Mathématiques Orsay

Marathon d'Orsay de Mathématiques

Novembre 2023

Voici les énoncés de la deuxième vague de problèmes, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 11 décembre 2023 à 14h**. Celles-ci peuvent être envoyées par email à `marathon.math@universite-paris-saclay.fr`, par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon), ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email.

Problème 5 (semi et complet)

Quels sont tous les nombres entiers $N \geq 0$ pour lesquels il existe au moins un entier $m > 0$ ayant la propriété que l'écriture décimale de $1^m + 2^m + 3^m + 4^m$ se termine par exactement N zéros ?

Problème 6 (semi et complet)

Une classe de collégiens va fabriquer un grand panneau sur lequel figurent 2023 nombres entiers écrits autour d'un cercle. Ces entiers, pas forcément distincts, doivent être choisis de sorte que deux entiers voisins le long du cercle diffèrent toujours de 1 ou de 2. On dira qu'un de ces entiers est une bosse si il est plus grand que ses deux voisins, et qu'il est un creux si il est plus petit que ses deux voisins. Leur professeur de mathématiques demande aussi que la somme des bosses soit égale à la somme des creux augmentée de 1532. Avec ces contraintes, quelles sont toutes les valeurs possibles pour le nombre d'entiers impairs figurant sur un tel panneau ?

Problème 7 (complet)

Un groupe de 44 lycéens a participé à un tournoi d'échecs au cours duquel chaque participant a joué contre chacun des autres participants une seule fois, chaque partie s'étant terminée par la victoire de l'un des deux joueurs (l'un ayant battu l'autre) ou par un match nul. A la fin du tournoi, l'organisateur observe que tout ensemble de 24 lycéens parmi les participants peut être ordonné de sorte que le $i$ème a battu le $(i+1)$ème pour $i = 1, \dots, 23$ et que le 24ème a battu le premier. Est-il nécessairement vrai que l'on peut faire la même chose pour tout ensemble de 25 lycéens parmi les participants, c'est-à-dire les ordonner de sorte que le $i$ème a battu le $(i + 1)$ème pour $i = 1, \dots, 24$ et que le 25ème a battu le premier ?

Problème 8 (complet)

Olivia joue avec un échiquier $m \times n$ (avec $m, n \geq 2$) et une grande réserve de dominos 2×1. Elle place des dominos sur l'échiquier de sorte que chaque domino recouvre exactement 2 cases ayant un côté commun, et qu'aucun domino ne recouvre même partiellement un autre domino. Elle continue ainsi jusqu'à ce qu'elle ne puisse plus placer de domino supplémentaire. Elle remarque alors qu'aucun domino ne peut être glissé d'une case dans la direction de sa longueur, dans un sens ou dans l'autre, sans que cela le fasse recouvrir partiellement un autre domino. Sans compter les dominos ni les cases occupées ou libres, Olivia déduit de ces seules informations que l'ensemble des dominos qu'elle a placés recouvre plus de 80% des cases de l'échiquier. Quel est son raisonnement ?