ , notées f_1 et f_2 .

On note $E = \{f_1 < 1\}$ et $F = \{f_1 > 1\}$. Par invariance de μ_1 , on a :

$$\int_{E \cap T^{-1}(E)} f_1 d\mu + \int_{E \setminus T^{-1}(E)} f_1 d\mu = \mu_1(E) = \mu_1(T^{-1}(E)) = \int_{E \cap T^{-1}(E)} f_1 d\mu + \int_{T^{-1}(E) \setminus E} f_1 d\mu$$

donc $\int_{E \setminus T^{-1}(E)} f_1 d\mu = \int_{T^{-1}(E) \setminus E} f_1 d\mu$. Comme $f_1 < 1$ sur $E \setminus T^{-1}(E)$ et $f_1 \geq 1$ sur $T^{-1}(E) \setminus E$, on en déduit que $\mu(T^{-1}(E) \setminus E) = \mu(E \setminus T^{-1}(E)) = 0$, donc $\mu(T^{-1}(E) \Delta E) = 0$. D'après l'une des caractérisations de l'ergodicité, $\mu(E)$ vaut 0 ou 1. Si $\mu(E) = 1$, alors, par absolue continuité, $\mu_1(E) = 1$, donc $1 = \mu_1(E) = \int_E f_1 d\mu < \mu(E) = 1$, ce qui nous donne une contradiction. Donc $\mu(E) = 0$, donc $f_1 \geq 1$ μ -presque partout.

De même, on montre que $\mu(F) = 0$, donc $f_1 \leq 1$ μ -presque partout. Donc $f_1 = 1$ μ -presque partout. Donc $\mu_1 = \mu$. Donc $\mu_2 = \frac{1}{1-\alpha}(\mu - \alpha\mu_1) = \mu$. Cela prouve que μ est un point extrême de $\mathcal{M}_T(X)$. \square

Théorème. Soit (X, \mathcal{B}, T) un système dynamique mesurable. Si X est compact et T est continue, alors il existe une mesure ergodique.

Preuve. Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans $\mathcal{C}^0(X)$. L'application $\mu \mapsto \int f_0 d\mu$ est continue sur $\mathcal{M}_T(X)$ (caractérisation séquentielle) donc, par compacité, elle est bornée et atteint son maximum. L'ensemble

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_T(X) \mid \int f_0 d\nu = \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \int f_0 d\mu \right\}$$

est donc fermé (par continuité de $\mu \mapsto \int f_0 d\mu$) et non vide. Par récurrence, on définit pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{M}_k = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_{k-1} \mid \int f_k d\nu = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{k-1}} \int f_k d\mu \right\}$$

Ces ensembles sont non vides, fermés (donc compacts) dans $\mathcal{M}_T(X)$, et forment une suite décroissante pour l'inclusion. Leur intersection, notée \mathcal{M} est donc non vide.

On va montrer que les points de \mathcal{M} sont des points extrémaux de $\mathcal{M}_T(X)$, ce qui prouvera l'existence d'une mesure ergodique.

Soit $\mu \in \mathcal{M}$. Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X)$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$. On a $\int f_0 d\mu = \alpha \int f_0 d\mu_1 + (1 - \alpha) \int f_0 d\mu_2$. Comme $\mu \in \mathcal{M}_0$, par définition de \mathcal{M}_0 , il est

clair que $\int f_0 d\mu_1 = \int f_0 d\mu_2 = \sup_{m \in \mathcal{M}} \int f_0 dm = \int f_0 d\mu$, donc μ_1 et μ_2 appartiennent à \mathcal{M}_0 . Par récurrence, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\int f_k d\mu_1 = \int f_k d\mu_2$ et que μ_1 et μ_2 sont dans \mathcal{M}_k . Soit maintenant $f \in \mathcal{C}^0(X)$. Par densité de la famille $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_k\|_\infty \leq \varepsilon$. On en déduit que

$$\left| \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 \right| \leq \left| \int f d\mu_1 - \int f_k d\mu_1 \right| + \left| \int f_k d\mu_1 - \int f_k d\mu_2 \right| + \left| \int f_k d\mu_2 - \int f d\mu_2 \right| \leq 2\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$. Donc $\mu_1 = \mu_2$, ce qui prouve que μ est un point extrême de $\mathcal{M}_T(X)$. \square

Remarque. On peut également démontrer ce résultat en utilisant le théorème de Krein-Milman, qui s'énonce ainsi : Tout convexe compact d'un espace localement convexe séparé est égal à l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrêmes. D'après les propositions ci-dessus, $\mathcal{M}_T(X)$ est un convexe compact dont les points extrêmes sont les mesures ergodiques. D'après le théorème de Krein-Milman, $\mathcal{M}_T(X)$ est égal à l'adhérence de l'enveloppe convexe des mesures ergodiques, c'est-à-dire au plus petit convexe contenant les mesures ergodiques. Or, d'après le théorème de Krylov-Bogoliubov, $\mathcal{M}_T(X)$ est non vide. Ainsi, il contient une mesure ergodique.

4.3 Retour aux exemples fondamentaux

Le doublement de l'angle

Rappel. On considère $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $T : \begin{array}{l} X \rightarrow X \\ x \mapsto 2x \end{array}$.

Proposition. La mesure de Lebesgue λ est ergodique pour le doublement de l'angle.

Preuve. Soit $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \lambda)$ tel que $f \circ T = f$ dans $L^2(X, \mathcal{B}, \lambda)$. f est développable en série de Fourier, il existe donc $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ telle que $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ dans $L^2(X, \mathcal{B}, \lambda)$, où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n désigne la fonction $x \mapsto e^{2i\pi nx}$. On a donc $f \circ T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_{2n}$. Par unicité du développement de $f = f \circ T$, on a donc $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_{2n} = c_n$. Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$ converge, on en déduit que $\forall n \neq 0$, $c_n = 0$. Donc, par unicité du développement en série de Fourier, f est constante λ -presque partout, égale à c_0 . D'après la caractérisation vue précédemment, on en déduit que λ est ergodique. \square

Les rotations sur le cercle

Rappel. On considère $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'application

$$T_\alpha : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X \\ x & \mapsto & x + \alpha \end{array} .$$

Proposition. La mesure de Lebesgue λ est T_α -ergodique si et seulement si α est irrationnel.

Preuve. • On suppose que α est irrationnel. Soit $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \lambda)$ tel que $f \circ T = f$ dans $L^2(X, \mathcal{B}, \lambda)$. f est développable en série de Fourier, il existe donc $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ telle que $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ dans $L^2(X, \mathcal{B}, \lambda)$, où, comme précédemment, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n désigne la fonction $x \mapsto e^{2i\pi n x}$. On a donc $f \circ T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n \alpha} e_n$. Par unicité du développement de $f = f \circ T$, on a donc $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n e^{2i\pi n \alpha} = c_n$. Comme α est irrationnel, on a $\forall n \neq 0, c_n = 0$, donc f est constante λ -presque partout par unicité du développement en série de Fourier. Donc λ est ergodique. (On pouvait déduire ce résultat du fait que c'est la seule mesure invariante et qu'il existe une mesure ergodique d'après le paragraphe précédent.)

• On suppose que α est rationnel. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $\alpha = \frac{p}{q}$. La fonction $f : x \mapsto qx$ n'est pas constante, mais elle est T_α -invariante. Donc λ n'est pas ergodique. \square

Proposition. Si α est rationnel, on note $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$, et p, q premiers entre eux. Alors pour tout $x \in X$, la mesure $\mu_x = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} \delta_{T_\alpha^n(x)}$ est T_α -ergodique.

Preuve. Soit $x \in X$. On a déjà vu que μ_x est invariante, car x est de période q . Soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $T_\alpha^{-1}(B) = B$. Soit B ne contient aucun des points $x, T_\alpha(x), \dots, T_\alpha^{q-1}(x)$, donc $\mu_x(B) = 0$, soit il en contient au moins, auquel cas on voit facilement qu'il les contient tous (par invariance par T_α), donc $\mu_x(B) = 1$. Cela prouve que μ_x est ergodique. \square

Le décalage

Rappel. On considère un entier $k \geq 2$, $\Lambda_k = \{1, \dots, k\}$, $X_k = \Lambda_k^{\mathbb{N}}$ et l'application $T : \begin{array}{ccc} X_k & \rightarrow & X_k \\ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{array} .$

Proposition. La mesure de Bernoulli μ construite précédemment est ergodique pour le décalage.

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k la projection canonique $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto x_k$. La suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ constitue une suite de variables aléatoires réelles. Celles-ci sont de plus clairement indépendantes. Enfin, soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $T^{-1}(B) = B$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T^{-n}(B) = B$, donc $B \in \sigma(P_n, P_{n+1}, \dots)$ (indépendance vis-à-vis des n premières coordonnées). Donc B est dans la tribu de queue de $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$. D'après la loi du 0-1 de Kolmogorov, $\mu(B)$ vaut 0 ou 1. \square

4.4 Théorème ergodique en moyenne de Von Neumann

Théorème. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et soit $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une isométrie. On note $I = \{x \in \mathcal{H} \mid U(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de U et $B = \{U(x) - x, x \in \mathcal{H}\}$ le cobord.

On a $\mathcal{H} = \bar{B} \oplus I$. I est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} , ce qui permet de définir la projection orthogonale sur P_I .

Alors pour tout $x \in \mathcal{H}$, quand $N \rightarrow +\infty$, $\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n(x) \rightarrow P_I(x)$.

Preuve. • Soit $x \in B^\perp$. On a donc, pour tout $y \in \mathcal{H}$, $\langle x, U(y) - y \rangle = 0$ donc $\langle U^*(x), y \rangle = \langle x, y \rangle$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathcal{H}$, on a $U^*(x) = x$. C'est équivalent au fait que $U(x) = x$. En effet, si $U^*(x) = x$, alors :

$$\|U(x) - x\|^2 = \|U(x)\|^2 - \langle U(x), x \rangle - \langle x, U(x) \rangle + \|x\|^2 = 2\|x\|^2 - \langle x, U^*(x) \rangle - \langle U^*(x), x \rangle = 0$$

donc $U(x) = x$. Réciproquement, si $U(x) = x$, alors le même calcul montre que $U^*(x) = x$. On en déduit donc que $x \in I$. Donc $B^\perp \subset I$.

Soit maintenant $x \in I$. On a, pour tout $y \in \mathcal{H}$, $\langle x, U(y) - y \rangle = \langle U^*(x), y \rangle - \langle x, y \rangle = 0$, puisque comme on vient de le voir $U(x) = x$ si et seulement si $U^*(x) = x$. Donc $x \perp B$. Donc $I \subset B^\perp$.

On a donc $I = B^\perp$. Donc $\mathcal{H} = \bar{B} \oplus I$ et I est fermé (ce qui était évident par continuité de $U - Id$). La première partie du théorème est donc démontrée.

• Soit $x \in I$. On a clairement, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_N(x) = x$, donc, quand $N \rightarrow +\infty$, $\sigma_N(x)$ tend vers $x = P_I(x)$.

Soit $x \in B$. Il existe $y \in \mathcal{H}$ tel que $x = U(y) - y$. On a donc, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_N(x) = \frac{1}{N}(U^N(y) - y)$, donc $\|\sigma_N(x)\| \leq \frac{2}{N}\|y\|$, donc, quand $N \rightarrow +\infty$, $\sigma_N(x)$ tend vers $0 = P_I(x)$.

Soit $x \in \bar{B}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in B$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$. On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\|\sigma_N(x)\| \leq \|\sigma_N(x - y)\| + \|\sigma_N(y)\| \leq \varepsilon + \|\sigma_N(y)\|$. Donc $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(x)\| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, cela prouve que quand $N \rightarrow +\infty$, $\sigma_N(x)$ tend vers $0 = P_I(x)$.

Finalement, on a montré le résultat sur I et sur \bar{B} . Par linéarité et d'après le

premier point, cela implique que le résultat est vrai sur \mathcal{H} . \square

Application (théorème ergodique de Von Neumann). Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique probabilisé. On note $U_T : f \mapsto f \circ T$ et $I = \{f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \mid U_T f = f\}$. Pour tous $f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, quand $N \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_X f(T^n(x))g(x)d\mu(x) \longrightarrow \int_X P_I f(x)g(x)d\mu(x)$$

Si, de plus, T est μ -ergodique, alors cette limite est égale à $\int f d\mu \cdot \int g d\mu$.

Preuve. • $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de Hilbert. De plus, U_T est une isométrie de $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ puisque, par invariance de μ , on a, pour tout $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$: $\|f \circ T\|_2^2 = \int |f \circ T|^2 d\mu = \int |f|^2 d\mu = \|f\|_2^2$.

D'après la proposition précédente, quand $N \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n$ tend vers $P_I f$ dans $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Or pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int f \circ T^n \cdot g d\mu - \int P_I f \cdot g d\mu \right| \leq \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n - P_I f \right\|_2 \|g\|_2$$

Donc la première partie du théorème est démontrée.

• Dans le cas où T est μ -ergodique, les fonctions de I sont constantes μ -presque partout d'après la caractérisation de l'ergodicité. Donc $\int P_I f g d\mu = \int P_I f d\mu \cdot \int g d\mu$. On note $B = \{f \circ T - f, f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)\}$. Pour tous $h \in \bar{B}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ tel que $\|h - (f \circ T - f)\|_2 \leq \varepsilon$. Donc, par invariance de μ , $|\int h d\mu| \leq \int |h - (f \circ T - f)| d\mu + |\int f \circ T - f d\mu| \leq \varepsilon$. Donc $\int h d\mu = 0$. Donc l'intégrale d'une fonction de $I^\perp = \bar{B}$ est nulle.

Donc $\int P_I f d\mu = \int f d\mu$, ce qui achève la preuve. \square

Remarques.

- La limite des moyennes dans $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ est clairement T -invariante. Cela se voit en remarquant que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \right) \circ T = \frac{N+1}{N} \left(\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f \circ T^n \right) - \frac{1}{N} f$$

- On peut également faire une étude spectrale de U_T . On peut montrer que l'ensemble des valeurs propres de U_T est un sous-groupe de \mathbb{S}^1 , que 1 est valeur propre de U_T , et que si T est ergodique, alors toutes les valeurs propres sont simples.

On va maintenant étendre ce résultat de convergence aux éléments de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Proposition. Soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique probabilisé. On note $\mathcal{I} = \{B \in \mathcal{B} \mid T^{-1}(B) = B\}$ la tribu des ensembles T -invariants. Pour tout $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $(S_N f)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ de limite $E(f|\mathcal{I})$, qui est T -invariante.

Preuve. Soit $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ tel que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$. Par le théorème ergodique de Von Neumann, quand $N \rightarrow +\infty$, $S_N g$ converge dans $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, de limite notée \tilde{g} , et cette limite est T -invariante. Comme μ est finie, on a $L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \subset L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, donc la convergence se fait aussi dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

La suite $(S_N g)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge donc elle est de Cauchy. Il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $M, N \geq N_0$, $\|S_N g - S_M g\|_1 \leq \varepsilon$. On a donc, pour tous $M, N \geq N_0$: $\|S_N f - S_M f\|_1 \leq \|S_N f - S_N g\|_1 + \|S_N g - S_M g\|_1 + \|S_M g - S_M f\|_1 \leq 3\varepsilon$. Donc la suite $(S_N f)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, qui est complet, donc elle converge, de limite notée \tilde{f} .

Par la même remarque que précédemment, \tilde{f} est T -invariante, donc \mathcal{I} -mesurable. De plus, pour tout $B \in \mathcal{I}$, on peut appliquer le résultat de convergence à $f|_B$. Or, par définition de \mathcal{I} , on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\int_B f d\mu = \int_B S_N f d\mu$. Comme $(S_N f)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ de limite \tilde{f} , on obtient que $\int_B f d\mu = \int_B \tilde{f} d\mu$. Cela prouve que $\tilde{f} = E(f|\mathcal{I})$. \square

Remarques.

- On pose parfois $\mathcal{I} = \{B \in \mathcal{B} \mid \mu(T^{-1}(B) \Delta B) = 0\}$ la tribu des boréliens μ -presque T -invariants.
- Pour tout $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, on a $E(f \circ T|\mathcal{I}) = E(f|\mathcal{I})$. En effet, on constate que $T^{-1}(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$, donc pour tout $B \in \mathcal{I}$, on a :

$$\int_B E(f \circ T|\mathcal{I}) d\mu = \int_B f \circ T d\mu = \int_{T^{-1}(B)} f \circ T d\mu = \int_B f d\mu$$

en appliquant la formule de transfert.

- On peut remarquer directement que pour tout $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, on a $E(f|\mathcal{I}) \circ T = E(f|\mathcal{I})$. En effet, pour tout $B \in \mathcal{I}$, on a :

$$\int_B E(f|\mathcal{I}) \circ T d\mu = \int_{T^{-1}(B)} E(f|\mathcal{I}) \circ T d\mu = \int_B E(f|\mathcal{I}) d\mu = \int_B f d\mu$$

- Les fonctions \mathcal{I} -mesurables sont les fonctions de I (c'est-à-dire invariantes par T μ -presque partout). En effet, φ est μ -presque T -invariante

si et seulement si pour tout borélien B de \mathbb{R} , $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{I}$.

4.5 Théorème ergodique ponctuel de Birkhoff

Théorème. Soient (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique probabilisé et $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

- Pour μ -presque tout $x \in X$, $S_N f(x)$ a une limite quand $N \rightarrow +\infty$, notée $\tilde{f}(x)$
- $\tilde{f} \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ (et $\|\tilde{f}\|_1 \leq \|f\|_1$)
- $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$ dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$
- $\tilde{f} = E(f|\mathcal{I})$
- Si μ est de plus T -ergodique, alors $\tilde{f} = \int_X f d\mu$ dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$

Remarques.

- Lorsqu'elle existe, la limite de $S_N f(x)$ est appelée moyenne orbitale (ou temporelle). L'intégrale $\int f d\mu$ est appelée moyenne spatiale de f . Le théorème nous dit donc que si μ est ergodique, alors les moyennes temporelles et spatiales coïncident.
- On a déjà montré que $(S_N f)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ de limite $E(f|\mathcal{I})$ (théorème de Von Neumann). On peut retrouver ce résultat en appliquant le théorème ergodique de Birkhoff aux fonctions de $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ et le théorème de convergence dominée, puis en utilisant la densité de $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Preuve. • D'après le théorème de Von Neumann, $E(f|\mathcal{I})$ est T -invariante. Donc, quitte à remplacer f par $f - E(f|\mathcal{I})$, on peut supposer que $E(f|\mathcal{I}) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note

$$E_\varepsilon(f) = \left\{ x \in X \mid \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) \right| > \varepsilon \right\}$$

On va montrer deux résultats intermédiaires avant de montrer que $E_\varepsilon(f)$ est de mesure nulle pour tout $\varepsilon > 0$. Cela prouvera que pour μ -presque tout $x \in X$, on a $\limsup_{N \rightarrow +\infty} S_N f(x) = 0$, c'est-à-dire que $S_N f(x)$ tend vers $0 = E(f|\mathcal{I})(x)$ quand $N \rightarrow +\infty$.

- Montrons tout d'abord que :

$$\forall g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu), \forall \varepsilon > 0, \mu(E_{2\varepsilon}(g)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |g| d\mu$$

Soient $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$E_\varepsilon^M(g_+) = \{x \in X \mid \exists N \in \llbracket 1, M \rrbracket \sum_{n=0}^{N-1} g_+(T^n(x)) \geq \varepsilon N\}$$

et

$$E_\varepsilon^M(g_-) = \{x \in X \mid \exists N \in \llbracket 1, M \rrbracket \sum_{n=0}^{N-1} g_-(T^n(x)) \geq \varepsilon N\}$$

On va montrer par récurrence que pour tous $P \geq M$ et $x \in X$, $\sum_{n=0}^{P-1} g_+(T^n(x)) \geq \varepsilon \sum_{j=0}^{P-M} \mathbf{1}_{E_\varepsilon^M(g_+)}(T^j(x))$.

- Soit $x \in E_\varepsilon^M(g_+)$, il existe $N \in \llbracket 1, M \rrbracket$ tel que $\sum_{n=0}^{N-1} g_+(T^n(x)) \geq \varepsilon N$, donc $\sum_{n=0}^{M-1} g_+(T^n(x)) \geq \varepsilon$. On en déduit par positivité de g_+ que pour tout $x \in X$, $\sum_{n=0}^{M-1} g_+(T^n(x)) \geq \varepsilon \mathbf{1}_{E_\varepsilon^M(g_+)}(x)$.

- On suppose que pour un certain $P \geq M$, on a, pour tous $P' \in \llbracket M, P \rrbracket$ et $x \in X$, $\sum_{n=0}^{P'-1} g_+(T^n(x)) \geq \varepsilon \sum_{j=0}^{P'-M} \mathbf{1}_{E_\varepsilon^M(g_+)}(T^j(x))$. Alors, soit $x \in X$.

Si $x \in E_\varepsilon^M(g_+)$, alors il existe $N \in \llbracket 1, M \rrbracket$ tel que $\sum_{n=0}^{N-1} g_+(T^n(x)) \geq \varepsilon N$. Dans le cas où $N \leq P+1-M$, en appliquant l'hypothèse de récurrence au rang $P-N+1$ à $T^N(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^P g_+(T^n(x)) &= \sum_{n=0}^{N-1} g_+(T^n(x)) + \sum_{n=N}^P g_+(T^n(x)) \\ &\geq \varepsilon N + \sum_{n=0}^{P-N} g_+(T^n(T^N(x))) \\ &\geq \varepsilon \left(N + \sum_{j=0}^{P-N+1-M} \mathbf{1}_{E_\varepsilon^M(g_+)}(T^{N+j}(x)) \right) \\ &\geq \varepsilon \sum_{j=0}^{P+1-M} \mathbf{1}_{E_\varepsilon^M(g_+)}(T^j(x)) \end{aligned}$$

Et dans le cas où $N > P+1-M$, on a :

$$\sum_{n=0}^P g_+(T^n(x)) = \sum_{n=0}^{N-1} g_+(T^n(x)) + \sum_{n=N}^P g_+(T^n(x)) \geq \varepsilon N + 0 \geq \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{1}_{E_\varepsilon^M(g_+)}(T^j(x)) \geq \sum_{j=0}^{P+1-M} \mathbf{1}_{E_\varepsilon^M(g_+)}(T^j(x))$$

Enfin, si $x \notin E_\varepsilon^M(g_+)$, alors l'hypothèse de récurrence appliquée au rang P à $T(x)$ donne :

$$\sum_{n=0}^P g_+(T^n(x)) \geq \sum_{n=0}^{P-1} g_+(T^n(T(x))) \geq \sum_{j=0}^{P-M} \mathbf{1}_{E_\varepsilon^M(g_+)}(T^j(T(x))) = \sum_{j=0}^{P+1-M} \mathbf{1}_{E_\varepsilon^M(g_+)}(T^j(x))$$

Cela prouve que la propriété est vérifiée au rang $P+1$.

On a donc montré la propriété annoncée par récurrence.

Donc, en intégrant, pour tout $P \geq M$, on a : $P \int g_+ d\mu \geq (P - M + 1)\varepsilon \mu(E_\varepsilon^M(g_+))$. D'où, en divisant par P et en faisant tendre $P \rightarrow +\infty$, $\int g_+ d\mu \geq \varepsilon \mu(E_\varepsilon^M(g_+))$. De même, on montre que $\int g_- d\mu \geq \varepsilon \mu(E_\varepsilon^M(g_-))$. Or, la suite $(E_\varepsilon^M(g_+))_{M \in \mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion, de même pour g_- , et on a $E_{2\varepsilon}(g) \subset \bigcup_{M \in \mathbb{N}^*} E_\varepsilon^M(g_+) \cup \bigcup_{M \in \mathbb{N}^*} E_\varepsilon^M(g_-)$ (inclusion évidente si on regarde les complémentaires). On obtient donc que :

$$\mu(E_{2\varepsilon}(g)) \leq \limsup_{M \rightarrow +\infty} \mu(E_\varepsilon^M(g_+)) + \limsup_{M \rightarrow +\infty} \mu(E_\varepsilon^M(g_-)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int g_+ d\mu + \frac{1}{\varepsilon} \int g_- d\mu$$

c'est-à-dire $\mu(E_{2\varepsilon}(g)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int |g| d\mu$.

- Montrons ensuite que :

$$\forall \delta > 0, \exists h \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu), \int_X |f - (h \circ T - h)| d\mu < \delta$$

On note $B = \{h \circ T - h, h \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)\}$. D'après une remarque précédente, pour tout $h \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$, on a : $E(h \circ T - h | \mathcal{I}) = E(h \circ T | \mathcal{I}) - E(h | \mathcal{I}) = 0$. Donc B est un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(E(\cdot | \mathcal{I}))$.

Par ailleurs, d'après le théorème de représentation de Riesz, les formes linéaires continues sur $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ sont les applications de la forme $g \mapsto \int_X g k d\mu$, où $k \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$. Si une telle application s'annule sur B , alors on a en particulier : $\int k \circ T \cdot k d\mu = \int k^2 d\mu$ donc, par invariance de μ , on a :

$$\int (k \circ T - k)^2 d\mu = \int (k \circ T)^2 d\mu - 2 \int k \circ T \cdot k d\mu + \int k^2 d\mu = 2 \int k^2 d\mu - 2 \int k \circ T \cdot k d\mu = 0$$

donc $k \circ T = k$ μ -presque partout. Donc k est \mathcal{I} -mesurable. On a alors, pour tout $g \in \text{Ker}(E(\cdot | \mathcal{I}))$, $\int g k d\mu = \int E(g k | \mathcal{I}) d\mu = \int k \cdot E(g | \mathcal{I}) d\mu = 0$. En conclusion, toute forme linéaire définie sur $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ qui s'annule sur B s'annule sur $\text{Ker}(E(\cdot | \mathcal{I}))$. D'après le corollaire du théorème de Hahn-Banach, B est dense dans $\text{Ker}(E(\cdot | \mathcal{I}))$. En particulier, pour tout $\delta > 0$, il existe $g \in B$ tel que $\|g - f\|_1 < \delta$, d'où le résultat.

- Montrons enfin que :

$$\forall \varepsilon > 0, \mu(E_\varepsilon(f)) = 0$$

Il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $E_\varepsilon(f) \subset E_{\varepsilon/2}(f - (h \circ T - h)) \cup E_{\varepsilon/2}(h \circ T - h)$ pour tout $h \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$. Donc $\mu(E_\varepsilon(f)) \leq \mu(E_{\varepsilon/2}(f - (h \circ T - h))) + \mu(E_{\varepsilon/2}(h \circ T - h))$. Or, d'une part, pour tous $x \in X$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (h \circ T - h)(T^n(x)) \right| = \frac{1}{N} |h(T^N(x)) - h(x)| \leq \frac{2}{N} \|h\|_\infty$, donc $E_{\varepsilon/2}(h \circ T - h) = \emptyset$. D'autre part, d'après le second point, pour tout $\delta > 0$, on peut choisir h tel que $\int_X |f - (h \circ T - h)| d\mu < \delta$, donc, en utilisant le premier point, $\mu(E_{\varepsilon/2}(f - (h \circ T - h))) \leq \frac{4\delta}{\varepsilon}$. Finalement, on obtient que pour tout $\delta > 0$, $\mu(E_\varepsilon(f)) \leq \frac{4\delta}{\varepsilon}$, donc $\mu(E_\varepsilon(f)) = 0$.

• Quitte à appliquer le résultat à f_+ et f_- , puis à additionner ces résultats, on

peut supposer que f est positive. D'après le lemme de Fatou, et en utilisant le fait que T préserve μ , on a :

$$\int_X \tilde{f} d\mu = \int_X \liminf_{N \rightarrow +\infty} S_N f d\mu \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \int_X S_N f d\mu = \int_X f d\mu$$

Autrement dit, par positivité, $\tilde{f} \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ et $\|\tilde{f}\|_1 \leq \|f\|_1$. Il y a même égalité car $(S_N f)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers \tilde{f} dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

- Comme dans une remarque précédente, on constate que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_N f \circ T = \frac{N+1}{N} S_{N+1} f - \frac{1}{N} f$, ce qui prouve l'invariance de \tilde{f} en faisant tendre $N \rightarrow +\infty$.

- Si on n'a pas montré directement que $\tilde{f} = E(f|\mathcal{I})$, alors on déduit cette égalité de la convergence dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ donnée par le théorème de Von Neumann, et de la convergence presque partout donnée par le premier point. Les deux points précédents peuvent alors être vus comme des conséquences de cette égalité.

- Dans le cas où μ est T -ergodique, par invariance de \tilde{f} , \tilde{f} est constante μ -presque partout. De plus, $X \in \mathcal{I}$ et \tilde{f} est l'espérance conditionnelle de f sachant \mathcal{I} , donc on a $\tilde{f} = \int_X \tilde{f} d\mu = \int_X f d\mu$. \square

Remarque. Il se peut que la convergence ne se fasse pas partout. Par exemple, si on considère le doublement de l'angle T , la mesure de Lebesgue λ (qui est T -ergodique) et $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ intégrable telle que $\int f d\lambda \neq f(0)$, alors, comme 0 est un point fixe de T , toutes les moyennes de Birkhoff sont égales à $f(0)$, donc elles ne convergent pas vers $\int f d\lambda$.

Corollaire. Avec les notations précédentes, si μ est T -ergodique, alors pour tout $B \in \mathcal{B}$, pour μ -presque tout $x \in X$, la proportion de temps que l'orbite de x passe dans B est égale à $\mu(B)$. Autrement dit :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \mid T^n(x) \in B\} = \mu(B)$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de Birkhoff à la fonction $\mathbf{1}_B$. \square

Corollaire. Si μ et ν sont deux mesures T -ergodiques distinctes, alors elles sont singulières.

Preuve. Soient μ et ν deux mesures T -ergodiques distinctes. Alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(B) \neq \nu(B)$. D'après le théorème de Birkhoff appliqué à $\mathbf{1}_B$ dans (X, \mathcal{B}, μ, T) et (X, \mathcal{B}, ν, T) , $E = \left\{ x \in X \mid \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_B(T^n(x)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mu(B) \right\}$ vérifie $\mu(E) = 1$ et $F = \left\{ x \in X \mid \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_B(T^n(x)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \nu(B) \right\}$ vérifie $\nu(F) =$

1. Donc, comme $E \cap F = \emptyset$, on en déduit que E et F sont singulières. \square

Remarque. On peut montrer ce résultat sans utiliser le théorème ergodique de Birkhoff. Pour cela, on peut utiliser la décomposition de μ donnée par le théorème de Radon-Nikodym. On montre que chacune de ses composantes est également invariante par T , puis on utilise l'unicité de la décomposition. Par extrémalité de μ dans $\mathcal{M}_T(X)$, l'une des composantes est nulle, ce qui donne $\mu = \nu$ ou $\mu \perp \nu$.

4.6 Quelques applications

Nombres normaux

Proposition. Soit un entier $k \geq 2$. Tout réel $x \in [0, 1[$ admet un développement de la forme $x = \frac{i_1}{k} + \frac{i_2}{k^2} + \frac{i_3}{k^3} + \dots$, où $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $i_j \in \{0, \dots, k-1\}$, ce développement n'étant pas forcément unique.

Remarque. Les cas $k = 10$ (développement décimal) et $k = 2$ (développement dyadique) sont des cas usuels.

Définition. Un nombre $x \in [0, 1[$ est dit normal en base k ssi les proportions de $0, \dots, k-1$ dans son développement sont égales (à $\frac{1}{k}$). Autrement dit,

$$\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{n \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid i_n = i\} = \frac{1}{k}$$

Proposition. Soit un entier $k \geq 2$. Si λ désigne la mesure de Lebesgue, alors λ -presque tout réel de $[0, 1[$ est normal en base k .

Preuve. Comme pour le doublement de l'angle, on peut montrer que la mesure de Lebesgue est invariante et ergodique pour $T_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & kx \end{array}$. Or, pour tous $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on peut vérifier que $T_k^{n-1}(x) \in [\frac{i_n}{k}, \frac{i_n+1}{k}[$. Donc, pour tous $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et $N \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}\{n \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid i_n = i\} = \text{Card}\{n \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid T_k^{n-1}(x) \in [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}[$. D'après le théorème de Birkhoff, comme $\lambda([\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}[) = \frac{1}{k}$, on en déduit que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{n \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid i_n = i\} = \frac{1}{k}$. \square

Premiers chiffres des puissances de 2

Notation. On s'intéresse à la suite de terme général 2^n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n \in \{1, \dots, 9\}$ le premier chiffre de l'écriture décimale de 2^n .

Proposition. Pour tout $k \in \{1, \dots, 9\}$, la fréquence de k dans la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\log_{10}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Autrement dit,

$$\forall k \in \{1, \dots, 9\}, \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{n \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid r_n = k\} = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Preuve. Soit $k \in \{1, \dots, 9\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n = k$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $k \cdot 10^r \leq 2^n < (k+1) \cdot 10^r$, si et seulement si $n \log_{10}(2) \in [\log_{10}(k), \log_{10}(k+1)[$ vu dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Comme $\alpha = \log_{10}(2)$ est irrationnel, on sait que la rotation $T : x \mapsto x + \alpha$ est λ -ergodique (λ désignant la mesure de Lebesgue). Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n(0) = n\alpha$. D'après le théorème de Birkhoff, comme $\lambda([\log_{10}(k), \log_{10}(k+1)]) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{n \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid r_n = k\} = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. \square

Fractions continues

Proposition. La mesure de Gauss $\mu = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{dx}{1+x}\right)$ est ergodique pour la transformation de Gauss $T : x \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\}$.

Preuve. On note λ la mesure de Lebesgue. On a alors $\frac{1}{2\ln 2}\lambda \leq \mu \leq \frac{1}{\ln 2}\lambda$.
- On commence par établir une inégalité utile pour la suite. Soient $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. $\psi_{k_1 \dots k_n}$ est dérivable sur $]0, 1[$ de dérivée $y \mapsto \frac{p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n}{(q_n + q_{n-1}y)^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{(q_n + q_{n-1}y)^2}$.
Donc, pour tous $x, y \in]0, 1[$, on a : $\left| \frac{\psi'_{k_1 \dots k_n}(x)}{\psi'_{k_1 \dots k_n}(y)} \right| \leq \left(\frac{q_n + q_{n-1}y}{q_n + q_{n-1}x} \right)^2 = \left(1 + \frac{q_{n-1}(y-x)}{q_n + q_{n-1}x} \right)^2$,
avec $\left| \frac{q_{n-1}(y-x)}{q_n + q_{n-1}x} \right| = \frac{q_{n-1}|y-x|}{q_n + q_{n-1}x} \leq \frac{q_{n-1}}{q_n} \leq 1$. Donc : $\left| \frac{\psi'_{k_1 \dots k_n}(x)}{\psi'_{k_1 \dots k_n}(y)} \right| \leq 4$. On en déduit que $\sup_{[0,1]} |\psi'_{k_1 \dots k_n}| \leq 4 \inf_{[0,1]} |\psi'_{k_1 \dots k_n}|$.
Par ailleurs, $\psi_{k_1 \dots k_n}$ est monotone et $\psi'_{k_1 \dots k_n}$ est de signe constant, donc $J_{k_1 \dots k_n} = \psi_{k_1 \dots k_n}([0, 1])$ est un intervalle dont les bornes sont $\psi_{k_1 \dots k_n}(0)$ et $\psi_{k_1 \dots k_n}(1)$, donc : $\lambda(J_{k_1 \dots k_n}) = |\psi_{k_1 \dots k_n}(1) - \psi_{k_1 \dots k_n}(0)| = \left| \int_0^1 \psi'_{k_1 \dots k_n}(x) dx \right| = \int_0^1 |\psi'_{k_1 \dots k_n}(x)| dx \leq \sup_{[0,1]} |\psi'_{k_1 \dots k_n}|$.
Ensuite, soit $B \in \mathcal{B}$. On a $B \cap J_{k_1 \dots k_n} = \psi_{k_1 \dots k_n}(T^n(B))$. Donc, toujours par monotonie de $\psi_{k_1 \dots k_n}$, on a : $\lambda(B \cap J_{k_1 \dots k_n}) = \lambda(\psi_{k_1 \dots k_n}(T^n(B))) = \left| \int_{T^n(B)} \psi'_{k_1 \dots k_n}(x) dx \right| = \int_{T^n(B)} |\psi'_{k_1 \dots k_n}(x)| dx \geq \lambda(T^n(B)) \inf_{[0,1]} |\psi'_{k_1 \dots k_n}|$.
Enfin, pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a $B \subset T^{-n}(T^n(B))$ donc : $\lambda(T^n(B)) \geq \ln 2 \cdot \mu(T^n(B)) = \ln 2 \cdot \mu(T^{-n}(T^n(B))) \geq \ln 2 \cdot \mu(B) \geq \frac{1}{2}\lambda(B)$.
Finalement, on en conclut que pour tout $B \in \mathcal{B}$:

$$\lambda(B \cap J_{k_1 \dots k_n}) \geq \frac{1}{8} \lambda(B) \lambda(J_{k_1 \dots k_n})$$

- Montrons maintenant l'ergodicité de μ à l'aide de cette inégalité. Soient $B \in \mathcal{B}$ tel que $T^{-1}(B) = B$ et $\varepsilon > 0$. λ étant une mesure régulière, μ l'est aussi, donc il existe un recouvrement tel que $[0, 1] \setminus B \subset \bigcup_{k_1, \dots, k_n} J_{k_1 \dots k_n}$ et $\lambda\left(\bigcup_{k_1, \dots, k_n} J_{k_1 \dots k_n}\right) \leq \lambda([0, 1] \setminus B) + \varepsilon$. Alors on a :

$$\begin{aligned} & \lambda(B)\lambda([0, 1] \setminus B) \\ & \leq \lambda(B) \sum_{k_1 \dots k_n} \lambda(J_{k_1 \dots k_n}) \\ & \leq 8 \sum_{k_1 \dots k_n} \lambda(B \cap J_{k_1 \dots k_n}) \\ & = 8 \left(\sum_{k_1 \dots k_n} \lambda(B \cap J_{k_1 \dots k_n}) + \left(\sum_{k_1 \dots k_n} \lambda(J_{k_1 \dots k_n} \cap ([0, 1] \setminus B)) - \lambda([0, 1] \setminus B) \right) \right) \\ & = 8 \left(\sum_{k_1 \dots k_n} \lambda(J_{k_1 \dots k_n}) - \lambda([0, 1] \setminus B) \right) \leq 8\varepsilon \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\lambda(B) = 0$ ou $\lambda([0, 1] \setminus B) = 0$. D'après l'inégalité du début de la preuve, on a $\mu(B) = 0$ ou $\mu([0, 1] \setminus B) = 0$.

Finalement, μ est T -ergodique. \square

Corollaire. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Pour μ -presque tout $x \in [0, 1]$, la fréquence d'apparition de l dans la suite $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est égale à $\log_2\left(1 + \frac{1}{l(l+2)}\right)$. Autrement dit,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{k \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid a_k(x) = l\} = \log_2\left(1 + \frac{1}{l(l+2)}\right)$$

Preuve. D'après le théorème ergodique de Birkhoff appliqué à la fonction $f = \mathbf{1}_{\{x|a_1(x)=l\}} = \mathbf{1}_{I_l}$, pour μ -presque tout $x \in [0, 1]$, la limite ci-dessus est égale à :

$$\int f d\mu = \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{l+1}}^{\frac{1}{l}} \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\ln 2} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{l}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{l+1}\right) \right) = \log_2\left(\frac{(l+1)^2}{l(l+2)}\right)$$

ce qui prouve le résultat. \square

Corollaire. Pour μ -presque tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (a_1 \dots a_N)^{1/N} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{\log_2(n)}$$

Preuve. Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(a_1(x))$. f vaut $\ln(n)$ sur les intervalles

$I_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$. On a donc :

$$\int f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \ln n \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)$$

en utilisant le calcul de la démonstration précédente. Or cette série converge, le terme général étant équivalent à $\frac{\ln n}{n^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$. Donc, par positivité de f , f est μ -intégrable.

D'après le théorème de Birkhoff, pour μ -presque tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln(a_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^{n-1}(x)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int f d\mu$$

En prenant l'exponentielle, on obtient le résultat annoncé. □

A Annexe : Résultats généraux utilisés

On rappelle ici quelques résultats généraux qui ont été utilisés précédemment, dans les preuves notamment. On ne les démontre évidemment pas, ce sont des résultats très classiques d'analyse.

Résultats de topologie

On rappelle trois théorèmes importants qui nous sont utiles : le lemme de Baire, le théorème de Tychonov et le théorème de Hahn-Banach (on utilisera essentiellement son corollaire).

Lemme (Baire). Soit (X, d) un espace métrique complet et soit Ω un ouvert non vide de X . Alors l'espace (Ω, d) est un espace de Baire, autrement dit, toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans Ω est dense dans Ω .

Remarques.

- De manière équivalente, toute réunion dénombrable de fermés de Ω d'intérieur vide est d'intérieur vide.
- On appelle G_δ une intersection dénombrable d'ouverts.

Théorème (Tychonov). Soit $((X_k, d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques compacts. Alors le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} X_k$ est compact pour la topologie produit.

Théorème (Hahn-Banach). Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue de norme $\|f\|$.

Alors il existe une forme linéaire continue $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur F et telle que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Remarque. Ce théorème ne donne pas de résultat d'unicité.

Corollaire. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . Il y a équivalence entre :

- F est dense dans E
- Pour toute forme linéaire continue $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, si $\varphi|_F = 0$, alors $\varphi = 0$.

Résultats de théorie de la mesure

Voici d'abord un résultat concernant la densité dans les espaces L^p .

Proposition. Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré et soit $p \in [1, +\infty[$. Si μ est sigma-finie, alors l'espace $\mathcal{C}_c^0(X)$ des fonctions continues sur X à support compact est dense dans $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Remarques.

- En particulier, l'espace des fonctions continues est dense dans $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.
- L'espace $\mathcal{C}_c^0(X)$ n'est pas dense dans $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$.

On énonce maintenant deux théorèmes de représentation de Riesz, l'un pour les espaces L^p , l'autre pour l'espace des fonctions continues.

Théorème (de représentation de Riesz). Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré, soit $p \in [1, +\infty[$ et soit $p' \in]1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si μ est sigma-finie, alors l'application

$$f \mapsto \left(g \mapsto \int_X fg d\mu \right)$$

est une bijection de $L^{p'}(X, \mathcal{B}, \mu)$ sur le dual $(L^p(X, \mathcal{B}, \mu))'$.

Remarque. L'hypothèse de sigma-finitude pour μ est utile uniquement pour le cas $p = 1$.

Théorème (de représentation de Riesz). Soient X un compact et $\mathcal{C}^0(X)'_+$ l'ensemble des formes linéaires continues ϕ sur $\mathcal{C}^0(X)$, positives (i.e. vérifiant pour tout $f \in \mathcal{C}^0(X) : \forall x \in X, f(x) \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0$), telles que $\phi(1) = 1$.

Alors l'application

$$\mu \mapsto \left(\varphi \mapsto \int_X \varphi d\mu \right)$$

est une bijection de $\mathcal{M}_1(X)$ sur $\mathcal{C}^0(X)'_+$.

Remarque. Plus généralement, on peut enlever l'hypothèse $\phi(1) = 1$ pour obtenir une bijection avec l'ensemble des mesures positives finies.

On rappelle ensuite le théorème d'extension de Carathéodory.

Définition. Soit E un ensemble et soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que \mathcal{A} est une algèbre de Boole de parties de E si et seulement si :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $\forall A \in \mathcal{A}, {}^c A \in \mathcal{A}$
- $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$

Remarque. On peut remplacer l'axiome de stabilité par intersection finie par la stabilité par réunion finie et/ou le premier axiome par $E \in \mathcal{A}$.

Théorème (d'extension de Carathéodory, ou de Hahn-Kolmogorov).

Soient X un ensemble, \mathcal{A} une algèbre de Boole de parties de X et une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$. Si :

- X s'écrit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in \mathcal{A}$ et $\mu(X_n) < \infty$ (autrement dit, μ est sigma-finie sur \mathcal{A}),
- μ est additive sur \mathcal{A} , c'est-à-dire $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
- pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{A} décroissante pour l'inclusion telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$,

alors μ se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu engendrée par \mathcal{A} .

On rappelle enfin le théorème de Radon-Nikodym.

Définitions. Soit (X, \mathcal{B}) un espace mesurable et soient μ et ν deux mesures sigma-finies sur X .

On dit que ν est absolument continue par rapport à μ , et on note $\nu \ll \mu$, ssi pour tout $B \in \mathcal{B}, \mu(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0$.

On dit que μ et ν sont singulières (ou étrangères), et on note $\mu \perp \nu$, si et seulement si il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(B) = 0$ et $\nu({}^c B) = 0$ (ou, de manière équivalente, $\forall A \in \mathcal{B}, \nu(A) = \nu(A \cap B)$).

Théorème (Radon-Nikodym). Soit (X, \mathcal{B}) un espace mesurable et soient μ et ν deux mesures sigma-finies sur X . Alors :

- Il existe un unique couple de mesures sigma-finies (λ_1, λ_2) tel que $\mu = \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 \ll \nu$ et $\lambda_2 \perp \nu$.
- Si $\nu \ll \mu$, alors il existe $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ (unique μ -presque partout) tel que $\forall B \in \mathcal{B}, \nu(B) = \int_B f d\mu$.

Définition. Avec les notations du théorème, il existe $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$, unique ν -presque partout, tel que $\forall B \in \mathcal{B}, \lambda_1(B) = \int_B f d\nu$. f est appelée

dérivée de Radon-Nikodym, ou densité, de μ par rapport à ν , et notée $\frac{d\mu}{d\nu}$.

Résultats de probabilités

On commence par des rappels sur l'espérance conditionnelle et quelques propriétés élémentaires, avant d'énoncer la loi du 0-1 de Kolmogorov.

Théorème-définition. Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé, \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} et $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors il existe un unique élément de $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Y est \mathcal{G} -mesurable
- $\forall A \in \mathcal{G}, \int_A Y dP = \int_A X dP$

Cet élément est appelé espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{G} , et noté $E(X|\mathcal{G})$.

Remarque. La seconde condition est équivalente à la condition suivante : pour toute fonction $Z : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{G} -mesurable et bornée, $E(YZ) = E(XZ)$. Cette condition implique clairement la précédente et l'application du théorème de convergence dominée assure la seconde implication.

Propriétés. Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé, \mathcal{G}, \mathcal{H} des sous-tribus de \mathcal{F} et $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- L'espérance conditionnelle est linéaire
- Si $X \leq Y$, alors $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$
- On a $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$
- Si X est indépendant de \mathcal{G} , alors $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$
- Si X est \mathcal{G} -mesurable, alors $E(X|\mathcal{G}) = X$
- Si XY est intégrable et Y est \mathcal{G} -mesurable, alors $E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$
- Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$
- Les propriétés classiques avec l'espérance restent valables (convergence monotone, lemme de Fatou, inégalité de Jensen etc.)

Définition. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . La tribu asymptotique, ou tribu de queue, de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la tribu $\mathcal{T} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$.

Théorème (loi du 0-1 de Kolmogorov). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Tout événement de la tribu asymptotique de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour probabilité 0 ou 1.

Résultats divers

On rappelle d'abord le lemme de Zorn.

Définition. Soient (E, \leq) un ensemble ordonné, $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est un élément minimal de A si et seulement si $a \in A$ et pour tout $x \in A$, $a \leq x \Rightarrow a = x$.

Lemme (Zorn). Soit Z un ensemble partiellement ordonné. Si toute sous-famille totalement ordonnée de Z est bornée inférieurement par un élément de Z , alors Z possède un élément minimal.

Remarques.

- Dans le cas de parties d'un ensemble muni de la relation d'inclusion, on a la formulation suivante, qu'on privilégiera. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Si pour toute sous-famille $(X_j)_{j \in J}$ totalement ordonnée, $\bigcap_{j \in J} X_j$ contient un X_i , alors la famille $(X_i)_{i \in I}$ possède un élément minimal.
- On a un résultat similaire avec les éléments maximaux.
- On rappelle que le lemme de Zorn est équivalent à l'axiome du choix.

On rappelle ensuite les propriétés qui sont utiles concernant l'opération « différence symétrique ».

Définition. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. La différence symétrique de A et B est l'ensemble :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = ({}^c A \cap B) \cup (A \cap {}^c B)$$

Propriétés. Soient E et F deux ensembles. Soient $A, B, C, (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des parties de E et A', B' des parties de F . Soit enfin une application $f : E \rightarrow F$. On a :

- $A \Delta C \subset (A \Delta B) \cap (B \Delta C)$
- $A \Delta \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \Delta A_n)$
- $A \Delta \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \Delta A_n)$
- $f^{-1}(A' \Delta B') = f^{-1}(A') \Delta f^{-1}(B')$

On termine enfin par rappeler quelques résultats d'analyse harmonique, dont le théorème de Poisson.

Définition. Une fonction harmonique est une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert Ω de \mathbb{C} , dont le laplacien est nul.

Propriété. Soient U, V deux ouverts de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow V$ holomorphe et $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ harmonique. Alors $h \circ f$ est harmonique.

Définitions. On appelle noyau de Poisson l'application

$$P : \begin{array}{ll} \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1 & \rightarrow]0, +\infty[\\ (z, \zeta) & \mapsto \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} \end{array}$$

où \mathbb{D} est le disque unité ouvert de \mathbb{C} et \mathbb{S}^1 est le cercle unité.

On note σ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{S}^1 (c'est-à-dire la mesure image de la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi[$ par $\theta \mapsto e^{i\theta}$).

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \sigma)$, on appelle intégrale de Poisson l'application

$$Pf : \begin{array}{ll} \mathbb{D} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\zeta) P(z, \zeta) d\sigma(\zeta) \end{array}$$

Théorème (Poisson). On reprend les notations ci-dessus.

– Pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{S}^1)$, la fonction

$$u : \begin{array}{ll} \bar{\mathbb{D}} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \begin{cases} Pf(z) & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ f(z) & \text{si } z \in \mathbb{S}^1 \end{cases} \end{array}$$

est continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ et harmonique sur \mathbb{D} .

– Réciproquement, pour toute fonction $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ et harmonique sur \mathbb{D} , on a, pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$u(z) = P[u|_{\mathbb{S}^1}](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} u(\zeta) P(z, \zeta) d\sigma(\zeta)$$

Bibliographie

- « Dynamical systems and ergodic theory », Mark Pollicott & Michiko Yuri, London Mathematical Society
- « Systèmes dynamiques élémentaires », Notes de cours aux carrés à l'ENS, Frédéric Paulin & Yves Benoist
- « An introduction to ergodic theory », Peter Walters, Springer

Annexe D

« Principes de grandes déviations pour les matrices aléatoires »

Principes de grandes déviations pour les matrices aléatoires

Benjamin Groux
Mémoire sous la direction de Mylène Maïda

Juillet 2013

Introduction

Les résultats de grandes déviations pour les matrices aléatoires sont assez peu nombreux. Essentiellement, il existe un grand résultat de ce type, établi par Gérard Ben Arous et Alice Guionnet dans leur article « Large deviations for Wigner's law and Voiculescu's non-commutative entropy » [2] en 1997.

En 2012, dans l'article « A large deviations principle for Wigner matrices without Gaussian tails » [7], Charles Bordenave et Pietro Caputo établissent un second principe de grandes déviations, en se plaçant non pas dans le cadre gaussien habituel, mais dans le cas de matrices hermitiennes dont les coefficients sont i.i.d. avec une queue de probabilité de la forme e^{-at^α} , avec $a > 0$ et $\alpha \in]0, 2[$. La démonstration consiste principalement en l'étude des graphes aléatoires associés à ces matrices aléatoires.

Dans la première partie de ce mémoire, les résultats classiques de grandes déviations et de matrices aléatoires seront rappelés, et le résultat de Ben Arous et Guionnet sera présenté. La présentation détaillée de l'article de Bordenave et Caputo viendra dans un second temps. Enfin, la dernière partie regroupera les résultats de mes travaux de recherche, ceux-ci consistant à étendre le résultat de Bordenave et Caputo à des matrices de covariance. Le travail n'étant pas terminé, certains points peuvent s'avérer flous ou incomplets.

Table des matières

Introduction	1
Notations	3
1 Contexte	4
1.1 Les grandes déviations	4
1.2 Les matrices aléatoires	7
1.3 Présentation du résultat de Ben Arous et Guionnet	8
2 Étude de l'article de Bordenave et Caputo	11
2.1 Première partie de la démonstration	12
2.2 Seconde partie de la démonstration	14
2.2.1 Graphes pondérés et topologies	14
2.2.2 PGD pour des graphes aléatoires	24
2.2.3 PGD pour la mesure spectrale empirique μ_C	25
2.3 Propriétés de la fonction de taux	26
3 Extension du résultat aux matrices de covariance	28
3.1 Matrices de Wigner et matrices de covariance	28
3.2 Problématique	29
3.3 Équivalence exponentielle	30
3.4 Adaptation du théorème 2.7	31
3.5 Travail restant	39
A Annexe : Résultats généraux utilisés	41
A.1 Distances sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$	41
A.2 Inégalités matricielles	42
A.3 Inégalités de concentration	42
A.4 Autres résultats	43
B Annexe : Probabilités libres	44
B.1 Cadre	44
B.2 Convolutions libres	45
Bibliographie	50

Notations

En plus des notations introduites au fur et à mesure, on utilisera les notations générales suivantes :

$a \wedge b$	minimum de a et b
$a \vee b$	maximum de a et b
$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x
$\delta_{i,j}$	symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon
$B(a, r)$	boule de centre a et de rayon r
$\overset{\circ}{X}$	intérieur de X
\overline{X}	adhérence de X
\mathbb{S}^1	ensemble des nombres complexes de module 1
$\ell^2(X)$	ensemble des suites indexées par X de carré sommable
p.s.	presque sûrement
v.a.	variable(s) aléatoire(s)
i.i.d.	indépendantes identiquement distribuées
$\mathcal{P}(X)$	ensemble des probabilités sur X
$\mathcal{P}_{\text{sym}}(\mathbb{R})$	ensemble des probabilités symétriques sur \mathbb{R}
δ_a	masse de Dirac en a
$\mu_n \rightsquigarrow \mu$	μ_n converge en loi vers μ : pour toute fonction f continue bornée, $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ quand $n \rightarrow +\infty$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$	ensemble des matrices complexes à n lignes et p colonnes
$\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$	ensemble des matrices hermitiennes de taille n
A^t	transposée de A
A^*	transconjugée de A
$\text{Tr}(A)$	trace de A
$\text{rg}(A)$	rang de A
Δ	déterminant de Vandermonde
G_μ	transformée de Cauchy-Stieljes de $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, voir définition B.7

1 Contexte

1.1 Les grandes déviations

La théorie des grandes déviations est un ensemble de techniques permettant d'étudier les probabilités d'évènements rares. Ces techniques s'appliquent dans des situations très variées et sont très robustes. Les évènements rares sont les évènements ne correspondant pas à un comportement typique du système. L'objectif est d'estimer asymptotiquement la probabilité de tels évènements en obtenant des principes de grandes déviations.

Voici un premier exemple de résultat de grandes déviations.

Théorème 1.1 (Cramér dans \mathbb{R} , voir [8, Théorème 2.2.3]). *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs réelles. Pour tout $n \geq 1$, on note $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(\overline{X}_n \geq x) = - \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda x - \ln E(e^{\lambda X_1}))$$

Ce résultat fait apparaître deux points essentiels de la théorie des grandes déviations. Tout d'abord, on aura typiquement des vitesses exponentielles et l'objectif sera de trouver un équivalent des quantités $\ln \mathbb{P}(X_n \in E)$. Ensuite, l'équivalent en question s'exprimera à l'aide de la borne inférieure ou supérieure d'une fonction, donc on sera ramené à des problèmes de calcul variationnel.

On va maintenant définir un principe de grandes déviations, qui est en quelque sorte un raffinement d'une loi des grands nombres et d'un théorème central limite.

Définition 1.2. Soit (X, \mathcal{O}) un espace topologique. Une *fonction de taux* est une fonction $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ semi-continue inférieurement (s.c.i.), c'est-à-dire les ensembles de niveau $\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$ sont fermés pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une fonction de taux est dite *bonne* lorsque ces ensembles sont compacts.

Définition 1.3. Soient (X, \mathcal{O}) un espace topologique et $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de probabilités sur un espace mesurable (X, \mathcal{B}) satisfait le *principe de grandes déviations (PGD)* de vitesse v , gouverné par la fonction de taux I , dans la topologie \mathcal{O} , si pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a :

$$- \inf_{x \in \overset{\circ}{A}} I(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \ln \mu_n(A) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \ln \mu_n(A) \leq - \inf_{x \in \overline{A}} I(x) \quad (1)$$

- Remarques.** – On définit indifféremment les notions pour des variables aléatoires ou pour leurs lois. Par exemple, on dit qu’une suite de v.a. satisfait un PGD si la suite de leurs lois satisfait un PGD.
- La seconde inégalité dans (1) est toujours vérifiée. On dit que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la borne inférieure (resp. supérieure) de grandes déviations si elle satisfait la première (resp. troisième) inégalité dans (1).
 - Dans la suite, on considèrera que \mathcal{B} est la tribu borélienne associée à \mathcal{O} . Pour obtenir un PGD, il est alors équivalent de montrer la borne inférieure pour les ouverts et la borne supérieure pour les fermés.
 - On dit que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait un PGD faible si elle satisfait la borne inférieure et si elle satisfait la borne supérieure pour les compacts.

On va par la suite considérer des espaces métriques. Dans ce cas, on peut obtenir un PGD faible en étudiant uniquement les boules de l’espace métrique.

Proposition 1.4 (voir [1, Corollaire D.6]). *On suppose que (X, d) est un espace métrique. Si on a pour tout $x \in X$:*

$$\begin{aligned} -I(x) &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \ln \mu_n(B(x, \delta)) \\ &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \ln \mu_n(B(x, \delta)) \end{aligned}$$

alors $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le PGD faible de vitesse v , gouverné par la fonction de taux I , dans la topologie induite par d .

À partir d’un PGD faible, il est possible d’obtenir un PGD grâce à un argument supplémentaire : la tension exponentielle de la suite de mesures, qui est l’idée que dans la bonne échelle exponentielle, la masse se concentre sur les compacts.

Définition 1.5. Une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de probabilités sur un espace mesurable (X, \mathcal{B}) est *exponentiellement tendue* pour la vitesse v si pour tout $A > 0$, il existe un compact K_A de X tel que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \ln \mu_n(K_A^c) \leq -A$$

Proposition 1.6 ([8, Lemme 1.2.18]). *Si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le PGD faible de vitesse v gouverné par la fonction de taux I , et si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est exponentiellement tendue, alors $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le PGD de vitesse v gouverné par la fonction de taux I .*

Une fois qu'un PGD est établi, il est possible d'en déduire un PGD sur un autre espace. Cette propriété est très importante. Par exemple, dans l'article qui nous intéresse, on l'utilise pour obtenir un PGD pour des matrices aléatoires à partir d'un PGD pour des graphes aléatoires.

Théorème 1.7 (Principe de contraction, voir [8, Théorème 4.2.1]). *Si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait un PGD sur X gouverné par la bonne fonction de taux I et si $f : X \rightarrow Y$ est continue, alors la suite $(f\#\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des mesures images satisfait un PGD sur Y gouverné par la bonne fonction de taux J définie par :*

$$\forall y \in Y, J(y) = \inf\{I(x) \mid f(x) = y\}$$

La proposition suivante permet également de déduire un PGD d'un autre PGD, mais sur le même espace métrique cette fois.

Définition 1.8. On suppose que (X, d) est un espace métrique. Soit $((Z_n, \tilde{Z}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $X \times X$. $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont *exponentiellement équivalentes* pour la vitesse v si pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \ln \mathbb{P} \left(d(Z_n, \tilde{Z}_n) \geq \delta \right) = -\infty$$

Remarque. Par l'inégalité triangulaire, l'équivalence exponentielle est une notion transitive.

Proposition 1.9 (voir [8, Théorème 4.2.13]). *On suppose encore que (X, d) est un espace métrique et que $((Z_n, \tilde{Z}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont des v.a. à valeurs dans $X \times X$. Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont exponentiellement équivalentes pour la vitesse v , et si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait un PGD de vitesse v et de bonne fonction de taux I , alors $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le même PGD.*

Pour terminer cette partie sur les outils de grandes déviations, on énonce un lemme utile permettant d'invertir des opérateurs.

Lemme 1.10 (voir [8, Lemme 1.2.15]). *Soient f_1, \dots, f_m des fonctions positives au voisinage de 0. On a :*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \left(\sum_{i=1}^m f_i(\varepsilon) \right) = \max_{1 \leq i \leq m} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln(f_i(\varepsilon))$$

1.2 Les matrices aléatoires

La théorie des matrices aléatoires tire ses origines des travaux du statisticien Wishart dans les années 1930 et du physicien Wigner dans les années 1950. Elle est actuellement en plein essor car ses applications sont très nombreuses et variées. La théorie des matrices aléatoires consiste en l'étude du spectre de matrices dont les coefficients sont des variables aléatoires et dont la taille tend vers l'infini. Rigoureusement, on considère une suite de matrices aléatoires et on étudie la limite de leur spectre.

Le premier résultat fondamental est le théorème de Wigner. Pour énoncer ce théorème, on introduit des objets classiques de la théorie. Les matrices de Wigner sont, avec les matrices de covariance, les plus étudiées. La notion de mesure spectrale empirique est fondamentale puisque c'est cette quantité qu'on cherche à faire converger en général. Enfin, la loi semi-circulaire joue un rôle central en théorie des matrices aléatoires, comme le montre son apparition dans le théorème de Wigner.

Définition 1.11. Une matrice X^N est de Wigner s'il existe $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ telles que :

- X^N est hermitienne de taille N
- les v.a. $X_{i,j}^N$, $1 \leq i \leq j \leq N$, sont indépendantes
- les v.a. $X_{i,i}^N$, $1 \leq i \leq N$, suivent la loi μ
- les v.a. $X_{i,j}^N$, $1 \leq i < j \leq N$, suivent la loi ν
- ν est de variance 1.

Définition 1.12. Soit A une matrice hermitienne de taille N . A est diagonalisable et son spectre est réel. On note $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ ses valeurs propres. La *mesure spectrale empirique* de A est la probabilité

$$\mu_A = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{\lambda_k}$$

Définition 1.13. La *loi semi-circulaire*, notée μ_{sc} , est la loi de densité

$$\sigma : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{[-2,2]}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Théorème 1.14 (Wigner, voir [1, Théorème 2.1.1]). *Soit X^N une matrice de Wigner. Presque sûrement, quand $N \rightarrow +\infty$, $\mu_{X^N/\sqrt{N}} \rightsquigarrow \mu_{sc}$.*

On déduit de ce théorème que presque sûrement, on a $\liminf_{N \rightarrow +\infty} \lambda_1 \geq 2$. Les théorèmes de Bai-Yin et de Soshnikov donnent des résultats plus fins sur la convergence de la plus grande valeur propre d'une matrice de Wigner.

Parmi les matrices de Wigner, les matrices gaussiennes sont d'une importance particulière. Notamment, les ensembles gaussiens orthogonal et unitaire ont été les premiers étudiés, car les calculs explicites pouvant être menés dans ces cadres ont fourni plusieurs résultats spécifiques.

Définition 1.15. Soit X^N une matrice symétrique telle que :

- les $X_{i,j}^N$, $1 \leq i \leq j \leq N$, sont des v.a. indépendantes
- pour tout $1 \leq i \leq N$, $X_{i,i}^N$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 2)$
- pour tout $1 \leq i < j \leq N$, $X_{i,j}^N$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On note P_1^N la loi de X^N . On dit qu'une matrice symétrique de loi P_1^N est dans l'*Ensemble Gaussien Orthogonal (GOE)*.

Définition 1.16. Soit X^N une matrice hermitienne telle que :

- les $X_{i,j}^N$, $1 \leq i \leq j \leq N$, sont des v.a. indépendantes
- pour tout $1 \leq i \leq N$, $X_{i,i}^N$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$
- pour tout $1 \leq i < j \leq N$, $\operatorname{Re}(X_{i,j}^N)$, $\operatorname{Im}(X_{i,j}^N)$ sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.

On note P_2^N la loi de X^N . On dit qu'une matrice hermitienne de loi P_2^N est dans l'*Ensemble Gaussien Unitaire (GUE)*.

Pour les matrices du GOE et du GUE, on a beaucoup mieux que la convergence des mesures spectrales empiriques. On peut en effet décrire explicitement la loi des valeurs propres et des vecteurs propres, ou encore étudier assez précisément la répartition des valeurs propres.

1.3 Présentation du résultat de Ben Arous et Guionnet

Ben Arous et Guionnet ont montré un principe de grandes déviations dans un cadre qui englobe celui du GOE et du GUE.

Cadre. On considère $\beta > 0$ et $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\beta' > 1$, $\beta' \geq \beta$, vérifiant

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{V(x)}{\beta' \ln |x|} > 1 \tag{2}$$

On note $P_{V,\beta}^N$ la loi de densité

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \mapsto \frac{1}{Z_{V,\beta}^N} |\Delta(\lambda)|^\beta \exp \left(-N \sum_{i=1}^N V(\lambda_i) \right) \quad (3)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N , où on rappelle que $\Delta(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_j - \lambda_i)$ et où $Z_{V,\beta}^N$ est la constante de normalisation

$$Z_{V,\beta}^N = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta(\lambda)|^\beta \exp \left(-N \sum_{i=1}^N V(\lambda_i) \right) d\lambda_1 \dots d\lambda_N$$

Remarquons que, avec les notations ci-dessus, lorsqu'on prend $V(x) = \beta x^2/4$ avec $\beta = 1$ (resp. $\beta = 2$), on retrouve la loi des valeurs propres du GOE (resp. du GUE) renormalisées.

On définit l'entropie non commutative $\Sigma : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [-\infty, +\infty[$ par

$$\Sigma(\mu) = \begin{cases} \iint \ln |x - y| d\mu(x) d\mu(y) & \text{si } \int \ln(1 + |x|) d\mu(x) < +\infty \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

On définit ensuite $I_{V,\beta} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ par

$$I_{V,\beta}(\mu) = \begin{cases} \int V(x) d\mu(x) - \frac{\beta}{2} \Sigma(\mu) - c_{V,\beta} & \text{si } \int V(x) d\mu(x) < +\infty \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

où $c_{V,\beta} = \inf_{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} \left(\int V(x) d\nu(x) - \frac{\beta}{2} \Sigma(\nu) \right)$.

On définit enfin la capacité logarithmique d'un borélien A de \mathbb{R} par

$$\gamma(A) = \exp \left(- \inf_{\nu \in \mathcal{P}(A)} \iint \ln \frac{1}{|x - y|} d\nu(x) d\nu(y) \right)$$

Avec toutes ces notations, on peut énoncer le résultat souhaité.

Lemme 1.17 (voir [1, Lemme 2.6.2]). *(i) Σ est bien définie. De plus,*

$c_{V,\beta}$ est fini et $I_{V,\beta}$ est bien définie

(ii) $I_{V,\beta}$ vaut $+\infty$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\int V(x) d\mu(x) = +\infty$

- il existe un borélien A de \mathbb{R} tel que $\mu(A) > 0$ et $\gamma(A) = 0$

(iii) $I_{V,\beta}$ est une bonne fonction de taux

(iv) $I_{V,\beta}$ est une fonction strictement convexe sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

- (v) $I_{V,\beta}$ admet un unique minimum global $\sigma_{V,\beta} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. $\sigma_{V,\beta}$ est à support compact, c'est la seule mesure telle qu'il existe $C_{V,\beta}$ vérifiant :
- pour $\sigma_{V,\beta}$ -presque tout x , $V(x) - \beta \int \ln|x-y| d\sigma_{V,\beta}(y) = C_{V,\beta}$
 - pour tout $x \notin \text{supp}(\sigma_{V,\beta})$, $V(x) - \beta \int \ln|x-y| d\sigma_{V,\beta}(y) > C_{V,\beta}$

Théorème 1.18 (voir [1, Théorème 2.6.1]). Soient $(\lambda_1^N, \dots, \lambda_N^N)$ des v.a. de loi $P_{V,\beta}^N$ et $\mu^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{\lambda_k^N}$. La suite de mesures aléatoires $(\mu^N)_{N \geq 1}$ satisfait le PGD sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ muni de la topologie faible, de vitesse N^2 , gouverné par la bonne fonction de taux $I_{V,\beta}$.

À partir de ce théorème, on peut démontrer que sous $P_{V,\beta}^N$, μ^N converge presque sûrement vers $\sigma_{V,\beta}$. De plus, on peut en déduire un PGD pour $\lambda_N^* = \max_{1 \leq k \leq N} \lambda_k^N$ en faisant une hypothèse supplémentaire sur les constantes $Z_{V,\beta}^N$, qui est vérifiée dans les cas du GOE et du GUE.

On va maintenant voir comment généraliser ce résultat à d'autres matrices de Wigner.

2 Étude de l'article de Bordenave et Caputo

Dans toute cette partie, on considère des matrices de Wigner. Comme annoncé, on ne va plus considérer des coefficients gaussiens mais avec une queue de probabilité en e^{-at^α} . Formalisons cette hypothèse.

Définition 2.1. Soient $a, \alpha \in]0, +\infty[$. On note $\mathcal{S}_\alpha(a)$ l'ensemble des variables aléatoires complexes Y telles que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -t^{-\alpha} \ln \mathbb{P}(|Y| \geq t) = a \quad (6)$$

et telles que $Y/|Y|$ et $|Y|$ sont indépendants lorsque $|Y|$ est grand, c'est-à-dire il existe $t_0 > 0$ et $\vartheta_a \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ tels que pour tous $t \geq t_0$ et $U \subset \mathbb{S}^1$ mesurable, on ait

$$\mathbb{P}(Y/|Y| \in U \text{ et } |Y| \geq t) = \vartheta_a(U) \mathbb{P}(|Y| \geq t) \quad (7)$$

On note alors S_a le support de ϑ_a .

Remarques. On peut déjà faire quelques remarques sur cette définition :

- Si Y suit la loi de Weibull dont la fonction de répartition est $t \mapsto 1 - e^{-at^\alpha}$, avec $a > 0, \alpha > 0$, alors $Y \in \mathcal{S}_\alpha(a)$ et $\vartheta_a = \delta_1$.
- Si $Y \in \mathcal{S}_\alpha(a)$ est à valeurs réelles, resp. à valeurs positives, alors S_a est inclus dans $\{-1, 1\}$, resp. $\{1\}$.
- Soit $\alpha > 0$. On note $\mathcal{S}_\alpha(\infty)$ l'ensemble des v.a. Y vérifiant (6) avec $a = +\infty$.
- Soit Y une v.a. sous-gaussienne, c'est-à-dire il existe $\sigma^2 > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}(e^{\lambda Y}) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right)$. Alors, par l'inégalité de Chernoff, on obtient facilement que pour tout $\alpha \in]0, 2[$, $Y \in \mathcal{S}_\alpha(\infty)$.
- Si $Y \in \mathcal{S}_\alpha(a)$ pour $a > 0, \alpha > 0$, alors pour tout $\beta \in]0, \alpha[$, $Y \in \mathcal{S}_\beta(\infty)$.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de l'article.

Théorème 2.2. *Soit X une matrice de Wigner. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0, 2[$ et $a, b \in]0, +\infty[$ tels que $X_{1,2} \in \mathcal{S}_\alpha(a)$ et $X_{1,1} \in \mathcal{S}_\alpha(b)$. Alors, la suite des mesures spectrales empiriques $\mu_{X/\sqrt{N}}$ satisfait le PGD de vitesse $N^{1+\alpha/2}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, gouverné par la bonne fonction de taux J définie par*

$$J(\mu) = \begin{cases} \Phi(\nu) & \text{s'il existe } \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \mu = \mu_{sc} \boxplus \nu \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

où $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ est la bonne fonction de taux définie plus loin par (15) et \boxplus désigne la convolution libre (cf. définition B.6).

Dans la suite de cette partie, on détaille des points de la démonstration de ce théorème et on termine en énonçant quelques propriétés de la fonction de taux Φ .

La démonstration du théorème 2.2 se divise en deux grandes parties : une partie « matrices aléatoires » et une partie « graphes aléatoires » .

On considère dans toute la suite de cette partie que X est une matrice vérifiant les hypothèses du théorème 2.2. On note ϑ_a (resp. ϑ_b) la loi associée à $X_{1,2}$ (resp. $X_{1,1}$) et S_a (resp. S_b) son support, comme dans la définition 2.1.

On note par ailleurs

$$\varepsilon = \frac{1}{\ln N} \quad (9)$$

De plus, on décompose la matrice X en

$$\frac{X}{\sqrt{N}} = A + B + C + D$$

où A, B, C, D sont les matrices de terme général

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \mathbf{1}_{|X_{i,j}| < (\ln N)^{2/\alpha}} \frac{X_{i,j}}{\sqrt{N}} & B_{i,j} &= \mathbf{1}_{(\ln N)^{2/\alpha} \leq |X_{i,j}| \leq \varepsilon \sqrt{N}} \frac{X_{i,j}}{\sqrt{N}} \\ C_{i,j} &= \mathbf{1}_{\varepsilon \sqrt{N} < |X_{i,j}| \leq \varepsilon^{-1} \sqrt{N}} \frac{X_{i,j}}{\sqrt{N}} & D_{i,j} &= \mathbf{1}_{\varepsilon^{-1} \sqrt{N} < |X_{i,j}|} \frac{X_{i,j}}{\sqrt{N}} \end{aligned} \quad (10)$$

Même si la notation ne le rend pas explicite, il faut garder à l'esprit que X, A, B, C, D dépendent de N (on considère toujours des suites de matrices aléatoires).

2.1 Première partie de la démonstration

L'objectif de cette sous-partie est de justifier la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Les probabilités aléatoires $\mu_{X/\sqrt{N}}$ et $\mu_{sc} \boxplus \mu_C$ sont exponentiellement équivalentes, c'est-à-dire : pour tout $\delta > 0$, on a*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^{1+\alpha/2}} \ln \mathbb{P} \left(d(\mu_{X/\sqrt{N}}, \mu_{sc} \boxplus \mu_C) \geq \delta \right) = -\infty$$

où d est la distance sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par (25).

Pour commencer, on montre que la contribution de D dans (10) est négligeable.

Lemme 2.4. $\mu_{X/\sqrt{N}}$ et μ_{A+B+C} sont exponentiellement équivalentes.

La démonstration utilise l'inégalité du rang (27) et l'inégalité de Bennett (33) appliquée aux variables $\mathbf{1}_{|X_{i,j}| \geq \varepsilon^{-1}\sqrt{N}}$. C'est pour que l'application de cette inégalité donne le résultat escompté que le seuil $\varepsilon^{-1}\sqrt{N}$ a été choisi par les auteurs.

Ensuite, on montre que la contribution de B dans (10) est elle aussi négligeable.

Lemme 2.5. $\mu_{X/\sqrt{N}}$ et μ_{A+C} sont exponentiellement équivalentes.

La démonstration utilise cette fois l'inégalité de Hoffmann-Wielandt (29) et l'inégalité de Chernoff (32) appliquée aux variables $\frac{1}{N}|X_{i,j}|^2 \mathbf{1}_{(\ln N)^{2/\alpha} \leq |X_{i,j}| \leq \varepsilon\sqrt{N}}$. Les seuils $(\ln N)^{2/\alpha}$ et $\varepsilon\sqrt{N}$ apparaissent naturellement dans cette preuve, ce qui justifie la décomposition (10). En fait, le faible de nombre termes dans B et dans D prédomine sur leur poids élevé, ce qui explique que ces matrices ne contribuent pas.

Il reste donc à montrer que μ_{A+C} et $\mu_{sc} \boxplus \mu_C$ sont exponentiellement équivalentes, ce qui est la partie la plus délicate.

Pour cela, on montre d'abord un lemme dont la démonstration est similaire aux deux lemmes précédents.

Lemme 2.6. (i) Pour tout $s > 0$, on note $K_s = \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \int x^2 d\mu \leq s\}$. On a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^{1+\alpha/2}} \ln \mathbb{P}(\mu_C \notin K_{(\ln N)^2}) = -\infty$$

(ii) De plus, soit $I = \{(i, j) \mid |X_{i,j}| > (\ln N)^{2/\alpha}\}$. Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^{1+\alpha/2}} \ln \mathbb{P}(|I| \geq \delta N^{1+\alpha/2}) = -\infty$$

Le dernier outil dont on a besoin pour démontrer la proposition 2.3 est un résultat de liberté asymptotique uniforme. Il résulte du théorème suivant.

Théorème 2.7. Soit Y une matrice de Wigner vérifiant $\mathbb{E}|Y_{1,2}|^3 < +\infty$ et $\mathbb{E}|Y_{1,1}|^2 < +\infty$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout entier $N \geq 1$, toute matrice $M \in \mathcal{H}_N(\mathbb{C})$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im } z \geq 1$, on a :

$$|\bar{g}(z) - G_{\mu_M}(z - \bar{g}(z))| \leq c \frac{(\mathbb{E}|Y_{1,1}|^2)^{1/2} + \mathbb{E}|Y_{1,2}|^3}{N^{1/2}}$$

où on a noté $\bar{g}(z) = \mathbb{E} \left(G_{\mu_{Y/\sqrt{N}+M}}(z) \right)$.

Corollaire 2.8. Soit Y une matrice de Wigner vérifiant $\mathbb{E}|Y_{1,2}|^3 < +\infty$ et $\mathbb{E}|Y_{1,1}|^2 < +\infty$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout entier $N \geq 1$ et toute matrice $M \in \mathcal{H}_N(\mathbb{C})$, on a :

$$d\left(\mathbb{E}\mu_{Y/\sqrt{N+M}}, \mu_{sc} \boxplus \mu_M\right) \leq c \frac{(\mathbb{E}|Y_{1,1}|^2)^{1/2} + \mathbb{E}|Y_{1,2}|^3}{N^{1/2}}$$

Remarque. Dans le théorème 2.7 et le corollaire 2.8, la constante c ne dépend en fait que des lois de $Y_{1,1}$ et $Y_{1,2}$.

En utilisant les lemmes 2.5 et 2.6 le corollaire 2.8 et l'inégalité de concentration (34), il est alors possible de démontrer la proposition 2.3.

2.2 Seconde partie de la démonstration

Afin d'obtenir le PGD souhaité, on va considérer des graphes aléatoires. En effet, il y a des liens entre graphes aléatoires et matrices aléatoires. En effet, on peut associer un graphe à une matrice hermitienne. De plus, les notions de mesures spectrales sur les graphes aléatoires et sur les matrices aléatoires coïncident, ce qui explique la démarche adoptée par les auteurs.

Avant de démontrer un PGD pour des graphes aléatoires, on va préciser quels types de graphes on considère et surtout de quelles topologies et de quelles mesures on les munit.

2.2.1 Graphes pondérés et topologies

Définition 2.9. Un *graphe pondéré*, ou *réseau*, est un couple $G = (V, \omega)$ où V est un ensemble au plus dénombrable et ω est une application de V^2 dans \mathbb{C} . G est alors un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de V et les arcs sont les couples $(u, v) \in V^2$ tels que $\omega(u, v) \neq 0$.

Définitions 2.10. Soit $G = (V, \omega)$ un graphe pondéré.

- G est *hermitien* si $\forall u, v \in V, \omega(u, v) = \overline{\omega(v, u)}$. Dans ce cas, on voit G comme un graphe non orienté à arêtes simples.
- Soit un sommet $v \in V$. Le *degré* de v dans G est la quantité

$$\deg(v) = \sum_{u \in V} |\omega(v, u)|^2$$

- G est *localement fini* si pour tout sommet $v \in V, \deg(v) < +\infty$.

On considère maintenant que G est un graphe pondéré hermitien.

- Soient $u, v \in V$. Un *chemin* de u à v est une suite $\pi = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ avec $u_0 = u$, $u_k = v$ et $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $|\omega(u_{i-1}, u_i)| > 0$. On note $\pi : u \rightarrow v$.
- La *longueur* ℓ_2 d'un chemin $\pi = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ de u à v est

$$D_\pi(u, v) = \left(\sum_{i=1}^k |\omega(u_{i-1}, u_i)|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- On définit une distance D sur V par

$$D(u, v) = \inf_{\pi: u \rightarrow v} D_\pi(u, v)$$

- G est *connexe* si pour tous sommets distincts $u, v \in V$, $D(u, v) < +\infty$.

On note \mathcal{G} l'ensemble des graphes pondérés hermitiens et localement finis.

Exemple 2.11. Soit $H_n \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Le graphe pondéré défini par $V = \{1, \dots, n\}$ et $\forall i, j \in V$, $\omega(i, j) = H_n(i, j)$ est hermitien et localement fini (car fini). Il définit donc un élément de \mathcal{G} , qu'on notera encore H_n .

Définitions 2.12. – Un *graphe pondéré enraciné* est un couple (G, o) , où G est un graphe connexe de \mathcal{G} et o est un sommet de G . o est alors appelé la *racine* de G .

- Soient (G, o) un graphe pondéré enraciné et $t > 0$. Le *voisinage* de o de rayon t est le graphe pondéré enraciné constitué des sommets $u \in V$ tels que $D(o, u) \leq t$. On le note $(G, o)_t$.
- Deux graphes pondérés enracinés (G_1, o_1) , (G_2, o_2) sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\sigma : V_{G_1} \rightarrow V_{G_2}$ telle que $\sigma(o_1) = o_2$ et $\forall u, v \in V_{G_1}$, $\omega_{G_1}(u, v) = \omega_{G_2}(\sigma(u), \sigma(v))$.
- On définit une semi-distance d_{loc} sur l'ensemble des graphes pondérés enracinés par

$$d_{loc}((G_1, o_1), (G_2, o_2)) = \frac{1}{1 + T}$$

où T est la borne supérieure de l'ensemble \mathcal{T} des $t > 0$ pour lesquels il existe une bijection $\sigma : V_{(G_1, o_1)_t} \rightarrow V_{(G_2, o_2)_t}$ telle que $\sigma(o_1) = o_2$ et $\forall u, v \in V_{(G_1, o_1)_t}$, $|\omega_{G_1}(u, v) - \omega_{G_2}(\sigma(u), \sigma(v))| \leq \frac{1}{t}$.

Exemple 2.13. On considère les graphes pondérés enracinés (G_1, o_1) , (G_2, o_2) de la figure 1.

Pour ces deux graphes, on calcule facilement que $\mathcal{T} =]0, \frac{2}{3}] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{6/\sqrt{7}-2} \right]$,

donc $d_{loc}((G_1, o_1), (G_2, o_2)) = \frac{6-2\sqrt{7}}{6-\sqrt{7}}$.

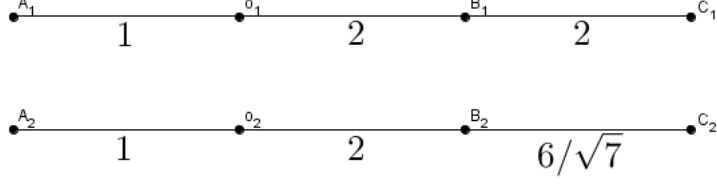


FIGURE 1 – Exemple 2.13

On note \mathcal{G}_* l'ensemble des classes d'équivalence de graphes pondérés enracinés pour la relation d'équivalence induite par la notion d'isomorphisme. d_{loc} est alors une distance sur \mathcal{G}_* .

Définitions 2.14. – La *topologie locale* est la topologie induite par d_{loc} .

On note $g_n \xrightarrow{\text{loc}} g$ lorsque $d_{\text{loc}}(g_n, g) \rightarrow 0$.

– La *topologie faible locale* est la topologie faible sur \mathcal{G}_* associée aux fonctions continues pour la topologie faible. On note $\rho_n \xrightarrow{\text{loc}} \rho$ si pour toute fonction f continue bornée sur $(\mathcal{G}_*, d_{\text{loc}})$, $\int f d\rho_n \rightarrow \int f d\rho$.

Définitions 2.15. Soit $G \in \mathcal{G}$ et soit $v \in V$. On note $G(v)$ la composante connexe de v dans G et $g(v)$ la classe d'équivalence du graphe pondéré enraciné $(G(v), v)$.

Lorsque G est fini, on définit un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{G}_*)$ par

$$U(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \delta_{g(v)} \quad (11)$$

$U(G)$ est en fait la loi de la classe de $(G(o), o)$ lorsque o suit la loi uniforme sur V .

Définitions 2.16. – Soit $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*)$. ρ est *sofique* s'il existe une suite

$(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de graphes pondérés hermitiens finis telle que $U(G_n) \xrightarrow{\text{loc}} \rho$.

– On note, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathcal{A}_n = \left\{ H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \mid \forall i < j, H_{i,j} = 0 \text{ ou } \frac{H_{i,j}}{|H_{i,j}|} \in S_a \quad \text{et} \quad \forall i, H_{i,i} = 0 \text{ ou } \frac{H_{i,i}}{|H_{i,i}|} \in S_b \right\}$$

Soit $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*)$. ρ est *sofique admissible* s'il existe une suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \in \mathcal{A}_n$ et $U(H_n) \xrightarrow{\text{loc}} \rho$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on dira simplement que ρ est sofique.

On note $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$ l'ensemble des $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*)$ soifiques admissibles.

Exemple 2.17. On note g_\emptyset la classe du graphe constitué d'un seul sommet et sans arête (poids nul). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n la matrice carrée nulle de taille n , alors $H_n \in \mathcal{A}_n$ et $U(H_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{g_\emptyset} = \delta_{g_\emptyset}$. Donc $U(H_n) \xrightarrow{\text{loc}} \delta_{g_\emptyset}$. La mesure de Dirac δ_{g_\emptyset} appartient donc à $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$.

Exemple 2.18. On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, g_x la classe du graphe constitué d'un seul sommet avec une boucle de poids x . Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que ν -p.s., $Y_1 = 0$ ou $\frac{Y_1}{|Y_1|} \in S_b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n la matrice diagonale de taille n telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $H_n(i, i) = Y_i$. Cela définit un élément de \mathcal{A}_n . Par la loi des grands nombres, quand $n \rightarrow +\infty$, $U(H_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{g_{Y_i}} \xrightarrow{\text{loc}} \int_{\mathbb{R}} \delta_{g_x} d\nu(x)$ p.s. La mesure $\int_{\mathbb{R}} \delta_{g_x} d\nu(x)$ est donc un élément de $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$.

Exemple 2.19. On note pour tout $z \in \mathbb{C}$, \hat{g}_z la classe du graphe enraciné constitué de deux sommets o et 1 tel que $\omega(o, 1) = z$, $\omega(1, o) = \bar{z}$ et $\omega(o, o) = \omega(1, 1) = 0$. Soit $(Z_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ telle que μ -p.s., $Z_1 = 0$ ou $\frac{Z_1}{|Z_1|} \in S_a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n la matrice diagonale par blocs de taille n , dont les $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ premiers blocs sont définis par : $\forall i \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$, $H_n(2i-1, 2i) = Z_{2i-1}$, $H_n(2i, 2i-1) = \overline{Z_{2i-1}}$ et $H_n(2i-1, 2i-1) = H_n(2i, 2i) = 0$, et l'éventuel bloc restant de taille 1 est nul. Cela définit un élément de \mathcal{A}_n et

$$U(H_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(\delta_{\hat{g}_{Z_{2i-1}}} + \delta_{\hat{g}_{\overline{Z_{2i-1}}}} \right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{(n-1)/2} \left(\delta_{\hat{g}_{Z_{2i-1}}} + \delta_{\hat{g}_{\overline{Z_{2i-1}}}} \right) + \delta_{g_\emptyset} \right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Par la loi des grands nombres, quand $n \rightarrow +\infty$, $U(H_n) \xrightarrow{\text{loc}} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} (\delta_{\hat{g}_z} + \delta_{\hat{g}_{\bar{z}}}) d\mu(z)$ p.s.

La mesure $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} (\delta_{\hat{g}_z} + \delta_{\hat{g}_{\bar{z}}}) d\mu(z)$ est donc dans $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$.

Exemple 2.20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_n \in \mathcal{A}_n$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on peut considérer la division euclidienne $m = kn + r$ de m par n , on note alors A_m la matrice diagonale par blocs de taille m , dont les k premiers blocs sont égaux à H_n et le bloc restant de taille r est nul. Alors $A_m \in \mathcal{A}_m$ et $U(A_m) = \frac{1}{m} (nkU(H_n) + r\delta_{g_\emptyset})$. Donc, quand $m \rightarrow +\infty$, $U(A_m) \xrightarrow{\text{loc}} U(H_n)$. Ainsi, $U(H_n)$ appartient à $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$.

La topologie faible locale ne convient pas car on veut que $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$ soit compact. On introduit donc une autre topologie, la topologie faible projective, qui convient. Pour cela, commençons par définir des troncatures.

Pour tout $\theta \in]0, 1[$, on note

$$\mathcal{G}^\theta = \{G \in \mathcal{G} \mid \forall u, v \in V, \deg(v) \leq \theta^{-2} \text{ et } |\omega(u, v)| \geq \theta \mathbf{1}_{\omega(u, v) \neq 0}\}$$

Par définition, tout $G \in \mathcal{G}^\theta$ est localement fini. De plus, de chaque sommet de G sont issues au plus θ^{-4} arêtes et chaque arête de G a un poids inférieur à θ^{-1} en module.

On note comme précédemment \mathcal{G}_*^θ l'ensemble des classes d'équivalence de graphes enracinés de \mathcal{G}^θ isomorphes. $\mathcal{P}(\mathcal{G}_*^\theta)$ est l'ensemble des $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*)$ dont le support est inclus dans \mathcal{G}_*^θ . On note enfin $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*^\theta) = \mathcal{P}(\mathcal{G}_*^\theta) \cap \mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$.

Les deux lemmes suivants sont des propriétés importantes des ensembles \mathcal{G}^θ .

Lemme 2.21. *Soient $\theta \in]0, 1[$ et $\delta > 0$. Il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ et tous graphes $G \in \mathcal{G}$, $H \in \mathcal{G}^\theta$ dont l'ensemble des sommets commun est $V = \{1, \dots, n\}$ et vérifiant*

$$\max_{u, v \in V} |\omega_G(u, v) - \omega_H(u, v)| \leq \gamma,$$

on a

$$\max_{u \in V} d_{\text{loc}}((G(u), u), (H(u), u)) \leq \delta.$$

Démonstration. Soient $n \geq 1$, $G \in \mathcal{G}$, $H \in \mathcal{G}^\theta$ tels que G et H ont le même ensemble de sommets $V = \{1, \dots, n\}$.

Soient $u \in V$ et $t = \frac{2}{\delta}$. Une arête de H a un poids inférieur à θ^{-1} en module, donc un chemin de longueur ℓ_2 inférieure à t est par définition constitué d'au plus t^2/θ^2 arêtes. De plus, de chaque sommet de H sont issues au plus θ^{-4} arêtes, donc le voisinage $(H, u)_t$ contient au plus $m = \theta^{-4t^2/\theta^2}$ sommets. Il existe donc $t_0 \in]\frac{t}{2}, t[$ tel que pour tout $s \in [t_0 - \frac{t}{8m}, t_0 + \frac{t}{8m}]$, il n'y ait aucun sommet à distance s de u dans H .

Soit $\gamma = \min\left(\frac{1}{t}, \frac{\theta^3}{16m}\right) = \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{16}\theta^{3+16/\delta^2\theta^2}\right)$. On suppose que

$$\max_{u, v \in V} |\omega_G(u, v) - \omega_H(u, v)| \leq \gamma$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $(u, v) \in V^2$,

$$||\omega_G(u, v)| - |\omega_H(u, v)|| \leq \gamma$$

et

$$|\omega_G(u, v)| \geq |\omega_H(u, v)| - \gamma \geq \theta - \gamma$$

Soient e_1, \dots, e_k les arêtes d'un chemin dans H . On a, d'après l'inégalité (35) et les deux inégalités ci-dessus :

$$\begin{aligned} \left[\left(\sum_{i=1}^k |\omega_H(e_i)|^{-2} \right)^{1/2} - \left(\sum_{i=1}^k |\omega_G(e_i)|^{-2} \right)^{1/2} \right]^2 &\leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{|\omega_H(e_i)|} - \frac{1}{|\omega_G(e_i)|} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{|\omega_G(e_i)| - |\omega_H(e_i)|}{|\omega_G(e_i)| |\omega_H(e_i)|} \right)^2 \\ &\leq k \left(\frac{\gamma}{\theta(\theta - \gamma)} \right)^2 \end{aligned}$$

Puisque $\gamma \leq \frac{\theta^3}{16m}$, on a aussi $\gamma \leq \frac{\theta}{2}$ (car $\theta < 1$), et puisque $k \leq \frac{t^2}{\theta^2}$, on obtient

$$\left[\left(\sum_{i=1}^k |\omega_H(e_i)|^{-2} \right)^{1/2} - \left(\sum_{i=1}^k |\omega_G(e_i)|^{-2} \right)^{1/2} \right]^2 \leq \frac{t^2}{\theta^2} \left(\frac{\theta^3/16m}{\theta^2/2} \right)^2 = \left(\frac{t}{8m} \right)^2$$

On déduit de ce qu'on a montré que les ensembles de points à distance au plus t_0 de u dans G et dans H sont les mêmes. On obtient donc une bijection $\sigma : V_{(G(u), u)_{t_0}} \rightarrow V_{(H(u), u)_{t_0}}$ telle que $\sigma(u) = u$ et $|\omega_G - \omega_H \circ \sigma| \leq \gamma \leq \frac{1}{t} < \frac{1}{t_0}$. Par définition, on a donc :

$$d_{\text{loc}}((G(u), u), (H(u), u)) \leq \frac{1}{1+t_0} < \frac{1}{t/2} = \delta$$

□

Lemme 2.22. (i) Pour tout θ , \mathcal{G}_*^θ est compact pour la topologie locale.
(ii) $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$ est fermé pour la topologie faible locale.

Démonstration. On va démontrer le point (i).

Puisque $(\mathcal{G}_*, d_{\text{loc}})$ est un espace métrique complet, il suffit de montrer que \mathcal{G}_*^θ est fermé et précompact.

Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{G}_*^θ convergeant vers $g \in \mathcal{G}_*$ pour la distance d_{loc} . On note $(G_n, o_n), (G, o)$ des représentants de g_n, g resp. et $G_n = (V_n, \omega_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note t_n le réel tel que

$$d_{\text{loc}}((G_n, o_n), (G, o)) = \frac{1}{1+t_n}$$

La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite égale à $+\infty$, il existe donc un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $t_n > 1$. Par définition de la distance d_{loc} , pour tout

$n \geq n_0$, il existe $t'_n \in]t_n - 1, t_n[$ et une bijection $\sigma_n : V_{(G,o)_{t'_n}} \rightarrow V_{(G_n,o_n)_{t'_n}}$ vérifiant $\sigma_n(o) = o_n$ et $|\omega_G - \omega_n \circ \sigma_n| \leq \frac{1}{t'_n} \leq \frac{1}{t_n - 1}$.

Soit $(u, v) \in V_G^2$. Il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, u et v appartiennent au voisinage $V_{(G,o)_{t'_n}}$. Dans le cas où $|\omega_G(u, v)| \neq 0$, on a aussi pour tout $n \geq n_1$, $|\omega_n(\sigma_n(u), \sigma_n(v))| \neq 0$, donc

$$|\omega_G(u, v)| \geq |\omega_n(\sigma_n(u), \sigma_n(v))| - \frac{1}{t_n - 1} \geq \theta - \frac{1}{t_n - 1}$$

En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, on obtient donc $|\omega_G(u, v)| \geq \theta$ dans ce cas.

Ensuite, soit $u \in V_G$. Comme u a au plus θ^{-4} voisins dans G , il existe $n_2 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_2$, u et tous ses voisins appartiennent au voisinage $V_{(G,o)_{t'_n}}$. Alors,

$$\begin{aligned} \deg_G(u, v) &= \sum_{v \in V_G \text{ voisin de } u} |\omega_G(u, v)|^2 \\ &\leq \sum_{v \in V_{(G_n,o_n)_{t'_n}} \text{ voisin de } \sigma_n(u)} \left(|\omega_n(\sigma_n(u), \sigma_n(v))| + \frac{1}{t_n - 1} \right)^2 \\ &\leq \sum_{v \in V_n \text{ voisin de } \sigma_n(u)} \left(|\omega_n(\sigma_n(u), \sigma_n(v))|^2 + \frac{2\theta^{-1}}{t_n - 1} + \frac{1}{(t_n - 1)^2} \right) \\ &\leq \deg_{G_n}(\sigma_n(u)) + \theta^{-4} \left(\frac{2\theta^{-1}}{t_n - 1} + \frac{1}{(t_n - 1)^2} \right) \\ &\leq \theta^{-2} + \theta^{-4} \left(\frac{2\theta^{-1}}{t_n - 1} + \frac{1}{(t_n - 1)^2} \right) \end{aligned}$$

donc, en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, $\deg_G(u) \leq \theta^{-2}$.

Finalement, $G \in \mathcal{G}^\theta$ donc $g \in \mathcal{G}_*^\theta$. \mathcal{G}_*^θ est donc fermé pour la topologie locale.

Soit maintenant $\delta > 0$ et soit $g \in \mathcal{G}_*^\theta$. On note $t = \frac{2}{\delta}$ et (G, o) un représentant de g . On a déjà $d_{\text{loc}}((G, o), (G, o)_t) \leq \frac{1}{1+t} < \frac{\delta}{2}$.

D'après un argument vu dans la démonstration du lemme précédent, puisque G est dans \mathcal{G}^θ , $(G, o)_t$ contient au plus $m = \theta^{-4t^2/\theta^2}$ sommets. Par ailleurs, \mathbb{C} étant précompact, on peut considérer une partie finie W de \mathbb{C} telle que

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \theta \leq |z| \leq \theta^{-1}\} \subset \bigcup_{w \in W} B_{\mathbb{C}}\left(w, \frac{1}{t}\right)$$

et

$$[-\theta^{-1}, -\theta] \cup [\theta, \theta^{-1}] \subset \bigcup_{w \in W \cap \mathbb{R}} \left[w - \frac{1}{t}, w + \frac{1}{t} \right]$$

On note alors \mathcal{A} l'ensemble des graphes pondérés enracinés $(H, 1) \in \mathcal{G}^\theta$ tels que

$$\begin{cases} (H, 1) = (H, 1)_t \\ \exists k \in \llbracket 1, m \rrbracket, V_H = \{1, \dots, k\} \\ \forall 1 \leq i \leq j \leq k, \omega_H(i, j) \in W \end{cases}$$

Par construction, \mathcal{A} ne dépend que de δ et de θ , \mathcal{A} est fini et il existe $(H, 1) \in \mathcal{A}$ (qu'on peut choisir explicitement) tel que $d_{\text{loc}}((G, o)_t, (H, 1)) \leq \frac{1}{1+t} < \frac{\delta}{2}$. On a alors $d_{\text{loc}}((G, o), (H, 1)) < \delta$. La réunion des boules de centre dans \mathcal{A} et de rayon δ pour la distance d_{loc} est donc un recouvrement de \mathcal{G}_*^θ , et donc \mathcal{G}_*^θ est précompact pour la distance d_{loc} .

En conclusion, \mathcal{G}_*^θ est fermé et précompact donc compact pour la topologie locale. \square

Remarque. À partir d'un graphe de \mathcal{G} , on peut obtenir de manière canonique un graphe de \mathcal{G}^θ par une méthode de troncature. Soient les fonctions continues

$$\chi_\theta : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \theta[\\ \frac{x-\theta}{\theta} & \text{si } x \in [\theta, 2\theta[\\ 1 & \text{si } x \geq 2\theta \end{cases} \quad \tilde{\chi}_\theta : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \theta^{-2} - 1[\\ \theta^{-2} - x & \text{si } x \in [\theta^{-2} - 1, \theta^{-2}[\\ 0 & \text{si } x \geq \theta^{-2} \end{cases}$$

Soit $G = (V, \omega)$. On définit pour tous $u, v \in V$,

$$\tilde{\omega}_\theta(u, v) = \omega(u, v) \tilde{\chi}_\theta(\deg(u) \vee \deg(v))$$

puis

$$\omega_\theta(u, v) = \tilde{\omega}_\theta(u, v) \chi_\theta(|\tilde{\omega}_\theta(u, v)|) \quad (12)$$

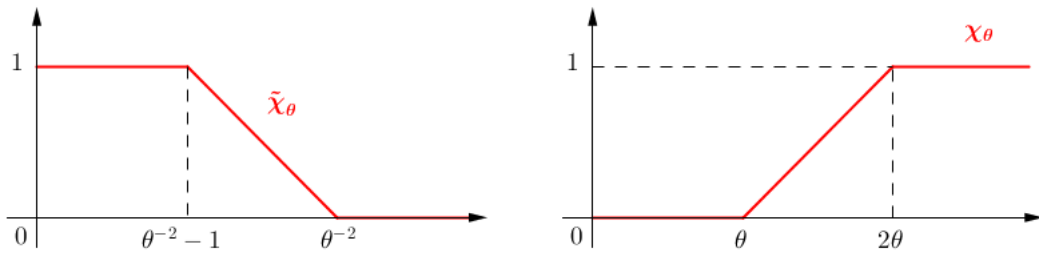


FIGURE 2 – Graphes de χ_θ et $\tilde{\chi}_\theta$

Par construction, $G_\theta = (V, \omega_\theta)$ est dans \mathcal{G}^θ . De plus, on a clairement $|\omega_\theta| \leq |\omega|$, et donc aussi $\deg_{G_\theta} \leq \deg_G$.

Soit maintenant $g \in \mathcal{G}_*$. Si (G, o) est un représentant de g , la classe de $(G_\theta(o), o)$ définit un élément g_θ de \mathcal{G}_*^θ , indépendant du représentant (G, o) . Soit $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*)$. Si g suit la loi ρ , la loi de g_θ définit un élément ρ_θ de $\mathcal{P}(\mathcal{G}_*^\theta)$. On utilisera ces notations dans la suite.

Exemple 2.23. On reprend les graphes $(G_1, o_1), (G_2, o_2)$ de l'exemple 2.13 et on compare $(G_1)_\theta$ et $(G_2)_\theta$ pour différentes valeurs de θ (cf. figure 3). Remarquons qu'on a $d_{\text{loc}}((g_1)_{1/2}, (g_2)_{1/2}) = \frac{6-2\sqrt{7}}{6-\sqrt{7}} \approx 0,21$ et $d_{\text{loc}}((g_1)_{1/3}, (g_2)_{1/3}) = \frac{2}{3}$.

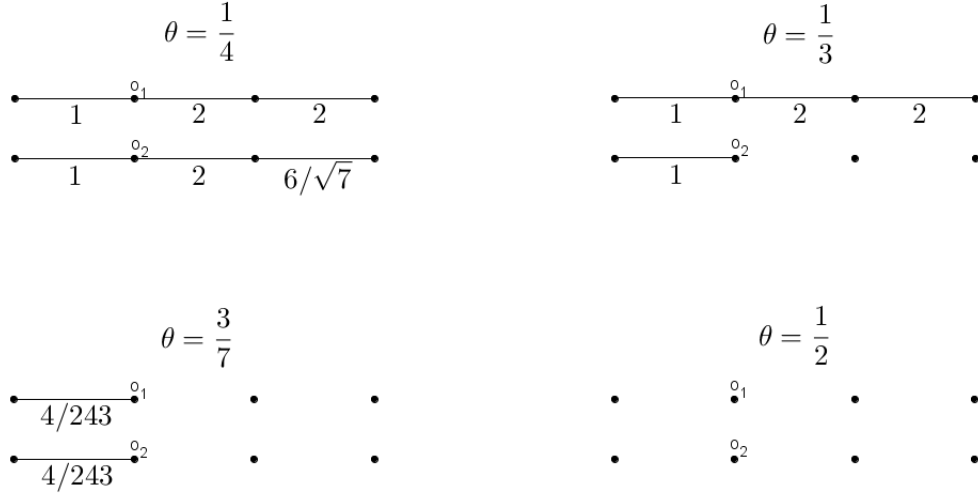


FIGURE 3 – Exemple 2.23

Les deux lemmes suivants montrent qu'il est en fait suffisant de s'intéresser aux graphes tronqués.

Lemme 2.24. (i) Pour tout θ , l'application $\begin{matrix} \mathcal{G}_* & \rightarrow & \mathcal{G}_*^\theta \\ g & \mapsto & g_\theta \end{matrix}$ est continue pour la topologie locale.

(ii) Pour tout θ , l'application $\begin{matrix} \mathcal{P}(\mathcal{G}_*) & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{G}_*^\theta) \\ g & \mapsto & g_\theta \end{matrix}$ est continue pour la topologie faible locale.

(iii) Pour tout $g \in \mathcal{G}_*$, $g_\theta \xrightarrow{\text{loc}} g$ quand $\theta \rightarrow 0$.

(iv) Pour tout $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*)$, $\rho_\theta \xrightarrow{\text{loc}} \rho$ quand $\theta \rightarrow 0$.

Pour tout entier $j \geq 1$, on note $\theta_j = 2^{-j}$ et $p_j : \begin{matrix} \mathcal{G}_* & \rightarrow & \mathcal{G}_*^{\theta_j} \\ g & \mapsto & g_{\theta_j} \end{matrix}$ et pour

tous entiers $j \geq i \geq 1$, on note $p_{i,j} : \begin{array}{c} \mathcal{G}_*^{\theta_j} \rightarrow \mathcal{G}_*^{\theta_i} \\ g \mapsto g_{\theta_i} \end{array}$. Ces applications sont bien définies et la famille $(p_{i,j})_{j \geq i \geq 1}$ forme un système projectif. On note alors

$$\tilde{\mathcal{G}}_* = \left\{ y \in \prod_{j \geq 1} \mathcal{G}_*^{\theta_j} \mid \forall j \geq i \geq 1, p_{i,j}(y_j) = y_i \right\}$$

Lemme 2.25. *L'application $\iota : \begin{array}{c} \mathcal{G}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_* \\ g \mapsto (p_j(g))_{j \geq 1} \end{array}$ est bijective.*

On peut donc identifier \mathcal{G}_* et $\tilde{\mathcal{G}}_*$, ce qu'on fera dans la suite en utilisant la même notation pour ces deux ensembles.

Définitions 2.26. – La *topologie projective* est la topologie induite par la distance d_{proj} , définie sur \mathcal{G}_* par

$$d_{\text{proj}}(g, g') = \sum_{j \geq 1} 2^{-j} d_{\text{loc}}(g_{\theta_j}, g'_{\theta_j}).$$

On note $g_n \xrightarrow{\text{proj}} g$ lorsque $d_{\text{proj}}(g_n, g) \rightarrow 0$.

– La *topologie faible projective* est la topologie faible sur \mathcal{G}_* associée aux fonctions continues pour la topologie projective. On note $\rho_n \xrightarrow{\text{proj}} \rho$ si pour toute fonction f continue bornée sur $(\mathcal{G}_*, d_{\text{proj}})$, $\int f d\rho_n \rightarrow \int f d\rho$.

On a alors $g_n \xrightarrow{\text{proj}} g$, resp. $\rho_n \xrightarrow{\text{proj}} \rho$, si et seulement si pour tout θ , $(g_n)_\theta \xrightarrow{\text{loc}} g_\theta$, resp. $(\rho_n)_\theta \xrightarrow{\text{loc}} \rho_\theta$.

Exemple 2.27. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le graphe enraciné (G_n, o) dont l'ensemble des sommets est $V_n = \{o, A_1, \dots, A_n\}$ et le poids ω_n est défini par : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\omega_n(o, A_i) = \omega_n(A_i, o) = 1$ et $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\omega_n(A_i, A_j) = 0$ (voir figure 4). On note g_n la classe de (G_n, o) . Soit $j \geq 1$. $(G_n)_{\theta_j}$ est le graphe G_n lorsque $n \leq 4^j - 1$, le graphe avec des poids tous nuls si $n \geq 4^j$, donc $d_{\text{loc}}((g_\emptyset)_{\theta_j}, (g_n)_{\theta_j})$ vaut $\frac{1}{2}$ si $j \geq \frac{\ln(n+1)}{\ln 4}$ et 0 sinon. Donc

$$d_{\text{proj}}(g_\emptyset, g_n) = \sum_{j \geq \frac{\ln(n+1)}{2 \ln 2}} 2^{-j} \frac{1}{2} = 2^{-\frac{\ln(n+1)}{2 \ln 2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarquons toutefois que $d_{\text{loc}}(g_\emptyset, g_n) = \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

Le lemme suivant est l'aboutissement de toutes ces constructions. Il sera utile pour démontrer le PGD du théorème 2.30.

Lemme 2.28. (i) \mathcal{G}_* est compact pour la topologie projective.
(ii) $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$ est compact pour la topologie faible projective.

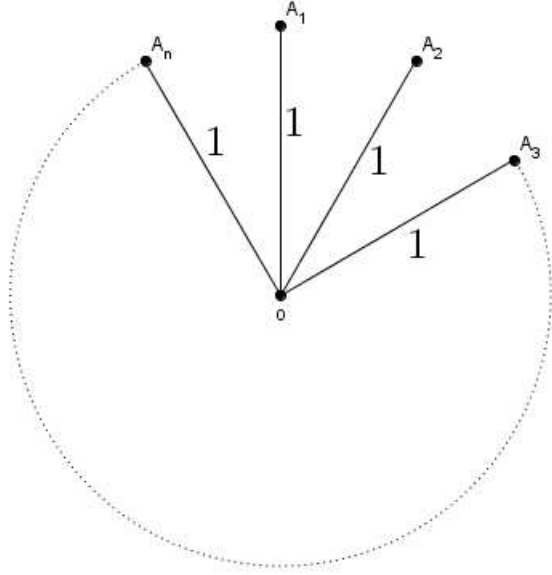


FIGURE 4 – Exemple 2.27

2.2.2 PGD pour des graphes aléatoires

On définit deux fonctions sur l'ensemble des graphes pondérés enracinés par

$$\psi(G, o) = |\omega(o, o)|^\alpha \quad \text{et} \quad \phi(G, o) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V \setminus \{o\}} |\omega(o, v)|^\alpha \quad (13)$$

ψ et ϕ sont clairement constantes sur les classes d'équivalence, donc peuvent être considérées comme des fonctions sur \mathcal{G}_* .

Lemme 2.29. *ψ et ϕ sont deux fonctions s.c.i. sur $(\mathcal{G}_*, d_{\text{proj}})$.*

Pour $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*)$, on note \mathbb{E}_ρ l'espérance sous la loi ρ .

On va maintenant pouvoir énoncer le point clé de [7].

On reprend la matrice C définie en (10), c'est-à-dire la matrice de terme général

$$C_{i,j} = \mathbf{1}_{\varepsilon\sqrt{N} < |X_{i,j}| \leq \varepsilon^{-1}\sqrt{N}} \frac{X_{i,j}}{\sqrt{N}}$$

et on note G_N le graphe associé à C comme décrit dans l'exemple 2.11, c'est-à-dire le graphe dont les sommets sont $1, \dots, N$ et dont les poids sont donnés par $\omega(i, j) = C_{i,j}$.

Remarque. D'après le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement, quand $N \rightarrow +\infty$, $U(G_N) \xrightarrow{\text{loc}} g_\emptyset$. Cela est dû au fait que, comme pour B et D dans les lemmes 2.4 et 2.5, le très faible nombre de termes dans C compense largement la grandeur de ceux-ci. Le théorème suivant permet de préciser la vitesse de convergence.

Théorème 2.30. $(U(G_N))_{N \geq 1}$ satisfait le PGD sur $\mathcal{P}(\mathcal{G}_*)$ de vitesse $N^{1+\alpha/2}$, dans la topologie faible projective, gouverné par la bonne fonction de taux

$$I : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathcal{G}_*) & \rightarrow & [0, +\infty] \\ \rho & \mapsto & \begin{cases} b \mathbb{E}_\rho \psi + a \mathbb{E}_\rho \phi & \text{si } \rho \in \mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \quad (14)$$

où ψ et ϕ sont les fonctions définies sur \mathcal{G}_* par (13).

La démonstration de la borne supérieure de grandes déviations est semblable à celle du lemme 2.5. La démonstration de la borne inférieure repose elle sur le lemme 2.21.

2.2.3 PGD pour la mesure spectrale empirique μ_C

On va maintenant définir la notion de mesure spectrale afin d'obtenir un PGD sur μ_C , ce qui permet d'achever la démonstration du théorème 2.2. On va d'abord définir cette notion en un sommet d'un graphe tronqué, avant de l'étendre progressivement jusqu'à $\mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*)$.

Soit $\theta \in]0, 1[$.

Soit $G \in \mathcal{G}^\theta$. On note $(e_v)_{v \in V}$ la base orthonormée canonique de l'espace de Hilbert $\ell^2(V)$. On définit un opérateur linéaire borné auto-adjoint sur $\ell^2(V)$ par

$$\forall v \in V, T e_v = \sum_{u \in V} \omega(u, v) e_u$$

Pour tout $v \in V$, il existe alors une unique probabilité sur \mathbb{R} , notée μ_T^v et appelée mesure spectrale au vecteur e_v , telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int x^k d\mu_T^v = \langle e_v, T^k e_v \rangle$.

Soit (G, o) un graphe pondéré enraciné tel que $G \in \mathcal{G}^\theta$. La mesure μ_T^o est constante sur la classe d'équivalence de (G, o) donc on peut voir μ_T^o comme une application de \mathcal{G}_*^θ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Pour tout $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*^\theta)$, on peut alors définir la mesure spectrale de ρ par : $\mu_\rho = \mathbb{E}_\rho \mu_T^o$.

Pour tout $\beta > 0$,

$$\xi_\beta : (G, o) \mapsto \sum_{v \in V} |\omega(o, v)|^\beta$$

est constante sur les classes d'équivalence de graphes pondérés enracinés (G, o) , donc peut être vue comme une application de \mathcal{G}_* dans \mathbb{R} . Remarquons que $\xi_\alpha = \psi + 2\phi$.

On note, pour tous $\beta > 0$ et $\tau > 0$,

$$\mathcal{P}_{s,\beta,\tau}(\mathcal{G}_*) = \{\rho \in \mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*) \mid \mathbb{E}_\rho \xi_\beta < \tau\}$$

Définition 2.31. Soient $\beta \in]0, 2[$, $\tau > 0$ et $\rho \in \mathcal{P}_{s,\beta,\tau}(\mathcal{G}_*)$. La limite faible $\mu_\rho = \lim_{\theta \rightarrow 0} \mu_{\rho_\theta}$ existe dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, on l'appelle *mesure spectrale* de ρ .

Lemme 2.32. Soient $\beta \in]0, 2[$, $\tau > 0$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{s,\beta,\tau}(\mathcal{G}_*) & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ \rho & \mapsto & \mu_\rho \end{array}$ est continue pour la topologie faible projective.

Avant d'énoncer le résultat attendu, on prolonge la notion de mesure spectrale à toute mesure sofique admissible. En effet, on l'a seulement défini sur $\bigcup_{0 < \beta < 2} \bigcup_{\tau > 0} \mathcal{P}_{s,\beta,\tau}(\mathcal{G}_*)$. Pour $\rho \in \mathcal{P}_s(\mathcal{G}_*) \setminus \left(\bigcup_{0 < \beta < 2} \bigcup_{\tau > 0} \mathcal{P}_{s,\beta,\tau}(\mathcal{G}_*) \right)$, on définit simplement la mesure spectrale de ρ par $\mu_\rho = \delta_0$. On peut maintenant énoncer le théorème attendu.

Théorème 2.33. $(\mu_C)_{N \geq 1}$ satisfait le PGD sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de vitesse $N^{1+\alpha/2}$, dans la topologie faible, gouverné par la bonne fonction de taux

$$\Phi : \nu \mapsto \inf\{I(\rho) \mid \mu_\rho = \nu\} \quad (15)$$

où I est la bonne fonction de taux définie par (14).

Le point clé de la démonstration de ce théorème est le lemme 2.32, puisqu'il suffit ensuite simplement d'appliquer le principe de contraction.

Le théorème 2.2 est alors démontré en regroupant la proposition 2.3 et le théorème 2.33 et en utilisant les arguments classiques de grandes déviations.

2.3 Propriétés de la fonction de taux

La fonction de taux J est difficile à comprendre car son expression n'est pas très explicite. Il est toutefois possible d'obtenir une expression simple à l'aide du α -ième moment dans certains cas.

Définition 2.34. Soient $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $p > 0$. Le p -ième moment de ν est

$$m_p(\nu) = \int_{\mathbb{R}} |x|^p d\nu(x)$$

Les deux lemmes suivants permettront d'expliciter J dans certains cas comme on le souhaite. La démonstration du premier repose sur l'inégalité de Schatten (31) et sur l'inégalité $\deg_G(o)^{\beta/2} \leq \xi_\beta(G, o)$. Le second provient d'un passage à la limite, car les ρ_θ vérifient l'égalité (17).

Lemme 2.35. *Soient $\beta \in]0, 2[$, $\tau > 0$ et $\rho \in \mathcal{P}_{s,\beta,\tau}(\mathcal{G}_*)$. On a :*

$$m_\beta(\mu_\rho) \leq \mathbb{E}_\rho \xi_\beta \quad (16)$$

Lemme 2.36. *Soient $\beta \in]1, 2[$, $\tau > 0$ et $\rho \in \mathcal{P}_{s,\beta,\tau}(\mathcal{G}_*)$. On a :*

$$\int x d\mu_\rho(x) = \mathbb{E}_\rho \omega(o, o) \quad (17)$$

On obtient finalement le théorème suivant.

Théorème 2.37. *Soit $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

- (i) *On a $\Phi(\nu) \geq (\frac{\alpha}{2} \wedge b) m_\alpha(\nu)$.*
- (ii) *Si $S_b = \{-1, 1\}$, alors $\Phi(\nu) \leq b m_\alpha(\nu)$.*
- (iii) *Si $S_b = \{-1, 1\}$ et ν est symétrique, alors $\Phi(\nu) = (\frac{\alpha}{2} \wedge b) m_\alpha(\nu)$.*
- (iv) *Si $S_b = \{1\}$ et $\text{supp}(\nu) \subset \mathbb{R}_+$, alors $\Phi(\nu) \leq b m_\alpha(\nu)$.*
- (v) *Si $S_b = \{1\}$, $\alpha \in]1, 2[$ et ν est symétrique, alors $\Phi(\nu) = \frac{\alpha}{2} m_\alpha(\nu)$.*
- (vi) *Si $S_b = \{1\}$, $\alpha \in]1, 2[$ et $\int x d\nu(x) < 0$, alors $\Phi(\nu) = +\infty$.*

3 Extension du résultat aux matrices de covariance

3.1 Matrices de Wigner et matrices de covariance

Les matrices de covariance sont, avec les matrices de Wigner, les plus étudiées dans la théorie des matrices aléatoires. En effet, les matrices de covariance et les matrices de Wigner ont été introduites dans leurs travaux par le statisticien Wishart et le physicien Wigner respectivement, et c'est essentiellement pour ces applications qu'est née la théorie des matrices aléatoires.

On a présenté dans la section 1.2 les outils fondamentaux pour l'étude des matrices de Wigner, on va ici faire de même pour les matrices de covariance.

Définition 3.1. Une matrice $Y_{n,p}$ est de covariance, ou de covariance empirique, s'il existe $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ telle que :

- $Y_{n,p} = X_{n,p}X_{n,p}^*$
- $X_{n,p}$ est de taille $n \times p$
- les v.a. $(X_{n,p})_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, sont i.i.d. de loi μ
- μ est de variance 1.

Le premier résultat fondamental concernant les matrices de covariance est le théorème de Marcenko-Pastur, sorte d'extension du théorème de Wigner aux matrices de covariance. Dans ce cas, la loi semi-circulaire est remplacée par une loi de Marcenko-Pastur, dont le paramètre est lié aux dimensions de la matrice $X_{n,p}$.

Définition 3.2. Soit $c > 0$. La loi de Marcenko-Pastur de paramètre c , notée $\mu_{MP,c}$, est la loi

$$\max\left(1 - \frac{1}{c}, 0\right) \delta_0 + \frac{\sqrt{(b_c - x)(x - a_c)}}{2\pi xc} \mathbf{1}_{[a_c, b_c]}(x) dx$$

où $a_c = (1 - \sqrt{c})^2$ et $b_c = (1 + \sqrt{c})^2$.

Remarques. – On définit également $\mu_{MP,0} = \delta_1$.
 – Si X suit la loi μ_{sc} , alors X^2 suit la loi $\mu_{MP,1}$. Avec les notations de l'annexe B, on peut donc écrire $\sqrt{\mu_{MP,1}^s} = \mu_{sc}$.

Théorème 3.3 (Marcenko-Pastur, voir [3, Théorème 3.7]). *Soit $Y_{n,p}$ une matrice de covariance. Si $\frac{n}{p}$ tend vers $c \in]0, +\infty[$ quand $n \rightarrow +\infty$, alors, presque sûrement, quand $n \rightarrow +\infty$, $\mu_{Y_{n,p}/n} \rightsquigarrow \mu_{MP,c}$.*

3.2 Problématique

Dans la théorie des matrices aléatoires, de nombreux résultats ont été démontrés pour les modèles du GOE et du GUE, moins compliqués à étudier. Les mathématiciens ont ensuite cherché à généraliser certains de ces résultats aux matrices de Wigner générales, puis ensuite aux matrices de covariance.

Dans cette logique, le principe de grandes déviations obtenu par Bordeave et Caputo est une généralisation partielle de celui obtenu par Ben Arous et Guionnet. Il est donc naturel de s'interroger ensuite sur son extension aux matrices de covariance.

Mes travaux de recherche avaient pour but d'adapter le théorème 2.2 pour les matrices de covariance. Toutefois, cela est assez long car de nombreux outils entrent en jeu. Je n'ai donc eu le temps de travailler que sur l'adaptation de la première partie de la démonstration du théorème 2.2. De plus, il reste des questions en suspens et des détails à vérifier, c'est pourquoi certains énoncés ci-dessous ne sont pour le moment que des conjectures. La section 3.5 constituera un bilan du travail restant à effectuer.

Dans la suite de cette partie, on considère que XX^* est une matrice de covariance avec X de taille $n \times p$ et on suppose qu'il existe $\alpha \in]0, 2[$ et $a \in]0, +\infty]$ tels que $X_{1,1} \in \mathcal{S}_\alpha(a)$. L'objectif est d'adapter la proposition 2.3, c'est-à-dire obtenir une équivalence exponentielle pour $\mu_{XX^*/n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $\frac{n}{p} \rightarrow c$, où $c \in]0, +\infty[$.

Pour cela, on va adopter les mêmes notations que précédemment (voir (9) et (10)) : on note

$$\varepsilon = \frac{1}{\ln n}$$

et on décompose la matrice X en

$$\frac{X}{\sqrt{n}} = A + B + C + D$$

où A, B, C, D sont les matrices de terme général

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \mathbf{1}_{|X_{i,j}| < (\ln n)^{2/\alpha}} \frac{X_{i,j}}{\sqrt{n}} & B_{i,j} &= \mathbf{1}_{(\ln n)^{2/\alpha} \leq |X_{i,j}| \leq \varepsilon \sqrt{n}} \frac{X_{i,j}}{\sqrt{n}} \\ C_{i,j} &= \mathbf{1}_{\varepsilon \sqrt{n} < |X_{i,j}| \leq \varepsilon^{-1} \sqrt{n}} \frac{X_{i,j}}{\sqrt{n}} & D_{i,j} &= \mathbf{1}_{\varepsilon^{-1} \sqrt{n} < |X_{i,j}|} \frac{X_{i,j}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

3.3 Équivalence exponentielle

On peut tout d'abord facilement adapter les lemmes 2.4 et 2.5 : à nouveau, les contributions de B et de D sont négligeables.

Lemme 3.4. $\mu_{XX^*/n}$ et $\mu_{(A+B+C)(A+B+C)^*}$ sont exponentiellement équivalentes.

Démonstration. La preuve est la même que celle proposée par [7], l'inégalité du rang (27) étant remplacée par l'inégalité du rang pour les matrices de covariance (28). \square

Lemme 3.5. $\mu_{XX^*/n}$ et $\mu_{(A+C)(A+C)^*}$ sont exponentiellement équivalentes.

Démonstration. De manière analogue à la preuve de [7], d'après le lemme 3.4, l'inégalité triangulaire, l'inégalité $W_1 \leq W_2$ et l'inégalité (30), il suffit de montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha/2}} \ln \mathbb{P} \left(\frac{2}{n^2} \text{Tr}((A+B+C)(A+B+C)^* + (A+C)(A+C)^*) \text{Tr}(BB^*) \geq \delta \right) = -\infty$$

Soit $\delta > 0$. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on a

$$\text{Tr}(MM^*) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq p} |M_{i,j}|^2$$

donc $\text{Tr}((A+C)(A+C)^*) \leq \text{Tr}((A+B+C)(A+B+C)^*) \leq \text{Tr}(\frac{1}{n}XX^*)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\frac{2}{n^2} \text{Tr}((A+B+C)(A+B+C)^* + (A+C)(A+C)^*) \text{Tr}(BB^*) \geq \delta \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\frac{4}{n^3} \text{Tr}(XX^*) \text{Tr}(BB^*) \geq \delta \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\frac{1}{np} \text{Tr}(XX^*) \geq 1 + \delta \right) + \mathbb{P} \left(\frac{4p}{n^2} \text{Tr}(BB^*) \geq \frac{\delta}{1 + \delta} \right) \end{aligned}$$

D'une part, comme $\text{Tr}(XX^*) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq p} |X_{i,j}|^2$, d'après le théorème de Cramér dans \mathbb{R} (théorème 1.1), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{np} \ln \mathbb{P} \left(\frac{1}{np} \text{Tr}(XX^*) \geq 1 + \delta \right) < 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha/2}} \ln \mathbb{P} \left(\frac{1}{np} \text{Tr}(XX^*) \geq 1 + \delta \right) = -\infty \quad (18)$$

D'autre part, puisque $\frac{n}{p} \rightarrow c$, la même preuve que [7] montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha/2}} \ln \mathbb{P} \left(\frac{4p}{n^2} \text{Tr}(BB^*) \geq \frac{\delta}{1+\delta} \right) = -\infty \quad (19)$$

Finalement, d'après les relations (18) et (19) et le lemme 1.10, on obtient que $\mu_{XX^*/n}$ et $\mu_{(A+C)(A+C)^*}$ sont exponentiellement équivalentes. \square

3.4 Adaptation du théorème 2.7

Comme dans le théorème 2.7, la preuve est constituée de deux étapes : on commence par le cas gaussien avant de traiter le cas général.

La preuve n'est pas terminée mais bien avancée. Le lemme suivant a été démontré.

Lemme 3.6. *Soient $Y \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ une matrice aléatoire, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ une matrice déterministe et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im } z > 0$. On suppose que $G = (\text{Re } Y_{1,1}, \text{Im } Y_{1,1})$ est un vecteur gaussien centré dans \mathbb{R}^2 de covariance K telle que $\text{Tr}(K) = 1$. On a*

$$\begin{aligned} \frac{\bar{g}}{1-c\bar{g}} &= G_{\mu_{MM^*}}(z(1-c\bar{g})^2 - (1-c)(1-c\bar{g})) \\ &+ \underbrace{\frac{\bar{\gamma}}{np} \mathbb{E} \left(\text{Tr} \left(S \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right)^t S^t h \right) \right)}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{n} \left(c - \frac{n}{p} \right) \mathbb{E}(\text{Tr}(Sh))}_{(2)} \\ &+ \underbrace{\frac{z}{n} \left(\frac{n}{p} \mathbb{E}(g \text{Tr}(Sh)) - c\bar{g} \mathbb{E}(\text{Tr}(Sh)) \right)}_{(3)} + \underbrace{\frac{1}{p} \mathbb{E} \left(g \text{Tr} \left(S \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) M^* h \right) \right)}_{(4)} \\ &- \underbrace{\frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\frac{c\bar{g}}{1-c\bar{g}} \text{Tr}(SMM^*h) \right)}_{(5)} + \underbrace{\frac{\gamma}{np} \mathbb{E} \left(\text{Tr} \left(SS^* \left(\frac{\bar{Y}}{\sqrt{p}} + \bar{M} \right) M^* h \right) \right)}_{(6)} \end{aligned} \quad (20)$$

où $S = \left(zI_n - \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right)^* \right)^{-1}$, $g = G_{\mu_{(Y/\sqrt{p}+M)(Y/\sqrt{p}+M)^*}}(z)$, $\bar{g} = \mathbb{E}(g)$ et $\gamma = \mathbb{E}(Y_{1,1}^2)$.

Démonstration. On note $S(X) = (zI_n - XX^*)^{-1}$ pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, ou simplement S s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On note $D_{j,k}$ (resp. $D'_{j,k}$) la dérivation partielle par rapport à $\text{Re } X_{j,k}$ (resp. $\text{Im } X_{j,k}$).

Pour toutes matrices $X, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on a

$$S(X + A) - S(X) = S(X + A)(XA^* + AX^* + AA^*)S(X) \quad (21)$$

En effet,

$$\begin{aligned} S(X)^{-1} - S(X + A)^{-1} &= (zI_n - XX^*) - (zI_n - (XX^* + XA^* + AX^* + AA^*)) \\ &= XA^* + AX^* + AA^* \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé en multipliant par $S(X + A)$ à gauche et $S(X)$ à droite.

Soient $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a donc, d'après (21) :

$$S(X+A)_{j,k} - S(X)_{j,k} = \sum_{l,m,q} S(X+A)_{j,l} (X_{l,m} \overline{A_{q,m}} + A_{l,m} \overline{X_{q,m}} + A_{l,m} \overline{A_{q,m}}) S(X)_{q,k}$$

donc

$$\begin{aligned} D_{a,b} S_{j,k} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [S(X + hE_{a,b})_{j,k} - S(X)_{j,k}] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\sum_l S(X + hE_{a,b})_{j,l} X_{l,b} h S(X)_{a,k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_q S(X + hE_{a,b})_{j,a} h \overline{X_{q,b}} S(X)_{q,k} + S(X + hE_{a,b})_{j,a} h^2 S(X)_{a,k} \right] \\ &= (SX)_{j,b} S_{a,k} + S_{j,a} (X^* S)_{b,k} \end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned} D'_{a,b} S_{j,k} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [S(X + ihE_{a,b})_{j,k} - S(X)_{j,k}] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\sum_l S(X + hE_{a,b})_{j,l} X_{l,b} (-ih) S(X)_{a,k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_q S(X + hE_{a,b})_{j,a} ih \overline{X_{q,b}} S(X)_{q,k} + S(X + hE_{a,b})_{j,a} h^2 S(X)_{a,k} \right] \\ &= i(S_{j,a} (X^* S)_{b,k} - (SX)_{j,b} S_{a,k}) \end{aligned}$$

On prend désormais $X = \frac{Y}{\sqrt{p}} + M$ et $S = S\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)$. On note par ailleurs $\gamma = K_{1,1} + 2iK_{1,2} - K_{2,2}$ l'espérance de $Y_{1,1}^2$.

Soient $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a, c \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $b \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

D'après la formule d'intégration par parties gaussienne (36), on a

$$\mathbb{E} \left(S_{j,k} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} Y_{a,b} \\ \operatorname{Im} Y_{a,b} \end{pmatrix} \right) = K \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p}} D_{a,b} S_{j,k} \\ \frac{1}{\sqrt{p}} D'_{a,b} S_{j,k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} K_{1,1} D_{a,b} S_{j,k} + K_{1,2} D'_{a,b} S_{j,k} \\ K_{2,1} D_{a,b} S_{j,k} + K_{2,2} D'_{a,b} S_{j,k} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{j,k} Y_{a,b}) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E}(K_{1,1} D_{a,b} S_{j,k} + K_{1,2} D'_{a,b} S_{j,k} + iK_{2,1} D_{a,b} S_{j,k} + iK_{2,2} D'_{a,b} S_{j,k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} [(K_{1,1} + iK_{2,1}) \mathbb{E}((SX)_{j,b} S_{a,k} + S_{j,a} (X^* S)_{b,k}) \\ &\quad + (K_{1,2} + iK_{2,2}) \mathbb{E}(i(S_{j,a} (X^* S)_{b,k} - (SX)_{j,b} S_{a,k}))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} [(K_{1,1} - iK_{1,2} + iK_{2,1} + K_{2,2}) \mathbb{E}((SX)_{j,b} S_{a,k}) \\ &\quad + (K_{1,1} + iK_{1,2} + iK_{2,1} - K_{2,2}) \mathbb{E}(S_{j,a} (X^* S)_{b,k})] \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E}((SX)_{j,b} S_{a,k} + \gamma S_{j,a} (X^* S)_{b,k}) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{j,k} \overline{Y_{a,b}}) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E}(K_{1,1} D_{a,b} S_{j,k} + K_{1,2} D'_{a,b} S_{j,k} - iK_{2,1} D_{a,b} S_{j,k} - iK_{2,2} D'_{a,b} S_{j,k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E}(\overline{\gamma} (SX)_{j,b} S_{a,k} + S_{j,a} (X^* S)_{b,k}) \end{aligned}$$

et, en utilisant les relations, $D_{c,b}(S_{j,a} Y_{a,b}) = D_{c,b} S_{j,a} \cdot Y_{a,b} + S_{j,a} \delta_{a,c}$ et $D'_{c,b}(S_{j,a} Y_{a,b}) = D'_{c,b} S_{j,a} \cdot Y_{a,b} + iS_{j,a} \delta_{a,c}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{j,a} Y_{a,b} \overline{Y_{c,b}}) &= \mathbb{E}(K_{1,1} D_{c,b}(S_{j,a} Y_{a,b}) + K_{1,2} D'_{c,b}(S_{j,a} Y_{a,b}) \\ &\quad + iK_{2,1} D_{c,b}(S_{j,a} Y_{a,b}) + iK_{2,2} D'_{c,b}(S_{j,a} Y_{a,b})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E}(Y_{a,b}(K_{1,1} D_{c,b} S_{j,a} + K_{1,2} D'_{c,b} S_{j,a} - iK_{2,1} D_{c,b} S_{j,a} - iK_{2,2} D'_{c,b} S_{j,a}) \\ &\quad + \mathbb{E}(S_{j,a} \delta_{a,c}(K_{1,1} + iK_{1,2} - iK_{2,1} + K_{2,2})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E}(Y_{a,b}(K_{1,1} - iK_{2,1})((SX)_{j,b} S_{c,a} + S_{j,c} (X^* S)_{b,a}) \\ &\quad + iY_{a,b}(K_{1,2} - iK_{2,2})(S_{j,c} (X^* S)_{b,a} - (SX)_{j,b} S_{c,a})) + \delta_{a,c} \mathbb{E}(S_{j,a}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E}(\overline{\gamma} Y_{a,b} (SX)_{j,b} S_{c,a} + Y_{a,b} S_{j,c} (X^* S)_{b,a}) + \delta_{a,c} \mathbb{E}(S_{j,a}) \end{aligned}$$

On note ensuite $G(z) = (zI_n - MM^*)^{-1}$, $g = G_{\mu(Y/\sqrt{p}+M)(Y/\sqrt{p}+M)^*}(z)$, $\overline{g} = \mathbb{E}(g)$ et $\underline{g} = g - \mathbb{E}(g)$. En particulier, on a $g = \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(S)$.

La formule (21) se réécrit $S = G(z) + S \left(M \frac{Y^*}{\sqrt{p}} + \frac{Y}{\sqrt{p}} M^* + \frac{1}{p} Y Y^* \right) G(z)$
donc, pour tous $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{j,k}) &= G(z)_{j,k} + \sum_{a,b,c} \mathbb{E} \left(S_{j,a} M_{a,b} \frac{\overline{Y_{c,b}}}{\sqrt{p}} + S_{j,a} \frac{Y_{a,b}}{\sqrt{p}} \overline{M_{c,b}} + S_{j,a} \frac{Y_{a,b} \overline{Y_{c,b}}}{p} \right) G(z)_{c,k} \\ &= G(z)_{j,k} + \sum_{a,b,c} \left[\frac{M_{a,b}}{p} \mathbb{E}(\overline{\gamma} (SX)_{j,b} S_{c,a} + S_{j,c} (X^* S)_{b,a}) \right. \\ &\quad + \frac{\overline{M_{c,b}}}{p} \mathbb{E}((SX)_{j,b} S_{a,a} + \gamma S_{j,a} (X^* S)_{b,a}) \\ &\quad \left. + \frac{1}{p^{3/2}} \mathbb{E}(\overline{\gamma} Y_{a,b} (SX)_{j,b} S_{c,a} + Y_{a,b} S_{j,c} (X^* S)_{b,a}) + \frac{\delta_{a,c}}{p} \mathbb{E}(S_{j,a}) \right] G(z)_{c,k} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= G(z) + \frac{1}{p} \mathbb{E} \left((\overline{\gamma} S X M^t S^t + \text{Tr}(M X^* S) S + \text{Tr}(S) S X M^* + \gamma S S^t \overline{X} M^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{\overline{\gamma}}{\sqrt{p}} S X Y^t S^t + \frac{1}{\sqrt{p}} \text{Tr}(Y X^* S) S + p S \right) G(z) \\ &= G(z) + \frac{\overline{\gamma}}{p} \mathbb{E} \left(S \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right)^t S^t \right) G(z) \\ &\quad + \frac{1}{p} \mathbb{E} \left(\text{Tr} \left(\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right)^* S \right) S \right) G(z) \\ &\quad + \frac{1}{p} \mathbb{E} \left(\text{Tr}(S) S \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) M^* \right) G(z) \\ &\quad + \frac{\gamma}{p} \mathbb{E} \left(S S^* \left(\frac{\overline{Y}}{\sqrt{p}} + \overline{M} \right) M^* \right) G(z) + \mathbb{E}(S) G(z) \end{aligned}$$

en regroupant certains termes et où on rappelle que $X = \frac{Y}{\sqrt{p}} + M$. En utilisant les relations $\text{Tr}(S) = ng$ et $\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right)^* = zI_n - S^{-1}$, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= G(z) + \frac{\overline{\gamma}}{p} \mathbb{E} \left(S \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right)^t S^t \right) G(z) \\ &\quad + \frac{n}{p} \mathbb{E}((zg - 1)S) G(z) + \frac{n}{p} \mathbb{E} \left(g S \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) M^* \right) G(z) \\ &\quad + \frac{\gamma}{p} \mathbb{E} \left(S S^* \left(\frac{\overline{Y}}{\sqrt{p}} + \overline{M} \right) M^* \right) G(z) + \mathbb{E}(S) G(z) \end{aligned}$$

En multipliant à droite par $G(z)^{-1} = zI_n - MM^*$ puis en soustrayant $\mathbb{E}\left(\frac{c\bar{g}}{1-c\bar{g}}SMM^* + cz\bar{g}S + (1-c)S\right)$, on a donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(S\left((z(1-c\bar{g}) - (1-c))I_n - \frac{1}{1-c\bar{g}}MM^*\right)\right) \\ &= I_n + \frac{\bar{\gamma}}{p}\mathbb{E}\left(S\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)^t S^t\right) + \left(c - \frac{n}{p}\right)\mathbb{E}(S) \\ &+ z\left(\frac{n}{p}\mathbb{E}(gS) - c\mathbb{E}(\bar{g}S)\right) + \frac{n}{p}\mathbb{E}\left(gS\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)M^*\right) \\ &- \mathbb{E}\left(\frac{c\bar{g}}{1-c\bar{g}}SMM^*\right) + \frac{\gamma}{p}\mathbb{E}\left(SS^*\left(\frac{\bar{Y}}{\sqrt{p}} + \bar{M}\right)M^*\right) \end{aligned}$$

On note $h = G(z(1-c\bar{g})^2 - (1-c)(1-c\bar{g}))$. En multipliant à droite par h et en prenant $\frac{1}{n}\text{Tr}$, on obtient finalement la relation (20). \square

Il reste ensuite à contrôler les termes (1) à (6) qui apparaissent pour achever la preuve du cas gaussien.

Pour commencer, on va utiliser des majorations similaires à celles de [7]. En notant $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne sur \mathbb{C}^n , on a pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Tr}(AB) \leq n\|A\|\|B\| \quad (22)$$

De plus, on a $\|S\| \leq \frac{1}{|\text{Im}z|}$ et de même

$$\|h\| \leq \frac{1}{|\text{Im}(z(1-c\bar{g})^2 - (1-c)(1-c\bar{g}))|}$$

Il s'agit donc de contrôler cette quantité. Puisque

$$\begin{aligned} \text{Im}(z(1-ch)^2 - (1-c)(1-ch)) &= 2\text{Re}(z)\text{Re}(1-ch)\text{Im}(1-ch) \\ &+ \text{Im}(z)\left((\text{Re}(1-ch))^2 - (\text{Im}(1-ch))^2\right) - (1-c)\text{Im}(1-ch) \end{aligned} \quad (23)$$

cela amène naturellement à considérer des voisinages de l'infini de la forme

$$V_{s,t} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im}z| > s, \left| \frac{\text{Re}z}{\text{Im}z} \right| < t \right\}$$

avec $s, t > 0$ (voir figure 5), comme on le voit dans la démonstration du lemme suivant.

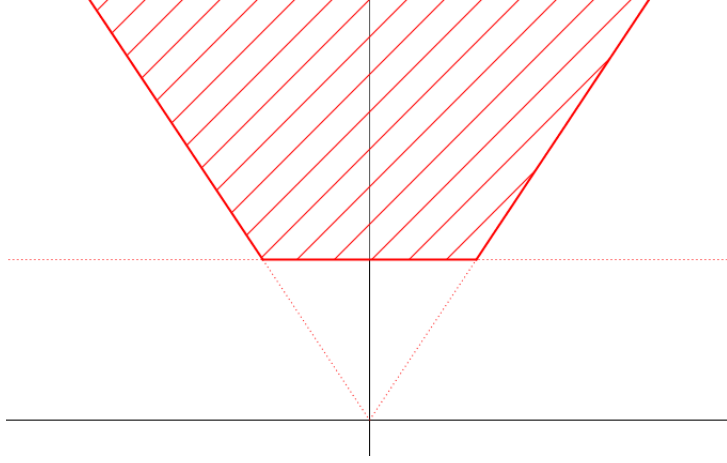


FIGURE 5 – Domaines $V_{s,t}$

Lemme 3.7. Soient $s > 2c$ et $t > 0$. Soient $z \in V_{s,t}$ et $h \in B_{\mathbb{C}}(0, \frac{1}{s})$. On a

$$|\operatorname{Im}(z(1 - ch)^2 - (1 - c)(1 - ch))| \geq \left(\frac{1}{6} - \frac{9t}{4}\right) |\operatorname{Im} z| - \frac{|1 - c|}{2} \quad (24)$$

Démonstration. Par l'hypothèse $s > 2c$, $1 - ch$ appartient à la boule $B_{\mathbb{C}}(1, \frac{1}{2})$, donc

$$|\operatorname{Im}(z) ((\operatorname{Re}(1 - ch))^2 - (\operatorname{Im}(1 - ch))^2)| \geq |\operatorname{Im} z| \frac{2}{3} (\operatorname{Re}(1 - ch))^2 \geq \frac{1}{6} |\operatorname{Im} z|$$

De plus,

$$|2 \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(1 - ch) \operatorname{Im}(1 - ch)| \leq |\operatorname{Re} z| \cdot |1 - ch|^2 \leq \frac{9t}{4} |\operatorname{Im} z|$$

et

$$|(1 - c) \operatorname{Im}(1 - ch)| \leq \frac{|1 - c|}{2}$$

Donc, d'après la relation (23) et l'inégalité triangulaire, on a

$$|\operatorname{Im}(z(1 - ch)^2 - (1 - c)(1 - ch))| \geq \left(\frac{1}{6} - \frac{9t}{4}\right) |\operatorname{Im} z| - \frac{|1 - c|}{2}$$

□

On aura besoin de conditions supplémentaires sur s et t plus loin, comme on en discutera dans la section 3.5.

On a vu comment majorer $\|S\|$ et $\|h\|$. Ce n'est pas suffisant mais cela permet de contrôler partiellement la plupart des termes dans (20).

Pour terminer cette partie, intéressons-nous un peu plus au terme (4), dont le comportement semble différent des autres. L'idée est qu'il n'est pas globalement négligeable mais qu'il va se compenser avec le terme (5). Le lemme suivant est la première étape de la réécriture du terme (4) à l'aide d'une série et de termes négligeables.

Lemme 3.8. *On a :*

$$(4) = \frac{1}{np^2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} (\text{Tr } S)^2 \text{Tr}(SYM^*h) + \gamma \text{Tr}(S) \text{Tr}(SS^t \bar{X} M^*h) + \text{Tr}(S^3 X M^*h) \right. \\ \left. + \gamma \text{Tr}(S(S^t)^2 \bar{X} M^*h) \right) + \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\left(\frac{\text{Tr}(S)}{p} + \frac{\text{Tr}(S)^2}{p^2} \right) \text{Tr}(SMM^*h) \right)$$

Démonstration. Soient $a, b, c \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d \in \llbracket 1, p \rrbracket$. D'après la formule d'intégration par parties gaussienne (36), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{a,a} S_{b,c} Y_{c,d}) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E} (K_{1,1} D_{c,d}(S_{a,a} S_{b,c}) + K_{1,2} D'_{c,d}(S_{a,a} S_{b,c}) \\ &\quad + iK_{2,1} D_{c,d}(S_{a,a} S_{b,c}) + iK_{2,2} D'_{c,d}(S_{a,a} S_{b,c})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E} (S_{a,a} (K_{1,1} D_{c,d} S_{b,c} + K_{1,2} D'_{c,d} S_{b,c} + iK_{2,1} D_{c,d} S_{b,c} + iK_{2,2} D'_{c,d} S_{b,c})) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E} (S_{b,c} (K_{1,1} D_{c,d} S_{a,a} + K_{1,2} D'_{c,d} S_{a,a} + iK_{2,1} D_{c,d} S_{a,a} + iK_{2,2} D'_{c,d} S_{a,a})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E} (S_{a,a} [(K_{1,1} + iK_{2,1}) ((SX)_{b,d} S_{c,c} + S_{b,c} (X^* S)_{d,c}) \\ &\quad + i(K_{1,2} + iK_{2,2}) (S_{b,c} (X^* S)_{d,c} - (SX)_{b,d} S_{c,c})]) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E} (S_{b,c} [(K_{1,1} + iK_{2,1}) ((SX)_{a,d} S_{c,a} + S_{a,c} (X^* S)_{d,a}) \\ &\quad + i(K_{1,2} + iK_{2,2}) (S_{a,c} (X^* S)_{d,a} - (SX)_{a,d} S_{c,a})]) \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbb{E} (S_{a,a} S_{c,c} (SX)_{b,d} + \gamma S_{a,a} S_{b,c} (X^* S)_{d,c} + S_{b,c} S_{c,a} (SX)_{a,d} + \gamma S_{b,c} S_{a,c} (X^* S)_{d,a}) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(4) &= \frac{1}{np} \mathbb{E} \left(\text{Tr}(S) \text{Tr} \left(S \left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M \right) M^* h \right) \right) \\
&= \frac{1}{np^{3/2}} \mathbb{E}(\text{Tr}(S) \text{Tr}(SYM^*h)) + \frac{1}{np} \mathbb{E}(\text{Tr}(S) \text{Tr}(SMM^*h)) \\
&= \frac{1}{np^{3/2}} \sum_{a,b,c,d,e} \mathbb{E}(S_{a,a}S_{b,c}Y_{c,d}\overline{M_{e,d}}h_{e,b}) + \frac{1}{np} \mathbb{E}(\text{Tr}(S) \text{Tr}(SMM^*h)) \\
&= \frac{1}{np^2} \sum_{a,b,c,d,e} \mathbb{E}(S_{a,a}S_{c,c}(SX)_{b,d} + \gamma S_{a,a}S_{b,c}(X^*S)_{d,c} + S_{b,c}S_{c,a}(SX)_{a,d} \\
&\quad + \gamma S_{b,c}S_{a,c}(X^*S)_{d,a}) \overline{M_{e,d}}h_{e,b} + \frac{1}{np} \mathbb{E}(\text{Tr}(S) \text{Tr}(SMM^*h)) \\
&= \frac{1}{np^2} \mathbb{E}((\text{Tr} S)^2 \text{Tr}(SXM^*h) + \gamma \text{Tr}(S) \text{Tr}(SS^t\overline{X}M^*h) + \text{Tr}(S^3XM^*h) \\
&\quad + \gamma \text{Tr}(S(S^t)^2\overline{X}M^*h)) + \frac{1}{np} \mathbb{E}(\text{Tr}(S) \text{Tr}(SMM^*h))
\end{aligned}$$

d'où la relation annoncée en utilisant $X = \frac{Y}{\sqrt{p}} + M$ dans le premier terme. \square

Il semble qu'on puisse déjà améliorer ce qui est fait ci-dessus. Par exemple, il semble judicieux de remplacer c par $\frac{n}{p}$ dans les dernières étapes de la démonstration de (20), ce qui permet déjà de ne pas faire apparaître le terme (2). Ensuite, il semble raisonnable de ne pas considérer des matrices Y et M générales et chercher à obtenir un contrôle uniforme, mais plutôt considérer des matrices dont les entrées, voire la norme, sont bornées, puisqu'on veut ensuite appliquer le résultat avec les matrices A et C . À l'image de ce qui est fait dans [10], cela peut s'avérer suffisant (voir théorème 1.1 et conditions p.6).

Grâce aux éléments ci-dessus, on peut finalement faire la conjecture suivante.

Conjecture 3.9. *Il existe $C > 0$ tel que pour tous entiers $n, p \geq 1$, toute matrice aléatoire $Y \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ ayant certains moments finis, toute matrice déterministe $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ bornée convenablement et tout $z \in V_{s,t}$, avec s et t à choisir, on ait*

$$\left| \frac{\overline{g}(z)}{1 - c\overline{g}(z)} - G_{\mu_{MM^*}}(z(1 - c\overline{g}(z))^2 - (1 - c)(1 - c\overline{g}(z))) \right| \leq C \frac{f(Y)}{n^d}$$

où $\overline{g}(z) = \mathbb{E} \left(G_{\mu_{(Y/\sqrt{p}+M)(Y/\sqrt{p}+M)^*}}(z) \right)$, $f(Y)$ est une fonction des moments finis de Y et $d > 0$.

3.5 Travail restant

Sans parler de la partie « graphes aléatoires » à adapter également, il reste pas mal de travail.

Tout d'abord, il faut terminer le contrôle des termes (1) à (6) dans (20) pour démontrer la conjecture 3.9 dans le cas gaussien. Il faudra ensuite conclure pour le cas général, probablement à l'aide d'arguments similaires à [7].

Ensuite, il faudra déduire une majoration de la distance entre les mesures $\mathbb{E}(\mu_{(Y/\sqrt{p+M})(Y/\sqrt{p+M})^*})$ et $\nu = (\sqrt{\mu_{MM^*}} \boxplus_c \sqrt{\mu_{MP,c}})^2$ de la majoration de l'écart entre les transformées de Stieljes.

Pour cela, il faut déjà vérifier la véracité de la relation de subordination (40) portant sur la convolution libre rectangulaire \boxplus_c (cf. définition B.16). Ensuite, il faut considérer désormais une distance $d_{s,t}$ adaptée au voisinage $V_{s,t}$, donc définie par

$$d_{s,t}(\mu, \nu) = \sup_{z \in V_{s,t}} |G_\mu(z) - G_\nu(z)|$$

Après, il semble qu'on puisse utiliser un argument semblable à [7] pour conclure. En effet, soit z appartenant à un domaine $V_{s,t}$ bien choisi. On note

$$\phi_z : h \mapsto (1 - ch)G_{\mu_{MM^*}}(z(1 - ch)^2 - (1 - c)(1 - ch))$$

On a $\phi_z(G_\nu(z)) = G_\nu(z)$ si la relation de subordination (40) s'avère exacte. De plus, si $s > 2c$, pour tous $h, h' \in B_{\mathbb{C}}(0, \frac{1}{s})$, on a

$$\begin{aligned} |\phi_z(h) - \phi_z(h')| &\leq \left| \phi_z(h) - (1 - ch')G_{\mu_{MM^*}}(z(1 - ch)^2 - (1 - c)(1 - ch)) \right| \\ &\quad + \left| (1 - ch')G_{\mu_{MM^*}}(z(1 - ch)^2 - (1 - c)(1 - ch)) - \phi_z(h') \right| \\ &\leq \left| \frac{c(h - h')}{\operatorname{Im}(z(1 - ch)^2 - (1 - c)(1 - ch))} \right| \\ &\quad + \left| \frac{(1 - ch')[z(2 + c(h + h'))c(h - h') - (1 - c)c(h - h')]}{\operatorname{Im}(z(1 - ch)^2 - (1 - c)(1 - ch)) \operatorname{Im}(z(1 - ch')^2 - (1 - c)(1 - ch'))} \right| \end{aligned}$$

en utilisant les inégalités $|G_\mu(w)| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} w|}$ et $|G_\mu(w) - G_\mu(w')| \leq \frac{|w - w'|}{|\operatorname{Im} w| |\operatorname{Im} w'|}$. En exploitant (24) et le fait que z appartient à un domaine $V_{s,t}$, on devrait alors pouvoir montrer que ϕ_z est contractante et en déduire une majoration de $d(\mathbb{E}(\mu_{(Y/\sqrt{p+M})(Y/\sqrt{p+M})^*}), \nu)$.

Une fois ceci effectué, la proposition 2.3 devrait finir par être adaptée pour des matrices de covariance. En effet, il resterait à démontrer un analogue du

lemme 2.6. Mais la preuve de ce dernier est similaire à celle des lemmes 2.4 et 2.5, et ceux-ci ont déjà été adaptés pour les matrices de covariance, ce qui laisse penser qu'on obtiendra ce qu'on souhaite. La conjecture finale pour l'analogie de la proposition 2.3 est la suivante.

Conjecture 3.10. *Les probabilités aléatoires $\mu_{XX^*/N}$ et $(\sqrt{\mu_{CC^*}}^s \boxplus_c \sqrt{\mu_{MP,c}}^s)^2$ sont exponentiellement équivalentes, c'est-à-dire : pour tout $\delta > 0$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha/2}} \ln \mathbb{P} \left(d_{s,t} \left(\mu_{XX^*/N}, (\sqrt{\mu_{CC^*}}^s \boxplus_c \sqrt{\mu_{MP,c}}^s)^2 \right) \geq \delta \right) = -\infty$$

avec s et t à choisir.

Cette conjecture est la première des deux étapes visant à démontrer la conjecture suivante, qui est l'adaptation du théorème 2.2 aux matrices de covariance.

Conjecture 3.11. *Soit $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ une matrice aléatoire telle que $\frac{n}{p} \rightarrow c \in]0, +\infty[$. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0, 2[$ et $a \in]0, +\infty[$ tels que $X_{1,1} \in \mathcal{S}_\alpha(a)$. Alors, la suite des mesures spectrales empiriques $\mu_{XX^*/n}$ satisfait le PGD de vitesse $n^{1+\alpha/2}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, gouverné par une bonne fonction de taux J' définie par*

$$J'(\mu) = \begin{cases} \Phi'(\nu) & \text{s'il existe } \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \mu = (\sqrt{\nu}^s \boxplus_c \sqrt{\mu_{MP,c}}^s)^2 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\Phi' : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ est une bonne fonction de taux issue d'un PGD sur des graphes aléatoires et \boxplus_c désigne la convolution libre rectangulaire de rapport c .

A Annexe : Résultats généraux utilisés

Dans cette annexe, on énonce quelques résultats utilisés dans les paragraphes précédents mais on n'en donne aucune preuve.

A.1 Distances sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Définition A.1. La *distance de Kolmogorov-Smirnov* est la distance définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par

$$d_{KS}(\mu, \nu) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mu([-\infty, t]) - \nu([-\infty, t])|$$

Remarque. On a aussi

$$d_{KS}(\mu, \nu) = \sup_{\|f\|_{BV} \leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f d\nu \right)$$

où $\|\cdot\|_{BV}$ désigne la norme de la variation totale.

Définition A.2. Soit $p \geq 1$. La *distance L^p de Wasserstein* est la distance définie sur l'ensemble des probabilités sur \mathbb{R} admettant un moment d'ordre p par

$$W_p(\mu, \nu) = \left(\inf_{\pi} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |x - y|^p d\pi(x, y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

où la borne inférieure porte sur l'ensemble des couplages π de μ et ν .

Remarques. – On a

$$W_1(\mu, \nu) = \sup_{\|f\|_{lip} \leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f d\nu \right)$$

où $\|\cdot\|_{lip}$ désigne la norme de la constante de Lipschitz.

– Pour $1 \leq p \leq p'$, on a $W_p \leq W_{p'}$.

– Pour tout $p \geq 1$, si $W_p(\mu_n, \mu)$ tend vers 0, alors $\mu_n \rightsquigarrow \mu$.

Proposition A.3 (voir [7, Équation (14)]). La *distance d définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$* par

$$d(\mu, \nu) = \sup_{\text{Im } z \geq 2} |G_{\mu}(z) - G_{\nu}(z)| \quad (25)$$

vérifie

$$d(\mu, \nu) \leq d_{KS}(\mu, \nu) \wedge W_1(\mu, \nu) \quad (26)$$

A.2 Inégalités matricielles

Proposition A.4 (Inégalité du rang, voir [7, Lemme B.1]). *Soient $A, B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. On a :*

$$d_{KS}(\mu_A, \mu_B) \leq \frac{1}{n} \operatorname{rg}(A - B) \quad (27)$$

Proposition A.5 (Inégalité du rang pour des matrices de covariance, voir [3, Théorème A.44]). *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On a :*

$$d_{KS}(\mu_{AA^*}, \mu_{BB^*}) \leq \frac{1}{n} \operatorname{rg}(A - B) \quad (28)$$

Proposition A.6 (Inégalité de Hoffman-Wielandt, voir [7, Lemme B.2]). *Soient $A, B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. On a :*

$$W_2(\mu_A, \mu_B) \leq \sqrt{\frac{1}{n} \operatorname{Tr}((A - B)^2)} \quad (29)$$

Proposition A.7 (voir [3, Corollaire A.42]). *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On a :*

$$W_2^4(\mu_{AA^*}, \mu_{BB^*}) \leq \frac{2}{n^2} \operatorname{Tr}(AA^* + BB^*) \operatorname{Tr}((A - B)(A - B)^*) \quad (30)$$

Proposition A.8 (Inégalité de Schatten, voir [7, Équation (54)]). *Soient $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ et $p \in]0, 2]$. On a :*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p d\mu_A(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |A_{k,j}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \quad (31)$$

A.3 Inégalités de concentration

Proposition A.9 (Cas particulier de l'inégalité de Chernoff). *Soient X_1, \dots, X_m des v.a. indépendantes. Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, on a :*

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^m X_i \geq t \right) \leq e^{-\lambda t} \prod_{i=1}^m \mathbb{E} (e^{\lambda X_i}) \quad (32)$$

Proposition A.10 (Cas particulier de l'inégalité de Bennett). *Soient X_1, \dots, X_m des v.a. de Bernoulli indépendantes, de paramètres respectifs p_1, \dots, p_m . On note $\sigma^2 = \sum_{i=1}^m p_i(1 - p_i)$. Pour tout $t > 0$, on a :*

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^m X_i - p_i \geq t \right) \leq \exp \left(\sigma^2 h \left(\frac{t}{\sigma^2} \right) \right) \quad (33)$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (1 + x) \ln(1 + x) - x$.

Proposition A.11 (voir [7, Théorème 2.5]). Soient $\kappa > 1$, $Y \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ une matrice aléatoire dont les coefficients diagonaux et sous-diagonaux sont indépendants et bornés par κ , et $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ une matrice déterministe telle que $\int x^2 d\mu_M \leq \kappa^2$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout $t \in \left[\left(\frac{c\kappa^2}{n} \right)^{2/5}, 1 \right]$, on a :

$$\mathbb{P} \left(W_1(\mu_{Y/\sqrt{n+M}}, \mathbb{E} \mu_{Y/\sqrt{n+M}}) \geq t \right) \leq \frac{c\kappa}{t^{3/2}} \exp \left(-\frac{n^2 t^5}{c\kappa^4} \right) \quad (34)$$

A.4 Autres résultats

Lemme A.12. Soient un entier $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$. On a :

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i})^2 \quad (35)$$

Proposition A.13 (Formule d'intégration par parties gaussienne, voir [7, formule (65) et extension p. 29]). Soient une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et un vecteur gaussien centré G dans \mathbb{R}^2 , de covariance K . Si $\mathbb{E} \|\nabla F(G)\|_2 < +\infty$, alors

$$\mathbb{E} (F(G)G) = K \mathbb{E} (\nabla F(G)) \quad (36)$$

Soient une fonction $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et une v.a. centrée G à valeurs dans \mathbb{R}^2 , de covariance K . Si $\mathbb{E} \|\nabla F(G)\|_2 < +\infty$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|\text{Hess}F(x)\| < +\infty$, alors

$$\mathbb{E} (F(G)G) = K \mathbb{E} (\nabla F(G)) + O \left(\mathbb{E} \|G\|_2^3 \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|\text{Hess}F(x)\| \right) \quad (37)$$

B Annexe : Probabilités libres

Les probabilités libres ont été introduites par Voiculescu dans les années 1980 dans le but initial d'étudier les algèbres de Von Neumann. Toutes les notions probabilistes classiques ont leur analogue dans ce nouveau cadre, particulièrement adapté pour étudier la loi jointe de matrices aléatoires à partir des lois individuelles.

On va ici s'attacher plus particulièrement à l'étude des différentes convolutions libres, qui sont les seules notions intervenant dans l'étude ci-dessus.

B.1 Cadre

Définition B.1. Un *espace de probabilité non commutatif* est un couple (\mathcal{A}, ϕ) où

- \mathcal{A} est une \mathbb{C} -algèbre unitaire commutative munie d'une involution $x \mapsto x^*$
- ϕ est une forme linéaire sur \mathcal{A} vérifiant $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$, pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, $\phi(a^*a) \geq 0$ et $\phi(ab) = \phi(ba)$.

Un élément a de \mathcal{A} est appelé *variable aléatoire non commutative*.

Exemples B.2. – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. L'espace $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ muni de la conjugaison comme involution et de la forme linéaire $X \mapsto \mathbb{E}(X)$ est un espace de probabilité non commutatif.

- L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni de la trace normalisée $\frac{1}{n} \text{Tr}$ est un espace de probabilité non commutatif.
- L'espace de matrices aléatoires $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_N(\mathbb{C}))$ muni de la forme linéaire $X^N \mapsto \mathbb{E}(\frac{1}{N} \text{Tr} X^N)$ est un espace de probabilité non commutatif.

Dans toute la suite de cette annexe, on se place dans un espace de probabilité non commutatif (\mathcal{A}, ϕ) .

Définition B.3. Les sous-algèbres $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ de \mathcal{A} sont *libres* si pour tous $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ centrés (i.e. pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\phi(a_j) = 0$) et alternants (i.e. pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, il existe $u, v \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts tels que $a_j \in \mathcal{A}_u$ et $a_{j+1} \in \mathcal{A}_v$), on a $\phi(a_1 \dots a_k) = 0$.

Des v.a. non commutatives sont *libres* si les sous-algèbres qu'elles engendrent sont libres.

Définition B.4. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$. La *distribution* de (a_1, \dots, a_n) est la forme linéaire

$$\mu_{a_1, \dots, a_n} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle & \rightarrow & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & \phi(P(a_1, \dots, a_n)) \end{array}$$

où $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ désigne l'ensemble des polynômes non commutatifs à n variables à coefficients complexes.

Exemples B.5. – Si $X \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\mu_X(P) = \mathbb{E}(P(X)) = \int P(x) d\mathbb{P}_X(x)$$

La distribution de X s'identifie donc à la loi \mathbb{P}_X de X .

– Si $X^N \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_N(\mathbb{C}))$, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\mu_{X^N}(P) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \operatorname{Tr} P(X^N)\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(\lambda_i)\right) = \mathbb{E}\left(\int P(x) d\mu_{X^N}(x)\right)$$

La distribution de X^N s'identifie donc à la mesure spectrale moyenne de X^N .

B.2 Convolutions libres

On présente ici brièvement les différentes convolutions libres. En particulier, on ne s'intéressera pas aux aspects combinatoires (cumulants libres etc.) mais on définira les convolutions libres à partir des théorèmes de liberté asymptotique, et on ne s'intéressera pas aux problèmes techniques sous-jacents au point de vue analytique (domaines de définition, d'analyticité, d'inversibilité etc.).

On commence par le cas des matrices hermitiennes.

Définitions B.6. Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe des matrices aléatoires A et B hermitiennes de taille $N \times N$, indépendantes, telles que l'une des matrices A ou B est invariante, en loi, par conjugaison par une matrice unitaire,

$$\mu_A \rightsquigarrow \mu_1 \quad \text{et} \quad \mu_B \rightsquigarrow \mu_2$$

en probabilité quand $N \rightarrow +\infty$.

Alors μ_{A+B} converge faiblement en probabilité vers une loi ne dépendant que de μ_1 et μ_2 . On appelle *convolée (additive) libre* des lois μ_1 et μ_2 , et on note $\mu_1 \boxplus \mu_2$, cette limite.

Lorsque de plus, A et B sont positives, μ_{AB} converge aussi faiblement en probabilité vers une loi ne dépendant que de μ_1 et μ_2 . On appelle *convolée multiplicative libre* des lois μ_1 et μ_2 , et on note $\mu_1 \boxtimes \mu_2$, cette limite.

Un outil puissant pour le calcul de convolées libres est la R -transformée. Pour la convolution multiplicative libre, elle a un analogue, qui est la S -transformée.

Définition B.7. Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ à support compact, distincte de δ_0 . La transformée de Cauchy de μ , définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par

$$G_\mu : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} d\mu(x)$$

est inversible sur un voisinage de l'infini, ce qui permet de définir la R -transformée de μ par

$$R_\mu : z \mapsto G_\mu^{-1}(z) - \frac{1}{z}$$

sur un voisinage de 0.

Cette définition s'étend par densité à toute probabilité $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proposition B.8. (i) L'application $\mu \mapsto R_\mu$ est injective.

(ii) Soient $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a $R_{\mu \boxplus \nu} = R_\mu + R_\nu$.

Exemples B.9. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}_+$. On a :

- $R_{\delta_a}(z) = a$
- $R_{\mu_{sc}}(z) = z$
- $R_{\mu_{MP,c}}(z) = \frac{1}{1-cz}$

Proposition B.10. Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $\nu = \mu \boxplus \mu_{sc}$. On a :

$$G_\nu(z) = G_\mu(z - G_\nu(z)) \quad (38)$$

Définition B.11. Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. De manière similaire à la définition B.7, on définit

$$T_\mu : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{z-x} d\mu(x)$$

puis la S -transformée de μ par

$$S_\mu : z \mapsto \frac{z+1}{zT_\mu^{-1}(z)}$$

Proposition B.12. (i) L'application $\mu \mapsto S_\mu$ est injective.

(ii) Soient $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. On a $S_{\mu \boxtimes \nu} = S_\mu \cdot S_\nu$.

Exemples B.13. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $c \in \mathbb{R}_+$. On a :

- $S_{\delta_a}(z) = \frac{1}{a}$
- $S_{\mu_{MP,c}}(z) = \frac{1}{1+cz}$

Proposition B.14. Soient $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ et $c \in \mathbb{R}_+$, on note $\nu = \mu \boxtimes \mu_{MP,c}$. On a :

$$G_\mu(z) = (1 - c + czG_\mu(z))G_\nu(z(1 - c + czG_\mu(z)))$$

On passe maintenant au cas des matrices de covariance. Plus précisément, on va considérer les valeurs singulières de matrices rectangulaires.

Avant cela, on a besoin de quelques notations.

Définitions B.15. Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. La *symétrisée* de μ est la loi symétrique sur \mathbb{R} définie par

$$s(\mu)(A) = \frac{\mu(A) + \mu(-A)}{2}$$

pour tout borélien A .

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. La *racine* de μ , notée $\sqrt{\mu}$, est la loi de la v.a. \sqrt{X} , où X est une v.a. de loi μ . Autrement dit, c'est la mesure image de μ par l'application $x \mapsto \sqrt{x}$.

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Le *carré* de μ , noté μ^2 , est la loi de la v.a. X^2 , où X est une v.a. de loi μ . Autrement dit, c'est la mesure image de μ par l'application $x \mapsto x^2$.

Remarques. – On notera $\sqrt{\mu}^s$ pour $s(\sqrt{\mu})$.

– Il est clair que $\mu \mapsto s(\mu)$, $\mu \mapsto \sqrt{\mu}$ et $\mu \mapsto \mu^2$ sont injectives sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$.

Définition B.16. Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_{\text{sym}}(\mathbb{R})$ et $c \in [0, 1]$. On suppose qu'il existe des matrices aléatoires A et B de taille $n \times p$, indépendantes, telles que l'une des matrices A ou B est invariante, en loi, par multiplication à gauche et à droite par une matrice unitaire,

$$\frac{1}{n} \sum_{\sigma \text{ val. sing. de } A} \delta_\sigma \rightsquigarrow \mu_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{\sigma \text{ val. sing. de } B} \delta_\sigma \rightsquigarrow \mu_2$$

en probabilité quand $n \rightarrow +\infty$ et $\frac{n}{p} \rightarrow c$.

Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{\sigma \text{ val. sing. de } A+B} \delta_\sigma$$

converge faiblement en probabilité vers une loi ne dépendant que de μ_1 , μ_2 et c . On appelle *convolée libre rectangulaire de rapport c* des lois μ_1 et μ_2 , et on note $\mu_1 \boxplus_c \mu_2$, la symétrisée de la racine de cette limite.

Remarque. On n'a pas de convolution libre multiplicative rectangulaire. En effet, étudier les valeurs singulières de AB revient à étudier les valeurs propres de $AB(AB)^* = ABB^*A^*$, donc celles de A^*ABB^* . Le problème peut donc être résolu à l'aide de la convolution multiplicative libre \boxtimes .

On va maintenant poursuivre l'analogie avec le cas « carré » et définir la R -transformée rectangulaire.

Définition B.17. Pour tous $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ et $c \in [0, 1]$, on note

$$M_\mu : z \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} \frac{xz}{1-xz} d\mu(x)$$

Soient maintenant $\mu \in \mathcal{P}_{\text{sym}}(\mathbb{R})$ et $c \in [0, 1]$. En notant $T^{(c)}$ la fonction $z \mapsto (cz + 1)(z + 1)$, on définit

$$H_\mu^{(c)} : z \mapsto zT^{(c)}(M_{\mu^2}(z))$$

puis la R -transformée rectangulaire de rapport c de μ par

$$C_\mu^{(c)} : z \mapsto T^{(c)^{-1}} \left(\frac{z}{H_\mu^{(c)^{-1}}(z)} \right)$$

Proposition B.18. Soit $c \in [0, 1]$.

(i) L'application $\mu \mapsto C_\mu^{(c)}$ est injective.

(ii) Soient $\mu, \nu \in \mathcal{P}_{\text{sym}}(\mathbb{R})$. On a $C_{\mu \boxplus \nu}^{(c)} = C_\mu^{(c)} + C_\nu^{(c)}$.

Remarques. – On a

$$T^{(c)^{-1}}(w) = \frac{1}{2c} \left(-c - 1 + \sqrt{(c+1)^2 + 4c(w-1)} \right)$$

– On peut retrouver G_{μ^2} à partir de $C_\mu^{(c)}$ à l'aide des formules

$$H_\mu^{(c)^{-1}}(z) = \frac{z}{T^{(c)}(C_\mu^{(c)}(z))} \quad \text{et} \quad G_{\mu^2}(z) = \frac{1}{z} \left(T^{(c)^{-1}} \left(zH_\mu^{(c)} \left(\frac{1}{z} \right) \right) + 1 \right)$$

Exemple B.19. Soit $c \in [0, 1]$. On a $C_{\sqrt{\mu_{MP,c}^{(c)}}}^{(c)}(z) = z$.

Il est ensuite intéressant de faire le lien entre ces convolutions.

Proposition B.20. – Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. On a les relations

$$T_\mu(z) = zG_\mu(z) - 1 \quad \text{et} \quad M_\mu(z) = T_\mu \left(\frac{1}{z} \right)$$

– Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. Les fonctions $z \mapsto zR_\mu(z)$ et $z \mapsto zS_\mu(z)$ sont réciproques l'une de l'autre.

– Soient $\mu, \nu \in \mathcal{P}_{\text{sym}}(\mathbb{R})$. On a :

$$\mu \boxplus_1 \nu = \mu \boxplus \nu$$

– Soient $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ et $c \in [0, 1]$. On a :

$$\sqrt{\mu \boxtimes \mu_{MP,c}}^s \boxplus_c \sqrt{\nu \boxtimes \mu_{MP,c}}^s = \sqrt{(\mu \boxplus \nu) \boxtimes \mu_{MP,c}}^s \quad (39)$$

Dans la démonstration du théorème 2.7, on a besoin de la relation de subordination (38) pour la convolution libre « classique ». Pour l’adaptation de ce théorème aux matrices de covariance (conjecture 3.9), on a besoin d’une relation de subordination pour la convolution libre rectangulaire.

La relation (39), tirée de [5], ainsi que le théorème 4.1 de [10], laissent penser que la relation de subordination suivante est vraie.

Conjecture B.21. Soient $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ et $c \in [0, 1]$, on note

$$\nu = \left(\sqrt{\mu}^s \boxplus_c \sqrt{\mu_{MP,c}}^s \right)^2$$

On a :

$$\frac{G_\nu(z)}{1 - cG_\nu(z)} = G_\mu \left(z(1 - cG_\nu(z))^2 - (1 - c)(1 - cG_\nu(z)) \right) \quad (40)$$

Il faut tout d’abord vérifier qu’elle est bien valable pour les mesures μ de la forme $\mu' \boxtimes \mu_{MP,c}$, puis qu’on peut l’étendre à toutes les mesures grâce à la déconvolution, voir [10, p. 10 et suite].

Références

- [1] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni. *An introduction to random matrices*. Cambridge University Press, 2010.
- [2] G. Ben Arous and A. Guionnet. Large deviations for Wigner's law and Voiculescu's non-commutative entropy. *Probab. Theory Related Fields*, 1997.
- [3] Z. Bai and J. W. Silverstein. *Spectral analysis of large dimensional random matrices*. Springer, 2010.
- [4] F. Benaych-Georges. Rectangular random matrices, related convolution. *Probab. Theory Related Fields*, 2009.
- [5] F. Benaych-Georges. On a surprising relation between the Marchenko-Pastur law, rectangular and square free convolutions. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 2010.
- [6] P. Biane. On the free convolution with a semi-circular distribution. *Indiana Univ. Math. J.*, 1997.
- [7] C. Bordenave and P. Caputo. A large deviations principle for Wigner matrices without Gaussian tails. *arXiv :1207.5570*, 2012.
- [8] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*. Springer-Verlag, 1998.
- [9] R. Dozier and J. Silverstein. On the empirical distribution of eigenvalues of large dimensional information-plus-noise type matrices. *J. of Multivariate Analysis*, 2007.
- [10] Ø. Ryan and M. Debbah. Multiplicative free convolution and information-plus-noise type matrices. *arXiv :math/0702342v1*, 2007.