Marathon d'Orsay de Mathématiques

Septembre 2023

Le Marathon d'Orsay de Mathématiques est une activité mathématique et ludique qui vous est proposée en dehors de tout cadre d'études. Vous trouverez quelques problèmes de mathématiques ci-dessous. Leur résolution ne relève pas de l'application de recettes enseignées dans des cours avancés, mais nécessite plutôt une réflexion approfondie et une adaptation aux situations nouvelles.

Pour résoudre ces problèmes correctement, il vous est demandé de justifier très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Vos solutions peuvent être envoyées par la poste (voir l'adresse sur `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon`), par email à `marathon.math@universite-paris-saclay.fr` ou déposées à l'Institut de Mathématique d'Orsay dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Toutes les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **lundi 16 octobre 2023 à 14h**. Les solutions reçues tardivement ne seront plus prises en considération. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email (pour recevoir les problèmes suivants). Ceux qui souhaitent recevoir les énoncés des problèmes suivants sans fournir de solutions pour les problèmes ci-dessous, peuvent le demander à l'adresse email ci-dessus.

Les noms de ceux ayant fourni une solution correcte seront listés avec la solution officielle avant la parution des problèmes suivants. Tous les participants ayant résolu au moins un problème durant l'année 2023-2024 seront invités à la grande remise des prix à Orsay en fin d'année.

Problème 1 (semi et complet)

Pour passer le temps durant l'été en attendant la nouvelle saison du Marathon d'Orsay de Mathématiques, Mona et Lisa se lancent divers petits défis. Dans l'un d'eux, Mona donne à Lisa une liste de 18 nombres entiers consécutifs, tous compris entre 1 et 2023. Lisa sera-t-elle en mesure de trouver dans cette liste un nombre entier qui est divisible par la somme de ses chiffres, quelle que soit la liste fournie par Mona ?

Problème 2 (semi et complet)

En collant face contre face 20 cubes de côté 1, Agnès a construit un solide qui a la forme d'un cube de côté 3 privé d'un cube de côté 1 en son centre ainsi qu'au centre de chacune de ses faces. Elle place ensuite ce solide sur l'une de ses pointes, de sorte que deux sommets diamétralement opposés se retrouvent à la verticale l'un de l'autre, puis le coupe en deux par un plan horizontal situé à mi-hauteur entre ces deux sommets. Intriguée par l'allure de la face horizontale commune ainsi créée pour les deux morceaux, Agnès a calculé l'aire de cette face ; quel est son résultat ? Soyez aussi méticuleux qu'Agnès et exprimez votre réponse sous la forme d'une expression exacte, et pas juste d'une approximation décimale.

Problème 3 (complet)

Ahsoka écrit dans le sable les cinq premiers entiers positifs 1, 2, 3, 4 et 5. Elle explique ensuite à son apprentie Sabine que celle-ci peut effacer deux de ces cinq entiers, disons a et b, puis les remplacer d'une part par leur somme $a + b$ et d'autre part par leur produit ab, de manière à toujours se retrouver avec cinq entiers écrits dans le sable. Ahsoka met alors Sabine au défi d'itérer judicieusement cette opération jusqu'à ce que trois des cinq entiers dans le sable soient égaux à 2023. Sabine a-t-elle la moindre chance d'accomplir le défi lancé par sa maîtresse Ahsoka ?

Problème 4 (complet)

Alfred, Bruce et Robin jouent avec un rectangle dont l'une des diagonales a été tracée en pointillés. Chacun à son tour dans l'ordre alphabétique, chaque joueur choisit un point, distinct des points choisis par d'éventuels joueurs précédents, sur la diagonale et situé strictement entre les extrémités de celle-ci. On trace ensuite les six droites passant par les trois points choisis et parallèles à une paire de côtés du rectangle. Cette opération divise le rectangle en 16 cases rectangulaires, qui sont alors coloriées en damier noir et blanc : deux cases avec un côté commun seront de couleurs différentes, en commençant par une case noire en bas à gauche. Si on désigne par B la somme des aires des cases blanches et par N la somme des aires des cases noires, Alfred sera déclaré vainqueur si $B > N$, sinon Bruce gagnera si $B < N$, et enfin Robin remportera la partie si $B = N$. Existe-t-il une stratégie permettant à l'un des joueurs de gagner à coup sûr, quoi que fassent ses adversaires ?

université PARIS-SACLAY
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

FMJH

cnrs