Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la troisième vague de janvier 2024

Voici les solutions de la troisième vague de problèmes avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 9 : Montrons que l'on peut toujours trouver deux dames sur des cases à distance 2024 l'une de l'autre. Pour $i = 1, \ldots, 2024$, il y a au plus une dame dans la $i$ème colonne. Mais comme il y a autant de dames que de colonnes, il y a exactement une dame par colonne. Notons $\sigma(i)$ le numéro de la ligne où se trouve la dame de la $i$ème colonne. Comme il y a de même exactement une dame par ligne, σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, 2024\}$. Notons $\Delta_i = \sigma(i) - i$ si $i \leq \sigma(i)$ et $\Delta_i = \sigma(i) - i + 2024$ si $i > \sigma(i)$, de sorte que $0 \leq \Delta_i \leq 2023$. Montrons que les nombres $\Delta_1, \ldots, \Delta_{2024}$ ne sont pas tous distincts. En effet, si ils l'étaient, ce serait tous les entiers de 0 à 2023 et leur somme $\frac{1}{2} \times 2023 \times 2024$ ne serait pas un multiple de 2024. Mais d'autre part, leur somme diffère d'un multiple de 2024 de $\sum_{i=1}^{2024} (\sigma(i) - i) = 0$, ce qui donne une contradiction. On peut donc trouver $i < j$ avec $\Delta_i = \Delta_j$, de sorte que $\sigma(i) - i = \sigma(j) - j + C$ avec $C = -2024, 0$ ou $+2024$. On ne peut pas avoir $C = 0$, sinon les dames dans les colonnes i et j sont sur une même diagonale. On ne peut pas non plus avoir $C = -2024$ car alors $\sigma(i) - \sigma(j) = i - j + C < -2025$ ce qui est impossible (c'est au moins $1 - 2024 = -2023$). Donc $C = +2024$ et $\sigma(i) - \sigma(j) = i - j + 2024 \geq 0$. Comme $i - j = -|i - j| < 0$, cette égalité s'écrit aussi $|\sigma(i) - \sigma(j)| + |i - j| = 2024$, c'est la distance entre les cases dans la $i$ème colonne, $\sigma(i)$ème ligne et dans la $j$ème colonne, $\sigma(j)$ème ligne.

Ont fourni une solution correcte :
R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),
A. Dusoulier (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),
E. Lubek (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
P. Drouvillé (4ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
Q. Granier (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Lemonnier (professeure agrégée au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes).

Solution du problème 10 : On cherche les entiers $p, q > 0$ premiers entre eux tels que $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}} = \frac{a}{b}$ pour des entiers $a, b > 0$ premiers entre eux. Par conséquent, $p^q b^{p-q} = q^q a^{p-q}$, Si α est un nombre premier qui divise p (mais donc pas q), alors la dernière égalité implique que α divise a (mais donc pas b). Donc si α^k est la plus grande puissance de α divisant p, alors α^{kq} est la plus grande puissance de α divisant a^{p-q}. Comme p et q sont premiers entre eux, q et $p-q$ le sont aussi, donc k est un multiple de $p-q$ et $\alpha^{\frac{k}{p-q}q}$ divise a. Ceci implique que a est la $q$ème puissance d'un entier $c > 0$: $a = c^q$. De même, il existe un entier $d > 0$ tel que $b = d^q$. La racine $q$ème de l'égalité ci-dessus donne alors $pd^{p-q} = qc^{p-q}$. Puisque a et b sont premiers entre eux, c et d le sont aussi, de sorte que la dernière égalité donne $p = c^{p-q}$ et $q = d^{p-q}$ lorsque $p - q > 0$ et $p = d^{q-p}$ et $q = c^{q-p}$ lorsque $p - q < 0$. Dans les deux cas, il existe un entier $u > 0$ (qui n'est autre que $|p-q|$) tel que $u = c^u - d^u > 0$. Montrons que ceci force $u = 1$: si $u \geq 2$, comme $c \geq d+1$, on obtient $u = c^u - d^u \geq ud + 1 \geq u + 1$, une contradiction. Lorsque $|p - q| = 1$, $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\pm q}$ est toujours rationnel. Les nombres r recherchés sont donc ceux de la forme $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{n+1}{n}$ pour tout entier $n > 0$.

Ont fourni une solution correcte :
M. Rouault (1ère au Lycée Diderot, à Paris),
A. Dusoulier (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),
G. Hoffmann (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
N. Gonde (L3 Biosciences à l'ENS de Lyon, à Lyon),
S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
Y. Wang (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
M. Yadollahi (L3 magistère de maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
E. Lubek (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Mazeyrat (2ème année à l'INPGI, à Grenoble),
A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Tardy (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
P. Drouvillé (4ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
Q. Granier (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Lemonnier (professeure agrégée au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (M2 Mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (M1 Mathématiques à l'ENS, à Paris),
l'équipe formée par F. Arous (L3 Mathématiques Fondamentales et Appliquées à l'Université Paris Cité, à Paris) et T. De Wolf (en échange à l'Université Mohamed VI Polytechnique, à Rabat, 3ème année de BASc Maths à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes).

Solution du problème 11 : Pour montrer que l'ensemble des entiers ≥ 0 est la réunion d'ensembles franco-belges disjoints, construisons une suite E_n d'ensembles franco-belges de la manière inductive suivante. On pose $E_0 = \{0, 1789, 1830\}$. Si $E_0, \ldots, E_n$ sont des ensembles franco-belges disjoints, on définit E_{n+1} est prenant pour son plus petit élément le plus petit entier m qui n'est pas dans $E_0 \cup \ldots \cup E_n$. Ensuite, si $m + 1789$ n'est pas dans non plus dans $E_0 \cup \ldots \cup E_n$, on pose $E_{n+1} = \{m, m + 1789, m + 1789 + 1830\}$. Sinon, on pose $E_{n+1} = \{m, m+1830, m+1789+1830\}$. Il ne reste plus qu'à montrer que E_{n+1} est bien disjoint de $E_0 \cup \ldots \cup E_n$. Tout d'abord, $m+1789+1830 \notin E_0 \cup \ldots \cup E_n$ car par construction le plus petit élément de E_i avec $0 \leq i < n+1$ est $< m$, de sorte que son plus grand élément est $< m+1789+1830$. Ainsi, E_{n+1} est bien disjoint de $E_0 \cup \ldots \cup E_n$ lorsque $m+1789$ n'est pas dans cet ensemble. Dans le cas contraire, montrons par contradiction que $m+1830$ ne peut pas en faire partie. Si c'était le cas, ce serait forcément le plus grand élément de l'un des E_i avec $0 \leq i < n+1$ (car son élément le plus petit est $< m$). Son élément le plus petit serait alors $m - 1789$. Mais dans ce cas, la définition inductive de E_i impose que $E_i = \{m-1789, m, m+1830\}$ car $m \notin E_0 \cup \ldots \cup E_{i-1}$. Mais alors ceci contredit notre hypothèse que $m \notin E_0 \cup \ldots \cup E_n$.

Ont fourni une solution correcte :
G. Hoffmann (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
M. Yadollahi (L3 magistère de maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense),
l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),
l'équipe formée par T. Babelis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Komisarova (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et A. Sarocinskis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (M2 Mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (M1 Mathématiques à l'ENS, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes).

Solution du problème 12 : Notons $A_1 = d_B \cap d_C$, $B_1 = d_A \cap d_C$ et $C_1 = d_A \cap d_B$. Supposons dans un premier temps que A_1 et A sont de part et d'autre de la droite BC. Soit A_2 l'unique point de la médiatrice du segment BC tel que $\widehat{CA_2B} = 120°$ et A_2 est situé de l'autre côté que A par rapport à la droite BC. Comme $\widehat{C_1A_1B_1} = \widehat{CA_1B} = 60°$, par le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre, A_1 est sur l'arc de cercle $\mathcal{C}_A$ limité par B et C, et de centre A_2, situé du même côté que A_2 de la droite BC. On définit de même les points B_2 et C_2, ainsi que les arcs de cercles $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$, et on a aussi $B_1 \in \mathcal{C}_B$ et $C_1 \in \mathcal{C}_C$. La droite A_1B recoupe $\mathcal{C}_C$ en un deuxième point qui est forcément C_1. De même, $C_1A \cap \mathcal{C}_B = \{A, B_1\}$ et $B_1C \cap \mathcal{C}_A = \{C, A_1\}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{CA_1B}$ recoupe le cercle de centre A_2 passant par B et C en un point A_3 situé de l'autre côté de la droite BC, et qui ne dépend pas de la position de A_1, B_1 et C_1 : c'est le symétrique de A_2 par rapport à BC. On définit de même les points B_3 et C_3.

Le triangle $A_3B_3C_3$ est équilatéral car ses angles sont de $60°$. Montrons-le pour l'angle en C_3, les deux autres étant analogues : la composition des rotations de centres A_3, B_3 et C_3, et d'angles $120°$ est la composition d'une rotation de $3 \times 120°$ et d'une translation, donc une translation, mais qui fixe C. Donc C_3 est le point fixe de la composition des rotations de centres A_3 et B_3 d'angles $120°$. Chacune de ces rotations est la composition de 2 symétries axiales, l'une par rapport à la droite A_3B_3 et l'autre par rapport à une droite passant par le centre de la rotation et formant un angle de $\frac{1}{2} \times 120°$ avec A_3B_3. Ainsi, C_3 est à l'intersection de ces droites et $\widehat{B_3C_3A_3} = 180° - 2 \times \frac{1}{2} \times 120° = 60°$.

Le centre de gravité de $A_3B_3C_3$ coïncide avec celui M de ABC. On a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ et on veut montrer que $\overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MB_3} + \overrightarrow{MC_3} = \vec{0}$. Par soustraction, cela revient à montrer que $\overrightarrow{AC_3} + \overrightarrow{BA_3} + \overrightarrow{CB_3} = \vec{0}$. Mais le vecteur $\overrightarrow{AC_3}$ est obtenu à partir du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en lui faisant subir une rotation de 30° et une homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et de même pour $\overrightarrow{BA_3}$ à partir de $\overrightarrow{BC}$ et pour $\overrightarrow{CB_3}$ à partir de $\overrightarrow{CA}$. Comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, on obtient la conclusion souhaitée.

Montrons enfin que l'intersection des bissectrices de $A_1B_1C_1$ est sur le cercle circonscrit à $A_3B_3C_3$, qui est de centre M. L'intersection des bissectrices issues de A_1 et B_1 voit le segment A_3B_3 sous un angle de 60° ou 120°, c'est-à-dire les angles formés par ces bissectrices. De même, ce point d'intersection voit les segments B_3C_3 et C_3A_3 sous un angle de 60° ou 120°. Au total, soit ce point d'intersection voit les 3 segments sous un angle de 120° (et il s'agit alors du point M), soit ce point d'intersection voit 2 segments sous un angle de 60° et un segment sous un angle de 120° (et il s'agit alors d'un point du cercle circonscrit à $A_3B_3C_3$ comme souhaité). Il reste à exclure la possibilité que le point d'intersection soit M. Dans ce cas, en répétant l'argument ci-dessus pour les triangles $A_1B_1C_1$ et ABC, on obtient que $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \vec{0}$. Comme ces vecteurs forment des angles de 120° les uns avec les autres, cela ne peut se produire que si ces vecteurs sont tous de mêmes longueurs. De même, les segments BC_1, CA_1 et AB_1 sont de mêmes longueurs. Comme les angles $\widehat{BA_1C}$, $\widehat{AB_1C}$ et $\widehat{AC_1B}$ sont tous égaux à 60°, les triangles ABC_1, BCA_1 et CAB_1 sont isométriques, de sorte que ABC est équilatéral, contredisant une hypothèse.

Supposons maintenant que A_1 et A sont du même côté de la droite BC. Le raisonnement ci-dessus peut être répété en échangeant les rôles de A_2 et A_3, de B_2 et B_3, et de C_2 et C_3. Le centre du cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$ est donc sur le cercle circonscrit à $A_2B_2C_2$, qui est lui aussi de centre M, mais de rayon strictement plus grand que le cercle précédent. On obtient donc les deux cercles concentriques et disjoints demandés.

Ont fourni une solution correcte :
R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),
S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
Y. Wang (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),
N. Didrit (Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
Q. Granier (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense),
l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C.

Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes).

université PARIS-SACLAY
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
FMJH
cnrs