Feuille de TD n° 4

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$ par

$$f(x, y) = \frac{1}{(x + y + 1)^\alpha}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est intégrable et calculer pour ces valeurs de α l'intégrale de f.

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini.

1. Soit $f : E \to [0, \infty[$ une fonction positive et mesurable. Montrer que

$$\int f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\}) dt.$$

2. Plus généralement, soit $p \geq 1$ et $f : E \to [0, +\infty[$ une fonction positive mesurable. Montrer que

$$\int f^p \, d\mu = p \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\}) \, t^{p-1} dt.$$

Exercice 3. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et f, g deux fonctions boréliennes réelles, intégrables et monotones de même sens de variation, telles que le produit fg est encore intégrable.

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y) \, \mu(dx)\mu(dy)$, où $\phi(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.
2. En déduire l'inégalité : $\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f d\mu \int_{\mathbb{R}} g d\mu$.

Exercice 4.

1. Soit f définie sur $[0, 1] \times [1, +\infty[$ par $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. Montrer que pour tout $y \geq 1$, $\int_0^1 f(x, y)dx < 0$ tandis que pour tout $x \in [0, 1]$, $\int_1^{+\infty} f(x, y)dy > 0$. A-t-on

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x, y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_1^{+\infty} f(x, y)dy \right) dx \, ,$$

et sinon, pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de Fubini ?

2. Soient f définie sur $]0, 1[^2$ par $f(x, y) = \mathbf{1}_{\{x=y\}}$, λ la mesure de Lebesgue sur $]0; 1[$ et μ la mesure de comptage $\mu(A) = \text{Card } A$. A-t-on

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\mu(dx) \right) \lambda(dy) = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\lambda(dy) \right) \mu(dx) \, ,$$

et sinon, pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de Fubini ?

Exercice 5.

1. Calculer pour tout entier $n \geq 1$ la valeur de l'intégrale $\int_{]0,\infty[} \sin(x)e^{-nx}dx$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_{]0,\infty[} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que si $x < y < z$ appartiennent à I, alors

$$\frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} \leq \frac{\phi(z) - \phi(x)}{z - x} \leq \frac{\phi(z) - \phi(y)}{z - y}.$$

2. En déduire que les dérivée a gauche et à droite en $y \in I$ existent, et satisfont
$$\phi'_-(y) \leq \phi'_+(y).$$
3. En déduire que pour tout x de I, et pour tout $a \in [\phi'_-(y), \phi'_+(y)]$,
$$\phi(x) \geq a(x-y) + \phi(y).$$
4. En déduire [1] l'inégalité de Jensen : pour toute fonction mesurable $g : E \to I$ avec $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\mu(dx) < +\infty$,
$$\phi\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mu(dx)\right) \leqslant \int_{\mathbb{R}} \phi(g(x))\,\mu(dx).$$
5. Soient $f, g : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ deux fonctions mesurables telles que $fg \geq 1$. On suppose que μ est une mesure de probabilité. Montrer que
$$\int_E f d\mu \int_E g\, d\mu \geq 1.$$
6. A nouveau, soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}^{+*}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{+*}))$ mesurable avec μ une mesure de probabilité. On note $I := \int_E f d\mu$. Montrer que
$$\sqrt{1+I^2} \leq \int_E \sqrt{1+f^2} d\mu \leq 1 + I.$$

Exercice 7. Soit Φ la fonction définie sur $]0, \infty[$ par :
$$\Phi(t) = \int_{]0,\infty[} e^{-xt} \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) dx.$$

1. Montrer que Φ est continue [2] sur $]0, \infty[$
2. Montrer que Φ est dérivable sur $]0, \infty[$ et calculer explicitement sa dérivée.
3. Calculer la limite de $\Phi(t)$ quand $t \to \infty$. En déduire la valeur de $\Phi(t)$.

Exercice 8. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable avec $\int_{\mathbb{R}} f d\mu < +\infty$. On pose pour $t \geqslant 0$:
$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{1+tf^2(x)}} \mu(dx).$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer la limite de F en $+\infty$.
4. Trouver la limite de $(F(t) - F(0))/t$ lorsque t tend vers 0. A quelle condition F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 9. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable telle que $\|f\|_\infty > 0$. On note $I = \left\{p > 0,\ \|f\|_p := \left(\int_E |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} < \infty\right\}$.

1. On pourra appliquer l'inégalité précédente en substituant x par $g(x)$ et y par $\int g d\mu$
2. Il est équivalent de montrer que Φ est continue sur $]t_0, \infty[$ pour tout $t_0 > 0$

1. Soit $x > 0$. Discuter la monotonie de $p \mapsto x^p$ en fonction de la valeur de x.
2. En déduire que I est un intervalle (possiblement vide).
3. Dans le cas où $\mu(E) < \infty$ et I non-vide, montrer que cet intervalle est de la forme $]0;a]$ ou $]0;a[$, avec $a \in]0;+\infty]$.
4. On suppose dans cette question seulement $(E, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$ avec λ la restriction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Soit $a, b > 0$. Calculer $I(f)$ pour $f(x) = x^{-1/b}\mathbb{1}_{0<x<1}$, puis pour $f(x) = x^{-1/a}\mathbb{1}_{x>1}$.
   (b) Trouver[3] f telle que $I(f) = [a, \infty]$, puis f telle que $I(f) =]0, b]$.
   (c) Soit J intervalle de $]0, +\infty[$. En déduire f telle que $I(f) = J$.
5. On suppose I non-vide.
   (a) Soit $M < \|f\|_\infty$. Montrer que
   $$M\mu\{|f| \geq M\}^{1/p} \leq \|f\|_p$$
   et en déduire $\|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p$.
   (b) Montrer que, pour $r \leq p < \infty$, l'inégalité
   $$\|f\|_p \leq \|f\|_r^{r/p}\|f\|_\infty^{1-r/p},$$
   et en déduire $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.
   (c) Conclure.
6. On suppose $\mu(E) = 1$, I non-vide et $\int_E \ln|f|\, d\mu > -\infty$.
   (a) Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée[4] que
   $$\int_E \frac{|f|^p - 1}{p} d\mu \longrightarrow \int_E \ln(|f|)d\mu \text{ quand } p \to 0$$
   (b) En déduire :
   $$\lim_{p\to 0} \|f\|_p = \exp\left(\int_E \ln|f|d\mu\right).$$

Exercice 10. *Approximation d'une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ par ses moyennes sur des petits intervalles.* Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [-n2^n, n2^n] \cap \mathbb{Z}$, on note $I_{n,k} = [k/2^n, (k+1)/2^n[$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < +\infty$.

1. Montrer que $c_{n,k} = 2^n \int_{I_{n,k}} f(t)dt$ est un réel bien défini.

On note alors $T_n(f)$ la fonction en escalier $\sum_{|k|\leq n2^n} c_{n,k}\mathbf{1}_{\mathbf{I_{n,k}}}$.

2. Montrer que $|c_{n,k}|^p \leq 2^n \int_{I_{n,k}} |f(t)|^p dt$. En déduire que $||T_n(f)||_p \leq ||f||_p$.
3. Montrer que si f est continue à support compact, on a $T_n(f) \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$.
4. En déduire par un argument de densité que $T_n(f) \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$ pour $f \in L^p(\mathbb{R})$ quelconque.
5. Les fonctions en escalier (combinaisons linéaires finies d'indicatrices d'intervalles bornés) sont-elles denses dans $L^\infty(\mathbb{R})$? dans $L^\infty([0, 1])$?

3. On se rappellera des intégrales de Bertrand
4. On pourra utiliser le théorème des accroissements finis et majorer en distinguant selon que $|f| \leq 1$ ou $|f| > 1$