

Fibre spéciale des hypersurfaces de petit degré

Special fibre of low degree hypersurfaces

Jean-Louis Colliot-Thélène ^a

^a *CNRS, Mathématiques, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay*

Abstract

Building upon a result of J. Kollár on special fibres of families of hypersurfaces whose generic fibre satisfies the C_1 -hypothesis, we establish a property of special fibres of families of hypersurfaces whose generic fibre satisfies the C_2 -hypothesis.

To cite this article: J.-L. Colliot-Thélène, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I (.....).

Résumé

J. Kollár a obtenu un résultat sur les fibres spéciales des familles d'hypersurfaces dont la fibre générique satisfait l'hypothèse C_1 . Dans cette note on déduit de ce résultat une propriété des fibres spéciales des familles d'hypersurfaces dont la fibre générique satisfait l'hypothèse C_2 .

Pour citer cet article : J.-L. Colliot-Thélène, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I (.....).

1. Hypersurfaces de Fano et propriété C'_1

Théorème 1.1 (Kollár) *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit A un anneau de valuation discrète de corps résiduel k et de corps des fractions K . Soit \mathcal{X} un A -schéma propre et plat, intègre et régulier, de fibre générique \mathcal{X}_K une intersection complète lisse de multidegré (d_1, \dots, d_r) dans \mathbf{P}_K^n . Si l'on a $n \geq \sum_{i=1}^r d_i$, alors :*

(i) il existe une k -variété géométriquement intègre Y et un k -morphisme de Y dans la fibre spéciale \mathcal{X}_k ;

(ii) si chaque composante irréductible réduite de \mathcal{X}_k est lisse sur k , alors il existe une composante irréductible réduite de \mathcal{X}_k qui est une k -variété géométriquement intègre.

Email address: j1ct@math.u-psud.fr (Jean-Louis Colliot-Thélène).

On notera que la composante irréductible géométriquement intègre dont l'existence est assurée dans (ii) n'a pas forcément la multiplicité 1 dans le diviseur de \mathcal{X} défini par \mathcal{X}_k .

Kollár [7] établit ce résultat sous l'hypothèse plus générale que la fibre générique est une K -variété de Fano (i.e. est lisse, à faisceau anticanonique ample).

On dit qu'un corps k a la propriété C_i si toute forme homogène à coefficients dans k , de degré d , en $n + 1 > d^i$ variables a un zéro non trivial dans k .

On dit qu'un corps k a la propriété C'_i si tout système de formes homogènes F_1, \dots, F_r à coefficients dans k , de degrés respectifs d_1, \dots, d_r , en $n + 1 > \sum_{j=1}^r d_j^i$ variables a un zéro non trivial dans k .

Un corps k est dit pseudo-algébriquement clos si toute k -variété géométriquement intègre possède un point k -rationnel. J. Ax (1968) a conjecturé que tout corps pseudo-algébriquement clos est C_1 . Kollár déduit immédiatement de son théorème la preuve de cette conjecture en caractéristique zéro.

Théorème 1.2 (Kollár) *Tout corps pseudo-algébriquement clos de caractéristique zéro a la propriété C'_1 .*

2. Hypersurfaces de degré d en $n + 1 > d^2$ variables

Théorème 2.1 *Soit k un corps de caractéristique zéro. Il existe un corps F contenant k tel que :*

- (a) k est algébriquement fermé dans F .
- (b) F est un corps C'_1 .

Démonstration On procède exactement comme dans [4]. Soit k un corps. Soit E un ensemble de k -variétés en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de k -variétés géométriquement intègres sans k -point. Si A est un sous-ensemble fini de E on note k_A le corps des fonctions du produit des variétés dans A , produit qui est une k -variété géométriquement intègre. A toute inclusion $A \subset B$ de sous-ensembles finis de E est associée une inclusion naturelle $k_A \subset k_B$. On a donc un système inductif filtrant, sa limite inductive $\phi(k)$ est un corps dans lequel k est algébriquement fermé. On construit alors une suite d'extensions de k en posant $\phi_0(k) = k$, et $\phi_{n+1}(k) = \phi(\phi_n(k))$ pour tout entier n . La limite inductive des $\phi_n(k)$ est un corps F dans lequel k est algébriquement fermé. Le corps F est clairement pseudo-algébriquement clos. D'après le théorème 1.2 c'est donc un corps C'_1 . \square

Remarque 1 Une telle construction n'est pas nouvelle, elle a été faite dans le cadre des corps de dimension cohomologique 1 ou 2. Elle apparaît dans la démonstration du théorème principal de Merkur'ev et Suslin, elle est reprise dans [4], [3], [2].

Théorème 2.2 *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit A un anneau de valuation discrète de corps résiduel k et de corps des fractions K . Soit \mathcal{X} un A -schéma propre et plat, intègre et régulier, de fibre générique \mathcal{X}_K une intersection complète lisse de multidegré (d_1, \dots, d_r) dans \mathbf{P}_K^n . Si l'on a $n \geq \sum_{i=1}^r d_i^2$, alors il existe une composante de la fibre spéciale \mathcal{X}_k qui est de multiplicité 1 et qui est une k -variété géométriquement intègre.*

Démonstration On procède exactement comme dans [2]. Comme la caractéristique de k est nulle, le complété de A est k -isomorphe à $k[[t]]$, où t est l'image d'une uniformisante de A . Soit F/k donné par le théorème 2.1. C'est un corps C'_1 . D'après un théorème de Lang ([8], [9]) ceci implique que le corps des fractions rationnelles en une variable $F(t)$ est un corps C'_2 . Le théorème de Greenberg [5] implique alors que $F((t))$ est un corps C'_2 . Ainsi $\mathcal{X}_K(F((t))) \neq \emptyset$. Comme \mathcal{X} est propre sur l'anneau de valuation discrète A , un point de $\mathcal{X}_K(F((t)))$ définit un A -morphisme $\text{Spec}F[[t]] \rightarrow \mathcal{X}$. On considère alors l'anneau local C de \mathcal{X} en le point $y \in \mathcal{X}$ image du point fermé de $\text{Spec}F[[t]]$. C'est un point de la fibre spéciale de \mathcal{X}/A .

En utilisant la régularité de \mathcal{X} , donc de C , on voit aisément que la fibre spéciale de \mathcal{X}/A au voisinage de y n'a qu'une composante, et que cette composante est de multiplicité 1 et régulière au voisinage de y . En utilisant le fait que k est algébriquement fermé dans F , on montre que k est algébriquement fermé dans le corps des fractions de cette composante (pour les détails de cet argument, voir [2], démonstration du Thm. 4.2). \square

Remarque 2 Il est naturel de se demander si le théorème 2.2 vaut sans hypothèse sur la caractéristique du corps résiduel. Lorsque le corps résiduel est fini, cette question n'est pas sans rapport avec la question ouverte suivante (Kato), version faible d'une conjecture d'Artin :

Sur un corps p -adique K , toute forme lisse de degré d en $n + 1 > d^2$ variables admet-elle des zéros dans des extensions finies de K dont le pgcd des degrés est égal à 1 ?

Pour les formes de degré premier, cette dernière question a une réponse positive (Kato-Kuzumaki [6]).

3. Une conjecture

Comme on l'explique dans la remarque 4 ci-après, la conjecture suivante représente une généralisation naturelle du théorème d'Ax et Kochen.

Conjecture *Soient k un corps de nombres et $f : X \rightarrow Y$ un k -morphisme dominant de k -variétés projectives, lisses, géométriquement intègres. Soit $K = k(Y)$ le corps des fonctions de Y . Supposons la fibre générique X_K de f géométriquement intègre. Si pour tout anneau de valuation discrète $A \subset K$ de corps des fractions K , contenant k , de corps résiduel κ_A , il existe un A -modèle intègre régulier \mathcal{X} de X_K , propre sur A , dont la fibre spéciale \mathcal{X}_{κ_A} contient une composante géométriquement intègre de multiplicité 1, alors pour presque toute place v du corps de nombres k , l'application $X(k_v) \rightarrow Y(k_v)$ induite par f sur les points k_v -rationnels de X est surjective.*

Remarque 3 Lorsque Y est de dimension 1, la méthode des fibrations (voir [10]) permet d'établir cette conjecture.

Remarque 4 Soient k un corps de nombres, d et n des entiers avec $n \geq d^2$. Soit N la dimension projective de l'espace des formes de degré d en $n + 1$ variables. L'annulation de la forme universelle de degré d en $n + 1$ variables définit un fermé géométriquement intègre Z dans le produit d'espaces projectifs $\mathbf{P}_k^n \times_k \mathbf{P}_k^N$. Soit $X \rightarrow Z$ une résolution des singularités de Z . La conjecture ci-dessus, appliquée à la composée de $X \rightarrow Z$ et de la projection $Z \rightarrow \mathbf{P}_k^N$, et combinée avec le théorème 2.2 donne un énoncé qu'on reconnaît comme le théorème d'Ax et Kochen [1] : il existe un ensemble fini $S(k, d)$ de places v de k tel que toute forme de degré d en $n + 1 > d^2$ variables, à coefficients dans k_v , possède un zéro non trivial à coordonnées dans k_v .

Références

- [1] J. Ax et S. Kochen, Diophantine problems over local fields, I, Amer. J. Math. **87** (1965) 605–631.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kunyavskii, Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d'espaces homogènes. J. Algebraic Geom. **15** (2006) 733–752.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène et D. Madore, Surfaces de Del Pezzo sans point rationnel sur un corps de dimension cohomologique un, Journal de l'Institut Mathématique de Jussieu **3** (2004) 1-16.
- [4] A. Ducros, Dimension cohomologique et points rationnels sur les courbes, J. Algebra **203** (1998) 349–354.

- [5] M. J. Greenberg, Rational points in Henselian discrete valuation rings, *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.* **31** (1966) 59–64.
- [6] K. Kato et T. Kuzumaki, The dimension of fields and algebraic K-theory, *Journal of Number Theory* **24** (1986) 229–244.
- [7] J. Kollár, A conjecture of Ax and degenerations of Fano varieties, à paraître.
- [8] S. Lang, On quasi algebraic closure, *Ann. of Math. (2)* **55** (1952) 373–390.
- [9] A. Pfister, *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series **217**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [10] A. Skorobogatov, On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation, *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988–1999*, éd. C. Goldstein, *Progr. Math.* **91**, Birkhäuser (1990), p. 205–219.