SURFACES STABLEMENT RATIONNELLES SUR UN CORPS QUASI-FINI

par

J.-L. Colliot-Thélène

À la mémoire de Vasiliĭ Alekseevich Iskovskikh

Résumé. — Soient k un corps et X une k-surface projective, lisse, stablement k-rationnelle. Si X est déployée par une extension cyclique, par exemple si le corps k est fini ou plus généralement quasi-fini, alors la surface X est k-rationnelle.

Abstract. — Let k be a field and X a smooth, projective, stably k-rational surface. If X is split by a cyclic extension, for instance if the field k is finite or more generally quasi-finite, then the surface X is k-rational.

1. Introduction

L'énoncé suivant est essentiellement connu (cf. [**5**, §1, §2], [**6**, §2.A]).

Théorème 1.1. — *Soient k un corps et $\overline{k}/k$ une clôture séparable de k. Soit X une k-variété projective, lisse. Soit $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Supposons que $\overline{X}$ est $\overline{k}$-rationnelle, i.e $\overline{k}$-birationnelle à un espace projectif. Considérons les conditions suivantes.*

(i) La k-variété X est k-rationnelle.

(ii) La k-variété X est stablement k-rationnelle.

(iii) La k-variété X est facteur direct d'une variété k-rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe une k-variété Y projective et lisse, géométriquement connexe, telle que $X \times_k Y$ est k-birationnelle à un espace projectif.

(iv) Le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est stablement de permutation, c'est-à-dire qu'il existe des modules de permutation de type fini P_1 et P_2 et un isomorphisme de modules galoisiens $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \oplus P_1 \simeq P_2$.

(v) Le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ *est un facteur direct d'un module de permutation, c'est-à-dire qu'il existe un module galoisien* M*, un module de de permutation de type fini* P *et un isomorphisme de modules galoisiens* $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \oplus M \simeq P$*.*

(vi) Pour toute extension finie séparable k'/k*, on a* $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$*.*

(vii) Pour toute extension finie séparable k'/k*, l'application naturelle de groupes de Brauer* $\mathrm{Br}(k') \to \mathrm{Br}(X_{k'})$ *est surjective.*

Alors : (i) implique (ii), qui implique (iii) ; (ii) implique (iv) ; (iii) implique (v) ; (iv) implique (v) ; (v) implique (vi) ; (vi) implique (vii).

Démonstration. — Pour l'implication (i) implique (iv), voir [**6**, Prop. 2A1, p. 461]. Le fait que (ii) implique (iv) et que (iii) implique (v) résulte alors du calcul du groupe de Picard d'un produit [**5**, Lemme 11]. L'implication (v) implique (vi) résulte du fait que pour tout module galoisien P de permutation et toute extension finie séparable k'/k, on a $H^1(k', P) = 0$. Pour X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre, et toute extension finie séparable k'/k, on a la suite exacte (cf. [**6**, (1.5.0), p. 386]) :

$$\mathrm{Br}(k') \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X_{k'}) \to \mathrm{Br}(\overline{X})] \to H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})).$$

Si de plus $\overline{X}$ est $\overline{k}$-rationnelle, alors $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$. Cette annulation est bien connue en caractéristique zéro, et l'argument vaut encore pour la ℓ-torsion de $\mathrm{Br}(\overline{X})$ pour ℓ un nombre premier distinct de l'exposant caractéristique de k. Que $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$ vaut pour tout corps séparablement clos $\overline{k}$ et $\overline{X}$ $\overline{k}$-rationnelle se voit en combinant [**11**, Cor. 5.8] et [**3**, Prop. 2.1.9]. Ainsi (vi) implique (vii). □

On dit qu'une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, est déployée par une sous-extension galoisienne $K \subset \overline{k}$ si $X(K) \neq \emptyset$ et si l'inclusion naturelle de réseaux $\mathrm{Pic}(X_K) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ est un isomorphisme. Sous l'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$, ceci équivaut au fait que $\mathrm{Gal}(\overline{k}/K)$ agit trivialement sur le réseau $\mathrm{Pic}(\overline{X})$.

Théorème 1.2. — *Soient* k *un corps et* X *une* k*-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Supposons que* X *possède un point* k*-rationnel et que* X *soit déployée par une extension cyclique de* k*. Si* X *n'est pas* k*-rationnelle, alors il existe une extension finie séparable* k'/k *telle que* $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$*, et alors* X *n'est pas stablement* k*-rationnelle.*

La démonstration sera donnée au §4 (théorème 4.1), où l'on regroupe les résultats du §2 (surfaces fibrées en coniques) et du §3 (surfaces de del Pezzo). C'est une démonstration cas par cas, qui s'appuie de façon essentielle sur les tables établies par divers auteurs sur l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard des surfaces de del Pezzo de degré 3, 2, 1.

L'énoncé du théorème 1.2 est à comparer avec les exemples donnés dans [**2**]. Si k est un corps de caractéristique différente de 2, et $P(x) \in k[x]$ un polynôme séparable et irréductible de degré 3, de discriminant $a \in k^*$ non carré, on montre que la k-surface d'équation affine $y^2 - az^2 = P(x)$ est stablement k-rationnelle mais non k-rationnelle. Il existe donc de telles surfaces sur tout corps k de caractéristique différente de 2 possédant une extension de corps galoisienne de groupe $\mathfrak{S}_3$, par exemple le corps des rationnels ou le corps $F = \mathbb{C}(t)$ des fractions rationnelles en une variable sur les complexes.

Par définition, un corps quasi-fini est un corps parfait dont la clôture galoisienne est le groupe procyclique $\hat{\mathbb{Z}}$ [**19**, Chap. XIII, §2]. Les deux types d'exemples classiques sont : les corps finis et les corps de séries formelles d'une variable sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

Si k est un corps fini, ou un corps de séries formelles d'une variable $\mathbb{C}((t))$ sur un corps algébriquement clos $\mathbb{C}$ de caractéristique zéro, toute k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle possède un k-point (Proposition 1.6), et toute extension finie de corps K/k est cyclique. Toute conique projective et lisse sur k est k-isomorphe à $\mathbf{P}^1_k$.

Le théorème 1.2 et le théorème 1.1 donnent alors l'énoncé suivant, qui pour un corps fini répond à une question de B. Hassett mentionnée par A. Pirutka dans [**18**].

Théorème 1.3. — *Soient k un corps et X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Sous l'une des hypothèses suivantes :*

(i) X possède un k-point et le corps k est quasi-fini,

(ii) le corps k est un corps fini,

(iii) le corps $k = \mathbb{C}((t))$ est le corps des séries formelles en une variable sur un corps $\mathbb{C}$ algébriquement clos de caractéristique zéro,

on a :

(a) Si pour toute extension finie de corps k'/k on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$, alors X est k-rationnelle.

(b) Les conditions (i) à (vii) du théorème 1.1 sont équivalentes pour X. En particulier, sur un corps k quasi-fini, toute k-surface stablement k-rationnelle est k-rationnelle.

Corollaire 1.4. — *Soient k un corps et X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Dans chacun des trois cas suivants :*

(i) X possède un k-point et le corps k est quasi-fini,

(ii) le corps k est un corps fini,

(iii) le corps $k = \mathbb{C}((t))$ est le corps des séries formelles en une variable sur un corps $\mathbb{C}$ algébriquement clos de caractéristique zéro,

si l'une des trois hypothèses suivantes est satisfaite :

(a) le pgcd des degrés des extensions finies K/k telles que X_K est stablement K-rationnelle est égal à 1.

(b) X est k-unirationnelle, et le pgcd des degrés des k-applications rationnelles dominantes génériquement séparables de $\mathbf{P}^2_k$ vers X est égal à 1,

(c) le groupe de Chow des zéro-cycles de X est universellement trivial, alors la surface X est k-rationnelle.

Démonstration. — On note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des classes de zéro-cycles sur X, et $A_0(X)$ le sous-groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro. Ces groupes sont des invariants k-birationnels des variétés projectives, lisses, géométriquement intègres. Ceci est établi dans [**4**, Prop. 6.3] avec quelques restrictions, par exemple en caractéristique zéro. La démonstration de [**9**, Example 16.1.11] vaut sur un corps quelconque.

L'hypothèse (c) est que pour toute extension de corps F/k l'application degré $deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, ce qui est le cas pour X projective, lisse, intègre, stablement k-rationnelle.

En caractéristique zéro, d'après [**4**, Prop. 6.4], chacune des hypothèses (a) et (b) sur la surface X implique (c). Via les correspondances [**9**, Chap. 16] on voit que ceci vaut sur un corps quelconque.

Sous l'hypothèse de (c), le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est un facteur direct d'un module de permutation. Pour la démonstration, je renvoie à [**10**, Appendix A]. Pour toute extension de corps E/k, on a donc $H^1(E, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$. Le théorème 1.3 permet de conclure. □

Rappelons la classification k-birationnelle des k-surfaces projectives, lisses, géométriquement rationnelles, due à Enriques, Manin, Iskovskikh [**14**], et Mori.

Théorème 1.5. — *Soit k un corps. Toute k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, k-minimale, appartient à au moins un des types suivants :*

(i) Surface fibrée en coniques relativement minimale au-dessus d'une conique lisse.

(ii) Surface de del Pezzo de degré d avec $1 \leq d \leq 9$.

Comme observé par Manin et l'auteur (cf. [**15**, Thm. IV.6.8]), ceci permet de démontrer le résultat suivant, qui, pour k un corps fini, admet une démonstration uniforme (A. Weil, cf. [**17**, Thm. 27.1, Cor. 27.1.1]).

Proposition 1.6. — *Soient k un corps et X une k-surface projective et lisse géométriquement rationnelle. Si k est un corps C_1, alors X possède un point k-rationnel. Ceci vaut en particulier pour k un corps fini et pour $k = \mathbb{C}((t))$.*

2. Fibrés en coniques

Soient k un corps, $\overline{k}$ une clôture séparable de k et $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Si X est une k-surface projective lisse géométriquement connexe munie d'un k-morphisme $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ relativement minimal dont la fibre générique est une courbe lisse de genre zéro, alors les points fermés M dont la fibre $X_M/k(M)$ est non lisse ont leur corps résiduel $k(M)$ séparable sur k, et $X_M/k(M)$ se décompose sur une extension quadratique séparable de corps $L(M)/k(M)$ en deux droites $\mathbf{P}^1_{L(M)}$ qui se coupent transversalement en un $k(M)$-point. On appelle ces points fermés $M \in \mathbf{P}^1_k$ les points de mauvaise réduction de la fibration. On renvoie à [**14**] pour la démonstration de ces faits. Ils impliquent que sur une clôture séparable $\overline{k}$ de k, il existe une contraction $\overline{X} \to Y$ au-dessus de $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ telle que les fibres de $Y \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ soient toutes isomorphes à $\mathbf{P}^1$. Ceci définit donc un élément de $\mathrm{Br}(\mathbf{P}^1_{\overline{k}}) = \mathrm{Br}(\overline{k}) = 0$. L'égalité $\mathrm{Br}(\mathbf{P}^1_{\overline{k}}) = 0$ résulte du théorème de Tsen lorsque $\overline{k}$ est algébriquement clos, et ce même théorème implique que $\mathrm{Br}(\mathbf{P}^1_{\overline{k}})$ est p-primaire pour $\overline{k}$ séparablement clos de caractéristique $p > 0$. Que l'on ait $\mathrm{Br}(\mathbf{P}^1_{\overline{k}}) = 0$ pour $\overline{k}$ séparablement clos quelconque est établi par Grothendieck [**11**, Cor. 5.8]. La fibre générique de $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ admet donc un point rationnel. Comme $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ est régulier de dimension 1 et $\overline{f}$ est un morphisme propre, tout tel point rationnel s'étend en une section de $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$. La k-variété X est déployée sur $\overline{k}$. La fibre générique de la fibration $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ correspond à un élément β de $H^2(g, \overline{k}(\mathbf{P}^1)^*) \subset \mathrm{Br}(k(\mathbf{P}^1))$. Comme la fibre générique est une courbe lisse de genre zéro sur $k(\mathbf{P}^1)$, elle admet un point après une extension séparable de degré 2 de $k(\mathbf{P}^1)$. La classe β est donc annulée par 2. En un point fermé M de mauvaise réduction, la flèche diviseur définit une application g-équivariante

$$\overline{k}(\mathbf{P}^1)^* \to \oplus_{k(M) \subset \overline{k}} \mathbb{Z},$$

où $k(M) \subset \overline{k}$ parcourt les k-plongements de l'extension séparable $k(M)/k$ dans $\overline{k}$. Cet homomorphisme induit une flèche résidu

$$\partial_M : H^2(g, \overline{k}(\mathbf{P}^1)^*) \to H^2(g, \oplus_{k(M) \subset \overline{k}} \mathbb{Z}) = H^2(k(M), \mathbb{Z}) = H^1(k(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

L'image de β par cette application décrit l'extension quadratique séparable de corps de $k(M)$ correspondant à la mauvaise fibre. Pour $k \subset L \subset \overline{k}$, avec L/k finie, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^2(g_k, \overline{k}(\mathbf{P}^1)^*) & \to & H^1(k(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(g_L, \overline{k}(\mathbf{P}^1)^*) & \to & \oplus_{N \to M} H^1(k(N), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{array}$$

où N parcourt les points fermés de $\mathbf{P}^1_L$ d'image M via la projection $\mathbf{P}^1_L \to \mathbf{P}^1_k$, où les flèches horizontales sont les flèches de résidu définies ci-dessus et les flèches verticales sont les flèches de restriction.

Lemme 2.1. — *Soit $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ un fibré en coniques relativement minimal sur un corps k, à fibre générique lisse et espace total lisse sur k. Soit $M \in \mathbf{P}^1_k$ un point fermé de corps résiduel $k(M)$ où la fibration a mauvaise réduction. Soit $K = k(M)$ le corps résiduel en M. Soit N un K-point of $\mathbf{P}^1_K$ au-dessus de $M \in \mathbf{P}^1_k$. La fibration $f_K : X_K \to \mathbf{P}^1_K$ a mauvaise réduction en N.*

Démonstration. — Soit $\beta \in H^2(g_k, \overline{k}(\mathbf{P}^1)^*)$ la classe associée à la fibre générique de $f : X \to \mathbf{P}^1_k$. La fibration f a mauvaise réduction en M si et seulement si le résidu $\gamma := \partial_M(\beta) \in H^1(k(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est non trivial. D'après la compatibilité ci-dessus, on a

$$\partial_N(\beta_K) = \gamma \in H^1(K(N), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

ce qui établit le lemme. □

L'énoncé suivant fut établi par Iskovskikh ([**12**, Thm. 2], [**14**, Thm. 4, Thm. 5]).

Proposition 2.2. — *Soient k un corps et X/k une surface projective, lisse, géométriquement connexe sur k, munie d'une structure de fibré en coniques relativement minimale $X \to \mathbf{P}^1_k$. Si le nombre r de fibres géométriques dégénérées est au plus égal à 3, et si X possède un point k-rationnel, alors X est une surface k-rationnelle.*

Proposition 2.3. — *Soient k un corps et X/k une surface projective, lisse, géométriquement connexe sur k, munie d'une structure de fibré en coniques relativement minimale $X \to \mathbf{P}^1_k$. Supposons X déployée sur une extension cyclique de corps K/k. Si le nombre r de fibres géométriques dégénérées de la fibration est au moins égal à 4, alors il existe une extension finie séparable k'/k telle que $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.*

Démonstration. — Donnons ici quelques rappels sur le module de Picard d'une surface fibrée en coniques sur $\mathbf{P}^1_k$. Pour plus de détails, je renvoie le lecteur à [**7**, §2].

Soit comme ci-dessus $\overline{k}$ une clôture séparable de k et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. On a une suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to P \to \mathbb{Z}.f \oplus Q \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathbb{Z} \to 0,$$

où P est le module de permutation sur les $\overline{k}$-points of $\mathbf{P}^1$ à fibre singulière, Q est le module de permutation sur les composantes des fibres singulières sur $\overline{k}$, et $\mathbb{Z}.f$ est engendré par une fibre au-dessus d'un k-point de $\mathbf{P}^1_k$. L'application $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathbb{Z}$ est induite par la restriction à la fibre générique.

Soit M le noyau de cette application restriction. On a des suites exactes courtes de modules galoisiens

$$0 \to P \to \mathbb{Z} \oplus Q \to M \to 0$$

et

$$0 \to M \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Par cohomologie galoisienne on obtient des suites exactes

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to H^1(k, M) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to 0$$

et

$$0 \to H^1(k, M) \to H^2(k, P) \to H^2(k, \mathbb{Z} \oplus Q).$$

Cette dernière donne naissance à une suite exacte

$$0 \to H^1(k, M) \to \oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/2 \to H^1(k, \mathbb{Z}/2),$$

où i parcourt les $r \geq 1$ points fermés P_i de $\mathbf{P}^1$ à fibre singulière, déployée par une extension quadratique séparable de corps, de classe $a_i \in H^1(k(P_i), \mathbb{Z}/2)$, et l'application $\theta_i : \mathbb{Z}/2 \to H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ envoie 1 sur la norme (de $k(P_i)$ à k) de $a_i \in H^1(k(P_i), \mathbb{Z}/2)$.

On a en outre une relation de réciprocité [**7**, §2, Remark] qui implique ici que l'image de l'élément $(1, \ldots, 1) \in \oplus_i H^1(k(P_i), \mathbb{Z}/2)$ est la classe triviale dans $H^1(k, \mathbb{Z}/2)$.

Nous voulons montrer : si le nombre de fibres géométriques dégénérées de $X \to \mathbf{P}^1_k$ est supérieur ou égal à 4, alors il existe une extension finie séparable k'/k telle que $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Si E/k est une extension séparable de corps de degré impair, par passage à E, la famille $X_E \to \mathbf{P}^1_E$ reste relativement minimale : aucun résidu n'est annulé. On peut donc supposer que tous les points fermés de mauvaise réduction sont soit de degré 1 soit de degré pair.

Supposons qu'il existe un point fermé de mauvaise réduction P de degré pair au moins égal à 4. Par le lemme 2.1, on se ramène après extension de k à $k(P)$ à la situation où il y a au moins 4 points rationnels P_1, P_2, P_3, P_4 à fibre singulière. Comme la surface est par hypothèse déployée par une extension cyclique, les classes $a_i \in H^1(k(P_i), \mathbb{Z}/2) = H^1(k, \mathbb{Z}/2)$, qui sont non triviales, coïncident toutes avec une même classe non triviale $a \in H^1(k, \mathbb{Z}/2)$.

L'application $\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/2 \to H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ induit une application $(\mathbb{Z}/2)^4 \to H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ qui se factorise donc par $(\mathbb{Z}/2)^4 \to \mathbb{Z}/2$. Le groupe $H^1(k, M) = \mathrm{Ker}[\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/2 \to H^1(k, \mathbb{Z}/2)]$ contient donc au moins le noyau d'une application $(\mathbb{Z}/2)^4 \to \mathbb{Z}/2$, il est donc d'ordre au moins 8, et $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est donc d'ordre au moins 4.

Supposons désormais que les points fermés P_i de mauvaise réduction sont tous de degré 2 ou 1.

S'il y a au moins 4 points fermés P_i de mauvaise réduction de degré 1 sur k, l'argument ci-dessus permet de conclure.

Supposons qu'il y a au moins deux points fermés P_1, P_2 de degré 2. Comme la surface est par hypothèse déployée sur une extension cyclique, ceci impose que les extensions $k(P_i)/k$ coïncident en ces deux points. Soit donc L/k l'extension quadratique séparable de corps ainsi définie. En appliquant le lemme 2.1, on se ramène après extension de k à L au cas où la fibration $X \to \mathbf{P}^1_k$ a des fibres singulières au-dessus d'au moins 4 points k-rationnels, cas qui a déjà été réglé.

On peut donc supposer que l'ensemble des degrés des points fermés à mauvaise réduction est soit $(2,1,1,1)$ soit $(2,1,1)$.

Considérons le cas $(2,1,1,1)$. Comme la surface est par hypothèse déployée sur une extension cyclique, ceci impose que les extensions quadratiques associées à $a_i \in H^1(k(P_i),\mathbb{Z}/2)$ pour P_i k-rationnel coïncident avec une même classe $a \in H^1(k,\mathbb{Z}/2)$. Soit R le point fermé de degré 2, et soit $b \in H^1(k(R),\mathbb{Z}/2)$ le résidu en ce point. L'application $\oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \to H^1(k,\mathbb{Z}/2)$ envoie (x,y,z,t) sur $(x+y+z).a+t.\mathrm{Norm}_{k(R)/k}(b) \in H^1(k,\mathbb{Z}/2)$. On sait que la classe $(1,1,1,1)$ a une image triviale. Donc $3a+\mathrm{Norm}_{k(R)/k}(b)$ est trivial dans $H^1(k,\mathbb{Z}/2)$. Ceci implique $a = \mathrm{Norm}_{k(R)/k}(b)$, et cet élément est non trivial dans $H^1(k,\mathbb{Z}/2)$. L'application $\oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \to H^1(k,\mathbb{Z}/2)$ envoie donc (x,y,z,t) sur $(x+y+z+t).a$ dans $H^1(k,\mathbb{Z}/2)$. C'est donc simplement la somme $(\mathbb{Z}/2)^4 \to \mathbb{Z}/2$. Son noyau est $(\mathbb{Z}/2)^3$, on a donc $H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{X})) = (\mathbb{Z}/2)^2$.

Montrons pour finir que le cas $(2,1,1)$ n'existe pas. Comme ci-dessus, les extensions quadratiques associées à $a_i \in H^1(k(P_i),\mathbb{Z}/2)$ pour P_i k-rationnel coïncident avec une même classe non triviale $a \in H^1(k,\mathbb{Z}/2)$. Soit Q le point fermé de degré 2, et soit $b \in H^1(k(Q),\mathbb{Z}/2)$ le résidu en ce point. Ceci correspond à une extension quadratique séparable $L/k(Q)$. Sous nos hypothèses, l'extension L/k est cyclique de groupe de Galois $\mathbb{Z}/4$. Sous cette hypothèse, on vérifie que la norme $H^1(k(Q),\mathbb{Z}/2) \to H^1(k,\mathbb{Z}/2)$ envoie la classe b sur la classe a. Par ailleurs on sait (réciprocité) que la classe $(1,1,1)$ a une image triviale par l'application $\oplus_{i=1}^2 \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \to H^1(k,\mathbb{Z}/2)$. Mais ceci dit que $3a = a \in H^1(k,\mathbb{Z}/2)$ est nul. Contradiction. □

3. Surfaces de del Pezzo

On a l'énoncé connu (Châtelet, Manin, Iskovskikh, voir [**23**, Thm. 2.1]) :

Proposition 3.1. — *Soit X une surface de del Pezzo de degré $d \geq 5$ sur un corps k. Si X possède un point k-rationnel, alors X est k-rationnelle.*

Proposition 3.2. — *Soient k un corps et $X \subset \mathbf{P}^4_k$ une surface de del Pezzo de degré 4 sur k déployée par une extension cyclique K/k. Supposons que X est k-minimale. Alors :*

(i) Il existe une extension de corps E/k telle que $H^1(E, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

(ii) Le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ n'est pas facteur direct d'un module de permutation.

(iii) Si X possède un k-point, il existe une extension finie séparable k'/k telle que $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Démonstration. — Soit X une surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps k, possédant un k-point, déployée sur une extension cyclique de k. Supposons X k-minimale. D'après [**13**, Thm. 2], la surface X n'est pas k-rationnelle.

Si X possède un k-point P non situé sur les 16 droites (géométriques) exceptionnelles, en éclatant le point P on obtient une surface cubique lisse Y sur k équipée d'une fibration en coniques sur $Y \to \mathbf{P}^1_k$, avec 5 fibres géométriques dégénérées, déployée sur une extension cyclique de k. Si cette fibration n'est pas relativement minimale, soit $Z \to \mathbf{P}^1_k$ un modèle relativement minimal. Soit r le nombre de fibres géométriques dégénérées. Si $r \leq 3$, alors d'après la Proposition 2.2, Y est k-rationnelle, ce qui est exclu. Ainsi on a $r \geq 4$. La Proposition 2.3 donne alors l'existence d'une extension finie séparable k'/k telle que $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{Z})) \neq 0$. Comme on passe de X à Z par des séries d'éclatements en des points fermés séparables, les modules galoisiens $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$ sont isomorphes à addition de modules de permutation près. On a donc $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Si X possède un k-point, et le corps k possède au moins 23 éléments, alors il existe un k-point sur X hors des 16 droites [**17**, Chap. 4, §8, Teor. 8.1= Thm. 30.1]. Supposons que k est fini et X est déployée sur l'extension cyclique K/k. Il existe une extension finie L/k linéairement disjointe de K sur laquelle X possède un point L-rationnel non situé hors des 16 droites. La L-surface de del Pezzo de degré 4 $X \times_k L$ est L-minimale et déployée par l'extension cyclique $K.L/L$. L'argument ci-dessus donne alors une extension finie k' de L telle que $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Ceci établit le point (iii).

Pour établir (i), on utilise l'astuce du passage au point générique (voir [**6**, Thm. 2.B.1]). Soit $F = k(X)$ le corps des fonctions de X. La F-variété $X_F = X \times_k F$ possède un F-point. Elle est F-minimale, car k est algébriquement clos dans $F = k(X)$. Le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ ne change pas par passage du corps de base de k à F, il est déployé par l'extension k'/k comme par l'extension F'/F, où $F' := F.K$. Comme le corps F est infini, il existe un F-point de X non situé sur les droites (géométriques) de X. La F-surface minimale X_F est déployée par l'extension cyclique F'/F. Par le point (iii), il existe une extension finie séparable E/F telle que $H^1(E, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$, ce qui donne (i).

Ceci implique que le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ n'est pas facteur direct d'un module de permutation (Théorème 1.1), ce qui donne (ii). □

On s'intéresse maintenant aux surfaces de del Pezzo de degré 3, 2 et 1 déployées par une extension cyclique K/k du corps de base k. On note $Frob$ un générateur du groupe cyclique $\mathrm{Gal}(K/k)$. Les diverses actions du groupe cyclique $\mathrm{Gal}(K/k)$ sur le groupe $\mathrm{Pic}(X_K) = \mathrm{Pic}(\overline{X})$ ont été classifiées par Frame [**8**], puis Swinnerton-Dyer [**21**], corrigées par Manin [**17**, Chapitre IV], corrigées et complétées par Urabe [**22**] puis récemment par Banwait, Fité et Loughran [**1**].

Dans [**17**, Chap. IV, Table I, Colonne 5] et dans [**1**, Table 7.1, Colonne 5], une surface a le symbole $\prod_m m^{n_m}$, avec tous les $n_m \geq 0$, si pour m donné l'ensemble Galois invariant des racines primitives m-ièmes de l'unité parmi les valeurs propres de $Frob$ a n_m éléments. En d'autres termes, on décompose le polynôme caractéristique de $Frob$ agissant sur $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{C}$ en regroupant les orbites des racines sous l'action du groupe de Galois. On appellera ce symbole le symbole caractéristique de $Frob$ (pour son action sur $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{C}$).

Urabe [**22**, Supplement] utilise le symbole de Frame [**8**]. Le symbole de Frame $\prod_m m^{n_m}$, avec $n_m \in \mathbb{Z}$, correspond à une réécriture du polynôme caractéristique de $Frob$ pour son action sur $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{C}$ comme un produit $\prod_m (t^m - 1)^{n_m}$, avec $n_m \in \mathbb{Z}$. Il y a une unique façon d'écrire le polynôme caractéristique comme un tel produit (avec des entiers $m > 0$ distincts non nuls, et des n_m non nuls). Soit $r > 1$. Pour calculer le symbole de Frame de $Frob^r$, dans le produit $\prod_m (t^m - 1)^{n_m}$ attaché au symbole de Frame $\prod_m m^{n_m}$ de $Frob$, pour chaque entier m on écrit $r = uv$ et $m = uw$ (u, v, w entiers positifs) avec $(v, w) = 1$, et on remplace $(t^m - 1)$ par $(t^w - 1)^u$, puis on regroupe les termes.

Dans les tables de [**22**] et [**1**], les symboles (d'un type ou de l'autre type) associés à des surfaces différentes peuvent coïncider mais c'est rare.

La proposition suivante m'a été indiquée par K. Shramov.

Proposition 3.3. — *(A. Trepalin) Soit X une surface cubique lisse sur un corps k, déployée par une extension cyclique K/k. Supposons que X est k-minimale. Il existe alors une extension finie séparable de corps k'/k telle que $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.*

Démonstration. — Nous utilisons ici la table 7.1 de l'article [**1**]. Les actions correspondant à des surfaces k-minimales, c'est-à-dire d'indice $i(X) = 0$, sont celles numérotées 1, 2, 3, 4, 5 dans la table 7.1 de [**1**]. Pour les numéros 3 et 5, on a donc $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$. Pour les autres, on a $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$.

Pour le numéro 1, les valeurs propres de $Frob$ sont $1, 3^2, 12^4$, c'est-à-dire 1, les deux racines cubiques primitives de l'unité et les 4 racines primitives 12-ièmes de l'unité. Si on remplace $Frob$ par $Frob^4$, c'est-à-dire si on passe à l'extension k'/k de degré 4, les valeurs propres de $Frob^4$ sont $1, 3^6$. Dans la table, seul le numéro 3 a ces valeurs propres. Et à ce niveau on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Pour le numéro 2, les valeurs propres de $Frob$ sont $1, 3^2, 6^4$. Si on remplace $Frob$ par $Frob^2$, c'est-à-dire si on passe à l'extension k'/k de degré 2, les valeurs propres de $Frob^2$ sont $1, 3^6$. Dans la table, seul le numéro 3 a ces valeurs propres. Et à ce niveau on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Pour le numéro 4, les valeurs propres de $Frob$ sont $1, 9^6$. Si on remplace $Frob$ par $Frob^3$, c'est-à-dire si on passe à l'extension k'/k de degré 3, les valeurs propres de $Frob^3$ sont $1, 3^6$. Dans la table, seul le numéro 3 a ces valeurs propres. Et à ce niveau on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$. □

Proposition 3.4. — *Soit X une surface de del Pezzo de degré 2 sur un corps k, déployée par une extension cyclique K/k. Supposons que X est k-minimale. Il existe alors une extension finie séparable de corps k'/k telle que $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.*

Démonstration. — On utilise ici la table 1 de l'article [**22**] de T. Urabe et les symboles de Frame.

Il suffit de discuter les surfaces numérotées de 1 à 19, qui correspondent à des surfaces k-minimales. Le cas 1 de la table 1, comme Daniel Loughran me l'a signalé, contient une erreur. Son indice n'est pas 0, il est au moins 2, la surface n'est pas k-minimale. On ne discute donc que les cas 2 à 19.

Pour les surfaces avec $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$ il n'y a rien à faire.

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère une puissance $Frob^r$ de $Frob$ et on note k' le corps fixe de $Frob^r$.

Cas 5. En prenant $Frob^5$, on trouve $1^{-4}.2^6$ comme nouveau symbole de Frame. La seule possibilité est le cas 2, si k' est le corps fixe de $Frob^5$, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 6. En prenant $Frob^2$, on trouve 4^2. La seule possibilité est le cas 3, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 7. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^{-4}.2^6$. La seule possibilité est le cas 2, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 15. En prenant $Frob^9$, on trouve $1^{-4}.2^6$. La seule possibilité est le cas 2, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 16. En prenant $Frob^7$, on trouve $1^{-6}.2^7$. La seule possibilité est le cas 8, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 17. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^{-2}.2^1.4^2$. La seule possibilité est le cas 9, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 18. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^{-1}.2^2.5^{-1}.10^1$. La seule possibilité est le cas 13, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Case 19. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^{-6}.2^7$. La seule possibilité est le cas 8, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$. □

Remarque 3.5. — Dans [**16**], l'auteur mentionne trois types de surfaces de del Pezzo de degré 2 dans la table 1 d'Urabe qui auraient tous leurs groupes $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ triviaux. Ce sont les types 1, 5 et 16. Pour le cas 1, nous avons vu que ce n'est pas une surface k-minimale. Pour les deux autres cas, il doit s'agir d'une erreur de calcul dans [**16**].

Proposition 3.6. — *Soit X une surface de del Pezzo de degré 1 sur un corps k, déployée par une extension cyclique K/k. Supposons que X est k-minimale. Il existe alors une extension finie séparable k'/k telle que $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.*

Démonstration. — On utilise ici l'article [**22**] de Urabe et sa table 2. On ne considère que les surfaces d'indice 0. Si $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$, on a fini. Sinon, on est dans l'un des cas suivants, pour lesquels on utilise les symboles de Frame. On note $Frob$ un générateur de $\mathrm{Gal}(K/k)$. Dans chacun des cas ci-dessous, on considère une puissance $Frob^r$ de $Frob$ et on note k' le corps fixe de $Frob^r$.

Cas 5. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^1.2^{-2}.4^3$ comme nouveau symbole de Frame. La seule possibilité est le cas 3, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 6. En prenant $Frob^5$, on trouve $1^{-3}.2^4.4^1$. La seule possibilité est le cas 1, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Case 7. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^{-1}.2^3.4^{-1}.8^1$. La seule possibilité est le cas 4, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 29. En prenant $Frob^{10}$, on trouve $1^{-3}.3^4$. La seule possibilité est le cas 9, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 30. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^1.4^{-2}.8^2$. La seule possibilité est le cas 23, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 31. En prenant $Frob^5$, on trouve $1^1.2^{-4}.4^4$. La seule possibilité est le cas 17, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 32. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^1.2^{-4}.4^4$. La seule possibilité est le cas 17, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 33. En prenant $Frob^2$, on trouve 9^1. La seule possibilité est le cas 14, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 34. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^{-1}.5^2$. La seule possibilité est le cas 11, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 35. En prenant $Frob^2$, on trouve $1^{-1}.5^2$. La seule possibilité est le cas 11, $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 36. En prenant $Frob^3$, on trouve $1^{-3}.2^2.4^2$. La seule possibilité est le cas 10, $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Cas 37. En prenant $Frob^2$, on trouve $1^{-3}.3^4$. La seule possibilité est le cas 9, on a $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$. □

Remarque 3.7. — Comme le note un rapporteur, dans les propositions 3.6 et 3.4 un certain nombre de cas relèvent aussi du cas des surfaces fibrées en coniques, déjà traitées dans la proposition 2.3.

Remarque 3.8. — L'énoncé du théorème 5.4.3 de [**16**] est identique à l'énoncé ci-dessus. Il convient néanmoins de corriger la démonstration donnée dans [**16**] pour le cas 6, car le choix fait là de $Frob^4$ mène, comme le dit l'auteur, à la surface numéro 102, mais cette dernière a $H^1 = 0$.

4. Conclusion

Récapitulons. Il s'agit de montrer :

Théorème 4.1. — *Soient k un corps et X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Supposons que X possède un point k-rationnel et que X soit déployée par une extension cyclique de k. Si X n'est pas k-rationnelle, alors :*

(i) Il existe une extension k'/k finie séparable telle que $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

(ii) Le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ n'est pas un facteur direct d'un module de permutation.

(iii) La k-variété X n'est pas stablement k-rationnelle.

Démonstration. — On peut supposer que X est k-minimale, car si $f : Y \to X$ est un k-morphisme birationnel de k-surfaces projectives lisses géométriquement rationnelles, si Y est déployée par une extension cyclique de k, il en est de même de X. D'après le théorème 1.5, on peut en outre supposer que X ou bien est une surface de del Pezzo k-minimale de degré d avec $1 \leq d \leq 9$, ou bien est munie d'une fibration en coniques relativement minimale au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$.

Si X est une surface de del Pezzo de degré d avec $5 \leq d \leq 9$, alors X est k-rationnelle d'après les propositions 1.6 et 3.1.

Si X est une surface de del Pezzo k-minimale de degré $d = 4$, resp. $d = 3$, resp. $d = 2$, resp. $d = 1$, alors d'après la proposition 3.2 , resp. 3.3, resp. 3.4, resp. 3.6, il existe une extension finie séparable k'/k avec $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Si X est munie d'une fibration en coniques $X \to \mathbf{P}^1_k$ relativement k-minimale, les propositions 2.2 et 2.3 assurent que soit X est k-rationnelle, soit il existe une extension finie séparable k'/k avec $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) \neq 0$.

Ceci donne (i), et les autres énoncés suivent (Théorème 1.1). □

Remarque 4.2. — On aimerait avoir une démonstration du théorème 4.1 qui ne passe pas par l'analyse cas par cas utilisée dans le présent article, et spécialement qui évite celle utilisée pour les surfaces de del Pezzo de degré 1 à 3. Pour les termes employés dans ce qui suit, on renvoie à [**6**]. Soit k un corps quasi-fini, et soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, possédant un k-point. Comme le groupe de Galois absolu de k est procyclique, l'hypothèse $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$ pour toute extension finie k'/k, implique que le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est un facteur direct d'un module de permutation (théorème d'Endo et Miyata, cf. [**5**, Prop. 2, p. 184]). Le corps k est de dimension cohomologique 1. Soit S le k-tore dual du module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$. Il existe alors un unique torseur universel $\mathcal{T} \to X$ sur X (à isomorphisme près). C'est un torseur sous le k-tore S, lequel est un facteur direct d'un k-tore quasi-trivial. Ce torseur est donc génériquement scindé (théorème 90 de Hilbert). La k-variété $\mathcal{T}$ est donc k-birationnelle au produit $X \times_k S$. C'est une question ouverte de savoir si l'espace total d'un torseur universel $\mathcal{T}$ avec un k-point au-dessus d'une surface géométriquement rationnelle X est une variété (stablement) k-rationnelle. Si c'était le cas, l'argument ci-dessus montrerait au moins que, sous l'hypothèse $H^1(k', \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$ pour toute extension finie k'/k, la surface X est facteur direct d'une k-variété k-rationnelle.

Remerciements. A. Pirutka m'a signalé la question de B. Hassett, et a commenté cet article. K. Shramov m'a montré la proposition 3.3 (A. Trepalin) pour les surfaces cubiques. D. Loughran m'a donné des précisions sur l'article [**22**]. Après avoir vu une première version du présent article, il a aussi attiré mon attention sur l'article [**16**], dont certains des calculs pour les surfaces de del Pezzo coïncident avec ceux des propositions 3.4 et 3.6 ci-dessus. Des erreurs dans [**16**] n'ont pas permis à l'auteur d'obtenir le résultat général pour les surfaces de del Pezzo de degré 2. Les critiques de deux rapporteurs sur la version initiale de cet article m'ont permis de préciser certains points.

Références

[1] B. Banwait, F. Fité et D. Loughran, Del Pezzo surfaces over finite fields and their Frobenius traces, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, à paraître. https ://arxiv.org/pdf/1606.00300.pdf

[2] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Variétés stablement rationnelles non rationnelles, Ann. of Math. **121** (1985) 283–318.

[3] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity, and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58**, Part I (1995) 1–64.

[4] J.-L. Colliot-Thélène et D. Coray, L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques, Compositio Mathematica **39** no. 3 (979) 301–332.

[5] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. sci. Éc. Norm. Sup. (4) **10** (1977) 175–229.

[6] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II, Duke Math. J. **54** (1987) 375–492.

[7] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, On the Chow group of rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch, Duke Math. J. **48** no. 2 (1981) 421–447.

[8] J. S. Frame, The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents, Ann. Math. Pura Appl. (4) **32** (1951), 83–119.

[9] W. Fulton, *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer-Verlag (1984).

[10] S. Gille, Permutation modules and Chow motives of geometrically rational surfaces, with appendix by J.-L. Colliot-Thélène, J. Algebra **440** (2015) 443–463.

[11] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson, North-Holland, Paris, 1968, p. 88–188.

[12] V. A. Iskovskikh, Surfaces rationnelles avec un pinceau de courbes rationnelles et avec carré de la classe canonique positif (en russe), Mat. Sbornik **83** (125) no. 1 (1970) 90–119. Trad. ang. Math. USSR-Sb. **12** (1970), 91–117.

[13] V. A. Iskovskikh, Propriétés birationnelles d'une surface de degré 4 dans $\mathbf{P}^4_k$, Mat. Sbornik **88** (130) no. 1 (1972), trad. ang. Math. USSR Sbornik **17** no. 1 (1972).

[14] V. A. Iskovskikh, Modèles minimaux des surfaces rationnelles sur un corps quelconque (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 19–43, 237, trad. ang. Math. USSR Izvestija **14** no1 (1980) 17–39.

[15] J. Kollár, Rational Curves on Algebraic Varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 3, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1996).

[16] Shuijing Li, Rational points on del Pezzo surfaces of degree 1 and 2, thèse, Rice University, https ://arxiv.org/pdf/0904.3555.pdf

[17] Yu. I. Manin, *Formes cubiques*, Nauka, Moscou, 1972 (en russe). Traduction en anglais (avec une numérotation différente), 2ème édition, North Holland 1986.

[18] A. Pirutka, Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology, in Proc. AMS 2015 Summer Conference (Salt Lake City).

[19] J-P. Serre, Corps locaux, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, Actualités scientifiques et industrielles **1296**, Hermann, Paris, 1968.

[20] J-P. Serre, Cohomological invariants, Witt invariants and trace forms, in *Cohomological invariants in Galois Cohomology*, University Lecture Series **28** (2003) Amer. Math. Soc.

[21] H.P.F. Swinnerton-Dyer, The zeta-function of a cubic surface over a finite field, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **63** (1967) 55–71.

[22] T. Urabe, Calculations of Manin's invariant for del Pezzo surfaces, Mathematics of computations, Volume **65**, Number 213, Jan. 1996, 247–258. Supplement, **65**, no. 213 (Jan. 1996) p. S15–S23.

[23] A. Várilly-Alvarado, Arithmetic of del Pezzo surfaces, in *Birational geometry, rational curves, and arithmetic* (F. Bogomolov, B. Hassett and Y. Tschinkel eds.) Simons Symposia **1** (2013), 293–319.

---

soumis le 27 novembre 2017 ; révisé le 14 juin 2018 ; révisé le 24 juillet 2018 ; accepté le 11 octobre 2018

J.-L. Colliot-Thélène, CNRS et Université Paris-Sud Université Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail : `jlct@math.u-psud.fr`