

TORSION DANS LE GROUPE DE CHOW DE CODIMENSION DEUX

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, JEAN-JACQUES SANSUC ET
CHRISTOPHE SOULÉ

Soit X une variété quasi-projective, lisse et géométriquement irréductible sur un corps k . Si i est un entier positif ou nul, on désigne par $CH^i(X)$ le groupe des cycles de codimension i sur X modulo l'équivalence rationnelle (i.e. modulo le groupe engendré par les diviseurs des fonctions sur les sous-variétés de codimension $i - 1$ de X). Le groupe $CH^0(X)$ est \mathbf{Z} , et $CH^1(X)$ n'est autre que le groupe de Picard $\text{Pic}(X)$. Comme pour X/k projective le foncteur $\mathcal{P}ic_{X/k}$ est représentable, on peut, en utilisant en particulier le théorème de Mordell–Weil–Néron, établir des théorèmes de finitude pour $CH^1(X)$ et étudier l'image de ce groupe par le morphisme qui associe à un cycle sa classe fondamentale, ceci dans les différentes théories cohomologiques.

Une telle étude est-elle possible pour $CH^2(X)$? Le problème est rendu difficile par le fait que CH^2 n'est pas en général un foncteur représentable. Cependant la formule de Bloch

$$CH^2(X) = H^2(X, \mathcal{K}_2),$$

analogue de $CH^1(X) = H^1(X, \mathbf{G}_m)$, fournit une interprétation cohomologique de $CH^2(X)$. La cohomologie est ici la cohomologie de Zariski, et \mathcal{K}_2 est le faisceau associé au préfaisceau qui à un ouvert de Zariski $U \subset X$ associe $K_2(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$, le groupe K_2 de l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. On sait de plus que, grâce à la résolution de Gersten (cf. Quillen [33]), l'étude du faisceau \mathcal{K}_2 peut se ramener à celle du groupe K_2 du corps des fonctions rationnelles de X .

Un résultat récent de Merkur'ev et Suslin [29] affirme que, pour tout corps F et tout entier n inversible dans F , le symbole galoisien

$$K_2(F)/n \rightarrow H^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme. Un résultat analogue pour $K_2(F)/p^m$, où p est la caractéristique de F , a été obtenu par Bloch, Gabber et Kato [6]. Comme pressenti par Bloch [2, 5], ces résultats doivent avoir des conséquences sur le groupe $CH^2(X)$, et donner des théorèmes de finitude ainsi que des renseignements sur le morphisme de classe fondamentale. C'est l'étude de ces

Received May 5, 1983.

conséquences (déjà commencée dans [5] et [29] §18) que l'on entreprend ici. Comme les résultats utilisés portent, non pas sur le K_2 d'un corps, mais sur ses quotients modulo n , les conséquences obtenues ne concernent que le sous-groupe de torsion de $CH^2(X)$.

Le passage du groupe K_2 du corps des fonctions de X à $CH^2(X)$ est fait au paragraphe 1, sous la forme d'un diagramme commutatif (proposition 1, voir aussi corollaire 4). Il s'inspire des résultats de Bloch [3] dans sa démonstration d'un théorème de Rojzman sur les 0-cycles de torsion. On obtient comme première conséquence que le noyau de la multiplication par n dans $CH^2(X)$ est fini si n est premier à la caractéristique de k , quand k est algébriquement clos (résultat établi aussi dans [5] et [29] loc. cit.), et aussi quand k est local. Quand k est le corps des complexes, outre une conséquence concernant une jacobienne intermédiaire de Griffiths (corollaire 5), on montre (cf. [4] 5.12) que l'image d'une classe du groupe de cohomologie singulière $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n)$ par les morphismes de Bockstein associés aux suites exactes de coefficients

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/m \rightarrow \mathbb{Z}/mn \rightarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow 0$$

a une restriction nulle à un ouvert dense de $X(\mathbb{C})$ (proposition 2). Quand $k = \mathbb{R}$ et $\dim X = 2$ on obtient une minoration de $H_{\text{ét}}^3(X, \mathbb{Z}/2)$ en fonction du nombre de composantes connexes réelles.

Quand k est un corps fini, les conjectures de Weil prouvées par Deligne permettent d'obtenir davantage d'information sur la torsion de $CH^2(X)$. On montre ainsi que, si X est projective et lisse sur un corps fini, le sous-groupe de torsion de $CH^2(X)$ est *fini* (théorème 1). La preuve s'obtient en déduisant des conjectures de Weil la finitude du groupe de cohomologie l -adique $H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ —quand l est un nombre premier inversible dans k —et, grâce à un résultat non publié de O. Gabber [17], la nullité de ce groupe pour presque tout l . La preuve de la finitude de la torsion p -primaire utilise la conjecture de Weil en cohomologie cristalline, via un résultat de finitude également démontré par O. Gabber (théorème 3). On montre aussi de cette façon que la classe fondamentale l -adique

$$CH^2(X)_{l\text{-tors}} \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))$$

est injective sous les mêmes hypothèses. Pour X une surface, ceci donne une nouvelle preuve du résultat fondamental de Kato et Saito [22] sur le corps de classes non ramifié pour une surface sur un corps fini (§2.4), du moins pour la partie première à p .

Dans un dernier paragraphe, on s'intéresse au cas où k est un corps de fonctions sur un corps fini F_q de caractéristique p . On étudie des surfaces X/k ayant les deux propriétés suivantes: d'une part, sur la clôture algébrique \bar{k} de k , le groupe $CH^2(X \times_k \bar{k})$ est "représentable", d'autre part le noyau de la restriction $CH^2(X) \rightarrow CH^2(X \times_k \bar{k})$ est annulé par un certain entier n . Pour X/k une surface rationnelle sur un corps de fonctions d'une ou deux variables sur F_q , et

pour X/k une surface fibrée en coniques sur une courbe C de genre arbitraire sur un corps de fonctions d'une variable sur F_q , avec $p \neq 2$, l'idée suivante permet d'établir la finitude de la torsion première à p de $CH^2(X)$: considérer \tilde{X}/S un modèle projectif et lisse de X/k , avec S lisse sur F_q , et contrôler la n -torsion de $CH^2(X)$ à partir de celle de $CH^2(\tilde{X})$, finie, à la torsion p -primaire près, d'après les paragraphes précédents. Une méthode différente [9] permet d'étudier la torsion de $CH^2(X)$ pour X/k une surface rationnelle sur un corps de type fini sur \mathbb{Q} .

Nous remercions O. Gabber pour nous avoir permis d'insérer sa démonstration du théorème 3, et pour d'utiles conversations. Signalons qu'une partie des résultats de cet article ont été annoncés dans [11].

§1. Cohomologie étale et cycles de torsion. On se propose d'établir quelques résultats généraux sur les rapports entre le groupe de Chow $CH^2(X)_{\text{tors}}$ des cycles de codimension 2 et de torsion et certains groupes de cohomologie étale. Les méthodes sont celles de Bloch [3, 4, 5] complétées par les théorèmes de [29] et [6] sur les symboles galoisien et logarithmique.

1.0. *Notations.* Soit Y un schéma. On note $H^i(Y, \)$ le i -ème groupe de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(Y, \)$ et $H^i_{\text{Zar}}(Y, \)$ le i -ème groupe de cohomologie pour la topologie de Zariski. Si n est un entier inversible sur Y , on note indifféremment $\mu_n^{\otimes j}$ ou $(\mathbb{Z}/n)(j)$ le faisceau étale des racines n -ièmes de l'unité tordu j fois: si $j < 0$, on le définit par $\text{Hom}(\mu_n^{\otimes(-j)}, \mathbb{Z}/n)$. Lorsqu'il n'y a pas de doute sur n , on note $H^i(Y, j)$ le groupe $H^i(Y, \mu_n^{\otimes j})$. On note \mathcal{H}_i , ou parfois $\mathcal{H}_{i,Y}$, le faisceau sur Y_{Zar} associé au préfaisceau $U \mapsto K_i(U)$, et $\mathcal{H}^i(j)$ celui associé au préfaisceau $U \mapsto H^i(U, j)$.

Si k est un corps et Y une k -variété, on note $CH^i(Y)$ le groupe des classes de cycles de codimension i de Y modulo l'équivalence rationnelle. On note Y^i l'ensemble des points de codimension i de Y .

Si A est un groupe abélien, ${}_nA$ désigne le noyau de la multiplication par l'entier n dans A et A/n son conoyau. Si l est premier, $A_{l\text{-tors}}$ désigne la torsion l -primaire, $A_{l' \text{-tors}}$ la torsion première à l et A_{tors} tout le sous-groupe de torsion de A . Dans la suite, p désigne toujours la caractéristique du corps de base et l un nombre premier $\neq p$.

1.1. *Factorisation de l'application cycle sur la torsion l -primaire.* Rappelons le théorème de Merkur'ev et Suslin:

THÉORÈME [29]. *Soit L un corps. Si n est un entier premier à la caractéristique de L , le symbole galoisien*

$$R_{n,L} : K_2(L)/n \rightarrow H^2(L, \mu_n^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

De fait, on va seulement utiliser la surjectivité du symbole galoisien.

LEMME 1. Soient k un corps, m et n deux entiers premiers à la caractéristique de k et X une k -variété algébrique. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a une suite exacte naturelle de faisceaux étales sur X :

$$1 \rightarrow \mu_m^{\otimes r} \rightarrow \mu_{mn}^{\otimes r} \rightarrow \mu_n^{\otimes r} \rightarrow 1. \tag{1}$$

Soit $\chi_n : \text{Gal}(k_s/k) \rightarrow (\mathbb{Z}/n)^*$ le caractère cyclotomique donné par l'action sur les racines n -ièmes de l'unité. Sur $\text{Spec } k$ on peut identifier $\mu_n^{\otimes r}$ au module galoisien défini par le groupe \mathbb{Z}/n muni de l'action donnée par χ_n^r . Sur $\text{Spec } k$ la suite (1) s'interprète comme la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/m \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}/mn \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$

sur laquelle $\text{Gal}(k_s/k)$ agit via $(\chi_m^r, \chi_{mn}^r, \chi_n^r)$. Cela donne une suite exacte de schémas en groupes constants tordus sur $\text{Spec } k$, d'où également (1) sur X .

Il est immédiat que, pour n fixe et m variable, on a un système projectif

$$(1)_{mm',n} \longrightarrow (1)_{m,n}$$

d'épimorphismes de suites exactes et, pour m fixe et n variable, on a un système inductif d'injections de suites exactes

$$(1)_{m,n} \hookrightarrow (1)_{m,nn'}.$$

PROPOSITION 1. Soient k un corps, m et n deux entiers premiers à la caractéristique de k et X une k -variété algébrique lisse. On a alors un diagramme, commutatif au signe près:

$$\begin{array}{ccc}
 {}_n CH^i(X) & \xrightarrow{\rho} & H^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}) \\
 \uparrow \alpha & & \uparrow \beta \\
 H_{\text{Zar}}^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})) & \xrightarrow{\gamma} & H^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i}).
 \end{array} \tag{2}$$

Dans ce diagramme, ρ est l'application cycle, β est le Bockstein, γ est définie par la suite spectrale de Bloch–Ogus et α est définie ci-dessous grâce au théorème de Merkur'ev–Suslin. Ce diagramme est fonctoriel en m et n , covariant en n , contravariant en m , pour la divisibilité des entiers. L'application α est surjective. Pour $i = 2$, l'application γ est injective et, pour $i = 1$, bijective.

De fait, avec les conventions adoptées ci-après, le diagramme ci-dessus est anticommutatif.

Commençons par préciser la définition de β , γ , ρ et α . Le Bockstein β est le bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de (1) pour $r = i$.

L'application γ est donnée par la suite spectrale de Bloch–Ogus [7]:

$$\begin{aligned} E_2^{s,t} &= H_{\text{Zar}}^s(X, \mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes r})) \Rightarrow E^{s+t} = H^{s+t}(X, \mu_n^{\otimes r}) \\ E_2^{s,t} &= H_{\text{Zar}}^s(X, \mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes r})) = 0 \quad \text{pour } s > t. \end{aligned} \tag{3}$$

Toute différentielle issue de $(i - 1, i)$ est donc nulle, ce qui donne une application $E_2^{i-1,i} \rightarrow E^{2i-1}$ qui, pour $r = i$, est précisément γ . Si $i = 1$ ou 2, toute différentielle aboutissant en $(i - 1, i)$ est nulle: γ est donc un isomorphisme $E_2^{0,1} \xrightarrow{\sim} E^1$ pour $i = 1$, et c'est une injection $E_2^{1,2} \hookrightarrow E^3$ pour $i = 2$. L'application ρ est la restriction à ${}_nCH^i(X)$ de l'application cycle $CH^i(X) \rightarrow H^{2i}(X, \mu_n^{\otimes i})$ en cohomologie étale ([14] Cycle p. 143, [32] VI §9 p. 268). Pour définir α , on considère le diagramme suivant, commutatif à des signes près:

$$\begin{array}{ccccc} & & \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^* & \xrightarrow{\text{div}} & \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z} \\ & & \downarrow n & & \downarrow n \\ \bigoplus_{y \in X^{i-2}} K_2 k(y) & \xrightarrow{T} & \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^* & \xrightarrow{\text{div}} & \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z} \\ & & \downarrow \oplus R_{n,k(y)} & & \downarrow \\ \bigoplus_{y \in X^{i-2}} H^2(k(y), \mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{U_n} & \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^*/n & \xrightarrow{\delta_n} & \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z}/n. \end{array} \tag{4}$$

Dans ce diagramme, les horizontales s'obtiennent en prenant les sections sur X des bouts des résolutions de Gersten des faisceaux \mathcal{H}_i et $\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})$ données respectivement dans [33] et [7]. On peut vérifier que le carré inférieur de droite est anticommutatif (voir ci-après pas n° 1). Pour la commutativité du carré de gauche, où T est donnée par les symboles modérés, voir [5] p. 83. Le noyau de δ_n est donc $Z_{\text{Zar}}^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i}))$ et le conoyau de div est $CH^i(X) = H_{\text{Zar}}^i(X, \mathcal{H}_i)$. Le diagramme ci-dessus définit donc une surjection

$$Z_{\text{Zar}}^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(i)) \twoheadrightarrow {}_nCH^i(X)$$

de la façon suivante: si $f_0 \in \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^*$ représente un élément h_0 du noyau de δ_n , son image est la classe dans $CH^i(X)$ du cycle $z_0 \in \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z}$ défini par

$$\text{div}(f_0) = nz_0. \tag{5}$$

Le théorème de Merkur'ev–Suslin établit la surjectivité des symboles $R_{n,k(y)}$ et assure donc que l'application ci-dessus passe au quotient par l'image de U_n , ce qui définit α . La démonstration comporte plusieurs étapes.

Pas n° 0. L'application cycle $\rho_m : CH^i(X) \rightarrow H^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i})$ se factorise par $CH^i(X)/m$. On peut donc remplacer α par l'application

$$\alpha_m : H_{\text{Zar}}^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})) \rightarrow {}_n CH^i(X)/m$$

obtenue de façon analogue à α , en remplaçant la partie droite du diagramme (4) par

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^*/m & \xrightarrow{\delta_m} & \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z}/m \\ \downarrow n & & \downarrow n \\ \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^*/mn & \xrightarrow{\delta_{mn}} & \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z}/mn \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^*/n & \xrightarrow{\delta_n} & \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z}/n. \end{array} \tag{6}$$

Si $g_0 \in \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^*/mn$ est un relèvement de $h_0 \in \ker \delta_n$, alors la relation

$$\delta_{mn}(g_0) = nu_0 \tag{7}$$

définit $u_0 \in \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z}/m$ et $\alpha_m(h_0)$ est la classe de u_0 dans ${}_n CH^i(X)/m$. On voit aisément que α_m est, au signe près, la composée de α et de la réduction modulo m : avec les notations du début, on peut prendre pour g_0 la réduction de f_0 modulo mn , ce qui donne $u_0 \equiv -z_0 \pmod{mn}$, par anticommutativité du carré inférieur droit de (4).

Pas n° 1. Description de δ_n . C'est le,

$$d_1 : \bigoplus_{x \in X^{i-1}} H^1(k(x), \mu_n) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^i} H^0(k(x), \mathbb{Z}/n)$$

autrement dit $d_1 : E_1^{i-1,i} \rightarrow E_1^{i,i}$ de la suite spectrale de coniveau ([7] p. 188). Par définition même de celle-ci, ce morphisme s'obtient par passage à la limite inductive sur les morphismes composés $\Delta_n = \Delta_n^{Z, Z', Z''} = \iota \circ \partial$:

$$H_{2j+1}(Z - Z', \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial} H_{2j}(Z', \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\iota} H_{2j}(Z' - Z'', \mu_n^{\otimes j}),$$

pour $Z'' \subset Z' \subset Z$ trois fermés de X emboîtés, de dimensions respectives au plus égales à $j - 1, j$ et $j + 1$ pour $j = d - i$ et $d = \dim(X)$. Comme X est lisse, on peut même supposer $Z - Z'$ lisse et pur de dimension $j - 1$ et $Z' - Z''$ lisse et pur de

dimension j . Pour la définition et les propriétés de l'homologie étale $H_*(Y, \mu_n^{\otimes r}) = H_*(Y)$, voir [7] et [15] (exposé VIII). Comme $H_q(Y) = 0$ pour $q > 2 \dim(Y)$ ([7] lemme 2.1.2), on en déduit $H_{2j}(Z'') = H_{2j+1}(Z') = 0$. Ainsi, ι est injective et le noyau de Δ_n s'identifie à $H_{2j+1}(Z, \mu_n^{\otimes j}) = H_Z^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i})$.

D'après le résultat principal de [7], le groupe $Z_{\text{Zar}}^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i}))$ s'identifie au noyau de δ_n . Soit $h_0 \in \ker(\delta_n)$. D'après la description précédente, il existe (Z, Z', Z'') comme ci-dessus, puis $\tilde{h} \in H_{2j+1}(Z, \mu_n^{\otimes j})$ et $f \in H^0(Z - Z', \mathbb{G}_m)$ tels que $Z - Z'$ et $Z' - Z''$ soient lisses et purs de dimensions respectives $j + 1$ et j , que \tilde{h} et f aient même image $h = \partial_n(f)$ dans $H_{2j+1}(Z - Z', \mu_n^{\otimes j}) = H_{Z-Z'}^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i}) = H^1(Z - Z', \mu_n)$ et que h donne h_0 à la limite inductive. Noter que $\Delta_n(h) = 0$. Avec les mêmes notations, le diagramme

$$\begin{CD} H^0(Z - Z', \mathbb{G}_m) @>{\text{“div”}}>> H_Z^1(Z, \mathbb{G}_m) \\ @V{\partial_n}VV @VV{\partial_n}V \\ H^1(Z - Z', \mu_n) @>{\text{“}\Delta_n\text{”}}>> H_Z^2(Z, \mu_n) \end{CD}$$

est anticommutatif (cf. [14] Cycle 2.1.3 et 2.1.5 p. 138–139), ce qui conduit à la même propriété pour le carré inférieur droit de (4).

Pas n° 2. Description de γ . Avec les notations du pas n° 1, l'application

$$Z_{\text{Zar}}^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})) \rightarrow H^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i})$$

s'obtient par passage à la limite inductive en Z , fermé de codimension $\geq i - 1$, sur les morphismes naturels

$$H_{2j+1}(Z, \mu_n^{\otimes j}) \rightarrow H_{2j+1}(X, \mu_n^{\otimes j}),$$

autrement dit

$$H_Z^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i}) \rightarrow H^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i}).$$

Pas n° 3. Calcul de $\alpha_m(h_0)$. On fixe \tilde{h}, f, h, Z, Z' et Z'' comme indiqué au pas n° 1. Le diagramme

$$\begin{CD} @. H^0(Z' - Z'', \mathbb{Z}/m) \\ @. @VV{n}V \\ H^1(Z - Z', \mu_{mn}) @>{\Delta_{mn}}>> H^0(Z' - Z'', \mathbb{Z}/mn) \\ @VV{\downarrow}V @. \\ H^1(Z - Z', \mu_n) @. @. \end{CD}$$

s'envoie naturellement dans le diagramme-limite extrait de (6):

$$\begin{array}{ccc}
 & & \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z}/m \\
 & & \downarrow n \\
 \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^*/mn & \xrightarrow{\delta_{mn}} & \bigoplus_{X^i} \mathbb{Z}/mn \\
 \downarrow & & \\
 \bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^*/n & &
 \end{array}$$

Soient $g = \partial_{mn}(f) \in H^1(Z - Z', \mu_{mn})$ et g_0 son image dans $\bigoplus_{x \in X^{i-1}} k(x)^*/mn$. Ce sont des relèvements respectifs de h et h_0 . Comme $\Delta_n(h) = 0$, il existe $u \in H^0(Z' - Z'', \mathbb{Z}/m)$ tel que

$$\Delta_{mn}(g) = nu. \tag{8}$$

L'image u_0 de u dans $\bigoplus_{X^i} \mathbb{Z}/m$ vérifie donc $\delta_{mn}(g_0) = nu_0$. Ainsi, d'après le pas n° 0, $\alpha_m(h_0)$ est la classe de u dans ${}_n CH^i(X)/m$.

Pas n° 4. Calcul de $\rho_m(u)$. La composée de

$$H^0(Z' - Z'', \mathbb{Z}/m) \longrightarrow CH^i(X)/m \xrightarrow{P} H^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i})$$

n'est autre que la composée des applications

$$\begin{aligned}
 H^0(Z' - Z'', \mathbb{Z}/m) &\longrightarrow H_{Z' - Z''}^{2i}(X - Z'', \mu_m^{\otimes i}) \\
 &\longrightarrow H^{2i}(X - Z'', \mu_m^{\otimes i}) \xleftarrow{\sim} H^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}).
 \end{aligned}$$

La première application est l'application de Gysin et la dernière est l'inverse de l'application naturelle qui est un isomorphisme en vertu du théorème de pureté ([32] chap. VI, lemme 9.1): $H_Z^{2i+1}(X) = H_{Z''}^{2i}(X) = 0$ car $\text{codim}_X Z'' \geq i + 1$. Noter que l'application composée ci-dessus se factorise par $H_{Z - Z''}^{2i}(X - Z'', \mu_m^{\otimes i})$. Quitte à changer X en $X - Z''$, on voit qu'on peut supprimer Z'' , ce qui allègera les notations.

Pas n° 5. Partant de $\tilde{h} \in H_{2j+1}(Z, \mu_n^{\otimes j}) = H_Z^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i})$, on veut voir que ses deux images dans $H_{2j}(X, \mu_m^{\otimes j}) = H^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i})$ obtenues via le diagramme ci-dessous coïncident:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(Z', \mathbb{Z}/m) & \xrightarrow{c} & H_Z^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}) & \longrightarrow & H^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}) \\
 & & \uparrow \beta & & \uparrow \beta \\
 & \swarrow \tilde{\alpha}_m & H_Z^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i}) & \longrightarrow & H^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i}).
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, $\tilde{\alpha}_m$ est simplement une correspondance relevant α_m . Pour

établir $\beta\gamma(h_0) = \rho_m \alpha_m(h_0)$ et achever ainsi la démonstration, il reste seulement à voir qu'il existe un relèvement $\tilde{\alpha}_m(\tilde{h})$ de $\alpha_m(h_0)$ tel que $\beta(\tilde{h}) = c(\tilde{\alpha}_m(\tilde{h}))$.

Pas n° 6. *Le dernier calcul.* Le diagramme ci-dessous figure β et $c \circ \tilde{\alpha}_m$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & H_Z^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}) \xrightarrow{c} H_Z^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}) \\
 & & & & \downarrow n \\
 & & & & H_Z^{2i}(X, \mu_{mn}^{\otimes i}) \\
 & & H_Z^{2i-1}(X, \mu_{mn}^{\otimes i}) \xrightarrow{\Delta_{mn}} & H_Z^{2i}(X, \mu_{mn}^{\otimes i}) & \\
 & & \downarrow & & \downarrow u \rightarrow v \\
 H_Z^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow & H_Z^{2i-1}(X - Z', \mu_n^{\otimes i}) & & & H_Z^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}) \\
 \downarrow \beta & & & & \downarrow g \rightarrow s \\
 H_Z^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}). & & & & H_Z^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}) \\
 & & & & \downarrow \tilde{h} \rightarrow h \\
 & & & & \downarrow w
 \end{array}$$

On part de $\tilde{h} \in H_Z^{2i-1}(X, \mu_n^{\otimes i})$. Il existe $g \in H_Z^{2i-1}(X, \mu_{mn}^{\otimes i}) = H^1(Z - Z', \mu_{mn})$ ayant même image h que \tilde{h} dans $H_Z^{2i-1}(X - Z', \mu_n^{\otimes i})$. Il existe $u \in H_Z^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i}) = H^0(Z', Z/m)$ tel que $\Delta_{mn}(g) = nu$. D'après le pas n° 3, dont le premier diagramme s'identifie par les morphismes de Gysin, Z'' ayant disparu, avec la partie centrale du diagramme ci-dessus, on peut prendre $\tilde{\alpha}_m(\tilde{h}) = u$ comme relèvement de $\alpha_m(h_0)$. Posons $c(u) = v$ et $\beta(t) = w$. Pour obtenir $\beta(\tilde{h}) = c(\tilde{\alpha}_m(\tilde{h}))$, il s'agit d'établir que $w = v$.

C'est une simple vérification d'algèbre homologique. Considérons une résolution de Cartan-Eilenberg injective de la suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_m^{\otimes i} \rightarrow \mu_{mn}^{\otimes i} \rightarrow \mu_n^{\otimes i} \rightarrow 1$$

de faisceaux étales sur X , soit $1 \rightarrow I_m \rightarrow I_{mn} \rightarrow I_n \rightarrow 1$. Soit j l'immersion ouverte $X - Z' \rightarrow X$. Compte tenu du fait que j^* est exacte et transforme injectif en injectif, on obtient le diagramme commutatif suivant de complexes de groupes abéliens, à lignes et colonnes exactes, dont l'homologie vaut $H_Z^i(X, \mu_r^{\otimes i})$, $H_Z^i(X, \mu_r^{\otimes i})$ et $H_{Z-Z'}^i(X - Z', \mu_r^{\otimes i})$ pour $r = m, mn$ et n successivement:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & H_Z^0(X, I_m) & \longrightarrow & H_Z^0(X, I_m) & \longrightarrow & H_{Z-Z'}^0(X - Z', I_m) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \nu & & \downarrow \nu & & \downarrow \nu \\
 1 & \longrightarrow & H_Z^0(X, I_{mn}) & \longrightarrow & H_Z^0(X, I_{mn}) & \longrightarrow & H_{Z-Z'}^0(X - Z', I_{mn}) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\
 1 & \longrightarrow & H_Z^0(X, I_n) & \longrightarrow & H_Z^0(X, I_n) & \longrightarrow & H_{Z-Z'}^0(X - Z', I_n) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Soit $\eta \in H_Z^0(X, I_n^{2i-1})$ un relèvement de \tilde{h} . Il vérifie $d\eta = 0$. Montrons qu'on peut relever η en $\omega \in H_Z^0(X, I_{mn}^{2i-1})$ de telle sorte que son image ω' dans $H_{Z-Z'}^0(X - Z', I_{mn}^{2i-1})$ vérifie $d\omega' = 0$. Soit η' l'image de η dans $H_{Z-Z'}^0(X - Z', I_n^{2i-1})$. On sait qu'on peut relever η' en $\tau' \in H_{Z-Z'}^0(X - Z', I_{mn}^{2i-1})$ avec $d\tau' = 0$ (a priori modulo un cobord, mais il suffit de relever ce cobord, . . .). Relevons τ' en $\tau \in H_Z^0(X, I_{mn}^{2i-1})$. Alors, $\pi(\tau) - \eta = \pi(\tau'')$ avec $\tau'' \in H_Z^0(X, I_{mn}^{2i-1})$. Finalement, $\omega = \tau - \tau''$ a les propriétés suivantes: $\pi(\omega) = \eta$ et $\omega' = \tau'$. On en déduit $d\omega \in H_Z^0(X, I_m^{2i})$.

Comme ω relève η , il est clair que w est la classe dans $H_Z^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i})$ de $d\omega$ vu dans $H_Z^0(X, I_m^{2i})$. Par ailleurs, $d\omega$ vu dans $H_Z^0(X, I_{mn}^{2i})$ est un relèvement de s , puis, vu dans $H_Z^0(X, I_m^{2i})$, de u , enfin, vu dans $H_Z^0(X, I_m^{2i})$, de v . Ainsi, $d\omega$ relève à la fois v et w dans $H_Z^0(X, I_m^{2i})$, ce qui prouve $v = w$ dans $H_Z^{2i}(X, \mu_m^{\otimes i})$.

COROLLAIRE 1. *Soient k un corps, l un entier premier à la caractéristique de k et X une k -variété algébrique lisse. On a alors un diagramme commutatif, au signe près,*

$$\begin{array}{ccc}
 CH^i(X)_{l\text{-tors}} & \xrightarrow{\rho} & H^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i)) \\
 \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\
 H_{\text{Zar}}^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i))) & \xrightarrow{\gamma} & H^{2i-1}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i))
 \end{array} \tag{9}$$

où ρ est l'application cycle, β le Bockstein, où γ est définie par la suite spectrale de Bloch–Ogus et où α est définie grâce au théorème de Merkur'ev–Suslin. De plus, pour $i = 2$, l'application γ est injective, alors que, pour tout i , l'application α est surjective.

Rappelons que, pour $n \geq 0$ et $j \in \mathbb{Z}$, on pose par définition

$$\begin{aligned}
 H^n(X, \mathbb{Z}_l(j)) &= \varprojlim_{\nu} H^n(X, \mu_{l^{\nu}}^{\otimes j}) \\
 H^n(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)) &= \varinjlim_{\nu} H^n(X, \mu_{l^{\nu}}^{\otimes j}).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Ce dernier n'est autre, pour X quasi-compact, ce qui est le cas ici, que la cohomologie étale à valeurs dans le faisceau $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j) = \varinjlim_{\nu} \mathbb{Z}/l^{\nu}(j)$ ([32] chap. III 3.6 d)). D'après la proposition 1, on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 {}_{\mu}CH^i(X) & \xrightarrow{\rho} & H^{2i}(X, \mathbb{Z}/l^{\mu}(i)) \\
 \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\
 H_{\text{Zar}}^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}/l^{\nu}(i))) & \xrightarrow{\gamma} & H^{2i-1}(X, \mathbb{Z}/l^{\nu}(i)).
 \end{array}$$

Il suffit de passer à la limite inductive en ν et à la limite projective en μ pour

obtenir le diagramme (9). Les deux opérations commutent par general nonsense ce qui définit bien le morphisme β en (9). Les propriétés d'être surjective ou injective pour α et γ se conservent par passage à la limite inductive.

1.2. Premières applications.

COROLLAIRE 2. Soient k un corps, X une variété lisse sur k et n un entier premier à la caractéristique de k . Si k est fini, ou séparablement clos, ou réellement clos, ou local de dimension 1, le groupe ${}_nCH^2(X)$ est fini.

Voir aussi Bloch [5] 3.6 et Merkur'ev–Suslin [29] 18.1 où le cas “séparablement clos” est déjà traité. D'après la proposition 1, on a en particulier le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & {}_nCH^2(X) \\ & & \uparrow \\ & \alpha & \\ H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{H}^2(\mu_n^{\otimes 2})) & \xrightarrow{\gamma} & H^3(X, \mu_n^{\otimes 2}). \end{array} \tag{11}$$

Autrement dit, ${}_nCH^2(X)$ est un sous-quotient de $H^3(X, \mu_n^{\otimes 2})$. Il suffit donc d'établir la finitude de $H^3(X, \mu_n^{\otimes 2})$ dans chacun des cas considérés. Pour k séparablement clos, on sait que le groupe $H^i(X, \mu_n^{\otimes 2})$ est fini quel que soit $i \geq 0$ ([1], chap. XVI 5.2 p. 246). La finitude des groupes $H^i(X, \mu_n^{\otimes 2})$ dans les autres cas considérés résulte alors simplement de la suite spectrale d'Hochschild–Serre

$$H^i(k, H^j(X \times_k k_s, \mu_n^{\otimes 2})) \Rightarrow H^{i+j}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

et de la finitude des groupes $H^i(k, A)$ pour k comme dans l'énoncé et A un module galoisien fini d'ordre premier à la caractéristique de k .

COROLLAIRE 3. Soient k un corps, X une variété lisse sur k et l un nombre premier différent de la caractéristique de k .

- (i) $CH^2(X)_{l\text{-tors}}$ est un sous-quotient de $H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$.
- (ii) Si les groupes $H^j(X, \mu_l^{\otimes 2})$ sont finis et si $H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$, alors l'application cycle

$$CH^2(X)_{l\text{-tors}} \xrightarrow{\rho} H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))$$

est injective.

D'après le corollaire 1, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH^2(X)_{l\text{-tors}} & \xrightarrow{\rho} & H^4(X, \mathbb{Z}_l(2)) \\ \uparrow \alpha & & \uparrow \beta \\ H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) & \xrightarrow{\gamma} & H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)). \end{array} \tag{12}$$

D'où (i). Si les groupes $H^j(X, \mu_{l^v}^{\otimes 2})$ sont supposés finis, on peut passer à la limite projective dans les suites exactes longues de cohomologie tirées des diagrammes commutatifs de faisceaux étales (voir lemme 1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^n(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^{n+v}(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^v(2) \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^n(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^{n+v+1}(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^{v+1}(2) \longrightarrow 1,
 \end{array}$$

pour v fixe et n variable. On obtient ainsi un diagramme commutatif à horizontales exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^{j-1}(X, \mathbb{Z}/l^v(2)) & \longrightarrow & H^j(X, \mathbb{Z}_l(2)) & \xrightarrow{l^v} & H^j(X, \mathbb{Z}_l(2)) & \longrightarrow & H^j(X, \mathbb{Z}/l^v(2)) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow l & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H^{j-1}(X, \mathbb{Z}/l^{v+1}(2)) & \longrightarrow & H^j(X, \mathbb{Z}_l(2)) & \xrightarrow{l^{v+1}} & H^j(X, \mathbb{Z}_l(2)) & \longrightarrow & H^j(X, \mathbb{Z}/l^{v+1}(2)) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

On peut passer à la limite inductive en v sur le système inductif de suites exactes longues ainsi défini, ce qui donne la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^{j-1}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \xrightarrow{\beta} & H^j(X, \mathbb{Z}_l(2)) & \longrightarrow & H^j(X, \mathbb{Q}_l(2)) \\
 & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \dots
 \end{array} \tag{13}$$

où, par définition,

$$H^j(X, \mathbb{Q}_l(2)) = H^j(X, \mathbb{Z}_l(2)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l. \tag{14}$$

En particulier, on a la suite exacte

$$H^3(X, \mathbb{Q}_l(2)) \longrightarrow H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\beta} H^4(X, \mathbb{Z}_l(2)). \tag{15}$$

Si l'on suppose en outre $H^3(X, \mathbb{Q}_l(2)) = 0$, le Bockstein $\beta : H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))$ est donc injectif. On en déduit que α est alors un isomorphisme et que ρ est injective:

$$\begin{array}{ccc}
 CH^2(X)_{l\text{-tors}} & \xhookrightarrow{\rho} & H^4(X, \mathbb{Z}_l(2)) \\
 \uparrow \alpha & & \uparrow \beta \\
 H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) & \xhookrightarrow{\gamma} & H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))
 \end{array}$$

COROLLAIRE 4. Soient k un corps algébriquement clos, X une k -variété projective et lisse, et l un nombre premier différent de la caractéristique de k . L'application

$$\lambda^2 : CH^2(X)_{l\text{-tors}} \rightarrow H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)),$$

définie par Bloch [3] sous ces hypothèses, est une injection. Elle factorise l'application cycle $CH^2(X)_{l\text{-tors}} \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))$ à travers le Bockstein β .

Voir aussi [29] §8. Par définition même, λ^2 rend commutatif le triangle inférieur du diagramme

$$\begin{array}{ccc} CH^2(X)_{l\text{-tors}} & \xrightarrow{\rho} & H^4(X, \mathbb{Z}_l(2)) \\ \uparrow \alpha & \searrow \lambda^2 & \uparrow \beta \\ H^1_{\text{Zar}}(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) & \xrightarrow{\gamma} & H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)). \end{array}$$

On en déduit que α est un isomorphisme, donc que λ^2 est injective. De plus, le triangle supérieur commute au signe près.

De fait, chez Bloch, qui ne disposait pas du théorème de Merkur'ev–Suslin, $Z^1_{\text{Zar}}(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)))$ remplace $H^1_{\text{Zar}}(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)))$. L'existence de λ^2 est prouvée par réduction, via spécialisation, au cas où k est la clôture algébrique d'un corps fini, auquel cas elle dérive des conjectures de Weil [12].

1.3. Variétés réelles et complexes.

COROLLAIRE 5. Soit X une variété algébrique projective et lisse sur le corps \mathbb{C} des complexes. L'application de Griffiths

$$\psi^2 : CH^2(X)_0 \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})/H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

définie sur le sous-groupe des cycles homologues à 0, est injective sur le sous-groupe de torsion $CH^2(X)_{0,\text{tors}}$.

On note $CH^2(X)_0$ le noyau de l'application cycle $CH^2(X) \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ à valeurs dans la cohomologie singulière à coefficients entiers de l'espace topologique ordinaire $X(\mathbb{C})$. L'application de Griffiths se factorise sur la torsion l -primaire par

$$CH^2(X)_{0,l\text{-tors}} \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_l)/H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_l) \hookrightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l).$$

Or, Bloch ([3] proposition 3.7) établit la coïncidence entre ψ^2 et la restriction de λ^2 modulo l'identification $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$ consistant à prendre comme générateur des racines l^v -ièmes de 1 le nombre e^{2im/l^v} . On sait que le quotient $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})/H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est muni par Griffiths d'une structure de tore complexe $J^2(X)$ et $\psi^2 : CH^2(X)_0 \rightarrow J^2(X)$ est donc injective sur la torsion.

PROPOSITION 2. *Soient X une variété algébrique sur le corps \mathbf{C} des complexes et m et n deux entiers > 0 . Soit $\zeta \in H^2(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}/n)$. Il existe alors un ouvert de Zariski non vide U de X et $\eta \in H^2(U(\mathbf{C}), \mathbf{Z}/mn)$ tels que*

$$\zeta_U = r(\eta)$$

où r désigne la réduction modulo $n : H^2(U(\mathbf{C}), \mathbf{Z}/mn) \rightarrow H^2(U(\mathbf{C}), \mathbf{Z}/n)$.

Autrement dit, il existe un diviseur D dans X tel que la restriction à l'ouvert U complémentaire de $\beta(\zeta) \in H^3(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}/m)$ soit triviale (voir [4] 5.12). Soit $F = \mathbf{C}(X)$ le corps des fractions rationnelles de X . Comme la réduction mod n

$$r_F : H^2(F, \mu_{mn}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$$

est la limite inductive, pour U parcourant l'ensemble des ouverts de Zariski non vides de X , des réductions

$$H^2(U(\mathbf{C}), \mu_{mn}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(U(\mathbf{C}), \mu_n^{\otimes 2}),$$

l'assertion ci-dessus est un corollaire du théorème de Merkur'ev–Suslin, qui assure que r_F est le quotient par le symbole galoisien de la réduction

$$K_2(F)/mn \rightarrow K_2(F)/n$$

qui est évidemment surjective. Donc r_F aussi.

Noter que, si X est un schéma intègre quelconque, le même argument s'applique en cohomologie étale pour la réduction $H^2(U, \mu_{mn}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(U, \mu_n^{\otimes 2})$, par application du théorème de Merkur'ev–Suslin au corps des fonctions de X .

PROPOSITION 3. *Soit X une surface projective et lisse sur le corps des réels \mathbf{R} . On suppose X géométriquement intègre et $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$. Soit s le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ pour la topologie ordinaire. On a la majoration*

$$s \leq 1 + \dim_{\mathbf{Z}/2} H^3(X, \mathbf{Z}/2). \quad (16)$$

Il s'agit là de la cohomologie étale de la variété algébrique X . D'après le corollaire 2, l'ordre de $H^3(X, \mathbf{Z}/2)$ majore l'ordre de ${}_2CH^2(X) = {}_2CH_0(X)$. Notons $A_0(X)$ le sous-groupe de $CH_0(X)$ formé des classes de 0-cycles de degré 0 (les notations diffèrent de celles de [10]!). Soit $\pi_* : A_0(X_{\mathbf{C}}) \rightarrow A_0(X)$ la norme. D'après [10], proposition 3.1, on a, sous les hypothèses de l'énoncé, en particulier $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$:

$$A_0(X)/\pi_*A_0(X_{\mathbf{C}}) \simeq (\mathbf{Z}/2)^{s-1}.$$

On dispose donc du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi_* A_0(X_C) & \longrightarrow & A_0(X) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2)^{s-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \times 2 & & \downarrow \times 2 & & \downarrow \times 2 \\
 0 & \longrightarrow & \pi_* A_0(X_C) & \longrightarrow & A_0(X) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2)^{s-1} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Comme $A_0(X_C)$ est divisible, il en est de même de $\pi_* A_0(X_C)$. On en déduit la minoration

$$\# {}_2CH_0(X) = \# {}_2A_0(X) \geq 2^{s-1},$$

ce qui suffit à conclure.

Comme dans [10], le résultat vaut pour R un corps réel clos quelconque.

1.4. *La torsion p -primaire de $CH^2(X)$.* Avant d'énoncer le résultat de Bloch–Gabber–Kato, rappelons quelques notations, essentiellement celles d'Illusie [20]. Pour la définition du pro-complexe $W_n \Omega_X^r$ de de Rham–Witt d'une variété algébrique X , lisse sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, voir [20] I 1.12 p. 548. Pour n entier, $n \geq 1$, nous notons

$$v_n(r) = W_n \Omega_{X, \log}^r \tag{17}$$

le sous-faisceau étale "logarithmique" de $W_n \Omega_X^r$ ([20] I 5.7 p. 596 et 597). On dispose d'un morphisme de faisceaux sur X_{Zar} ([20] I 5.7.7 et 5.7.8 p. 597 et 598)

$$\mathcal{K}_2/p^n \xrightarrow{d \log} v_n(2) \quad \text{pour } n \geq 1,$$

induit, pour $n = 1$, par le symbole différentiel $(u, v) \mapsto (du/u) \wedge (dv/v)$.

THÉORÈME (Bloch–Gabber–Kato [6]). *Le morphisme $d \log$:*

$$\mathcal{K}_2/p^n \rightarrow v_n(2)$$

est un isomorphisme de faisceaux sur X_{Zar} .

Voir aussi Kato [21]. On en déduit l'énoncé suivant:

PROPOSITION 4. *Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et X une k -variété algébrique lisse. On a alors un diagramme (n entier, $n \geq 1$)*

$$\begin{array}{ccc}
 H_{Zar}^1(X, \mathcal{K}_2/p^n) & \longrightarrow & {}_p CH^2(X) \\
 \downarrow d \log \cong & & \\
 H_{Zar}^1(X, v_n(2)) & \hookrightarrow & H_{ét}^1(X, v_n(2))
 \end{array} \tag{18}$$

dont l'horizontale supérieure est surjective, l'inférieure injective, et qui est fonctoriel en n pour l'ordre naturel des entiers.

Rappelons (Bloch [5] corollaire 1.11 p. 81) la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_2)/m \rightarrow H^1_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_2/m) \rightarrow {}_mCH^2(X) \rightarrow 0 \tag{19}$$

pour X un k -schéma régulier et m un entier ≥ 1 . La démonstration consiste à établir que la résolution de Gersten–Quillen du faisceau \mathcal{K}_2 reste exacte une fois tensorisée par \mathbb{Z}/m . La démonstration donnée dans [4] (lemme 5.4) suppose les racines m -ièmes de 1 dans k , celle donnée dans [5] (1.9 p. 80) est incomplète, mais l'argument se laisse compléter, et dans le cas présent $m = p^n$, la démonstration est aisée comme déjà indiqué en [5]. Le résultat de passage au quotient a été établi pour \mathcal{K}_i quelconque par Grayson (non publié).

La verticale est définie par le symbole $d\log$ et est un isomorphisme d'après le théorème de Bloch–Gabber–Kato. L'horizontale inférieure est l'injection naturelle déduite du morphisme de sites $X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$.

La fonctorialité en n de l'horizontale supérieure résulte d'une simple analyse de la manière dont la suite (19) est obtenue (les flèches $\mathcal{K}_2/r \rightarrow \mathcal{K}_2/rs$ sont bien sûr définies par la multiplication par s). La fonctorialité de la flèche verticale résulte de la description suivante d'applications naturelles " p^m " : $\nu_n(r) \rightarrow \nu_{n+m}(r)$: la multiplication par p^m dans $W_{m+n}\Omega^r_X$ se factorise par une injection encore notée $\times p^m : W_n\Omega^r_X \rightarrow W_{n+m}\Omega^r_X$ ([20] I 3.4 p. 569) qui induit une application injective (voir lemme 2 ci-après) :

$$\times p^m : \nu_n(r) \rightarrow \nu_{n+m}(r). \tag{20}$$

On pose, par définition,

$$\nu_\infty(r) = \varinjlim_n \nu_n(r) \tag{21}$$

pour le système inductif défini, pour l'ordre naturel des entiers n , par les morphismes (20). On obtient ainsi :

COROLLAIRE 6. *Soit X une variété algébrique lisse sur un corps k parfait de caractéristique $p > 0$. Le groupe $CH^2(X)_{p\text{-tors}}$ s'identifie à un sous-quotient de $H^1(X, \nu_\infty(2))$.*

Corollaire de la proposition précédente, qui donne, par passage à la limite inductive en n , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & CH^2(X)_{p\text{-tors}} & \\ & \uparrow & \\ H^1_{\text{Zar}}(X, \nu_\infty(2)) & \hookrightarrow & H^1(X, \nu_\infty(2)). \end{array} \tag{22}$$

On notera que $H^1(X, \nu_\infty(2)) = \varinjlim_n H^1(X, \nu_n(2))$, et de même pour $H^1_{\text{Zar}}(X, \nu_\infty(2))$.

Nous terminons cette section par deux lemmes qui ne sont pas explicites dans [20] et qui seront utiles au §2:

LEMME 2. *On a la suite exacte naturelle de faisceaux étales sur X:*

$$0 \longrightarrow v_n(r) \longrightarrow W_n \Omega_X^r \xrightarrow{1-F} W_n \Omega_X^r / dV^{n-1} \Omega_X^{r-1} \longrightarrow 0. \quad (23)$$

Démonstration. L'application $1 - F : W_{n+1} \Omega_X^r \rightarrow W_n \Omega_X^r$ définie en [20] (I 2.17 p. 562) est surjective pour la topologie étale ([20] I 3.26 p. 581) et induit, par définition, l'application $1 - F$ du lemme ([20] I 3.3 p. 569), qui est donc surjective. Soient M_{n+1} et N_n leurs noyaux respectifs. On a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_{n+1} & \longrightarrow & W_{n+1} \Omega_X^r & \xrightarrow{1-F} & W_n \Omega_X^r & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow R & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_n & \longrightarrow & W_n \Omega_X^r & \xrightarrow{1-F} & W_n \Omega_X^r / dV^{n-1} \Omega_X^{r-1} & \longrightarrow & 0. \end{array} \quad (24)$$

Comme $\ker R = V^n \Omega_X^r + dV^n \Omega_X^{r-1}$ ([20] I 3.2 p. 568), on a $(1 - F)(\ker R) = dV^{n-1} \Omega_X^{r-1}$ et $R : M_{n+1} \rightarrow N_n$ est donc surjective. Or, d'après [20], I 5.7.4 p. 597, on a l'inclusion $M_{n+1} \subset W_{n+1} \Omega_{X,\log}^r + \ker R$. D'où, par application de R :

$$N_n = R(W_{n+1} \Omega_{X,\log}^r) = W_n \Omega_{X,\log}^r = v_n(r).$$

LEMME 3. *Pour n et m entiers ≥ 1, on a des suites exactes naturelles de faisceaux étales sur X:*

$$0 \longrightarrow v_n(r) \xrightarrow{\times p^m} v_{n+m}(r) \xrightarrow{R^n} v_m(r) \longrightarrow 0. \quad (25)$$

Démonstration. Comme rappelé ci-dessus, la multiplication par p^m dans $W_{m+n} \Omega_X^r$ se factorise par une injection " p^m ": $W_n \Omega_X^r \hookrightarrow W_{m+n} \Omega_X^r$. La surjectivité de R^n est claire. Enfin, d'après [20] I 5.7.4, on a l'inclusion

$$M_{m+n+1} \cap \ker R^{n+1} \subset p^m W_{n+m+1} \Omega_{X,\log}^r + \ker R$$

dans $W_{m+n+1} \Omega_X^r$, d'où, par application de R , l'inclusion

$$N_{m+n} \cap \ker R^n \subset p^m W_{m+n} \Omega_{X,\log}^r.$$

Ceci prouve l'exactitude au centre de la suite et achève la démonstration.

§2. Variétés sur un corps fini. L'objet principal de ce paragraphe est la démonstration du

THÉORÈME 1. *Si X est une variété algébrique projective et lisse sur un corps fini, le groupe $CH^2(X)_{\text{tors}}$ est fini.*

On discutera également l'application cycle sous les mêmes hypothèses, et on donnera une autre démonstration du théorème de Kato–Saito [22] sur le corps de classes de Hilbert d'un corps de fonctions de deux variables sur un corps fini (pour la partie première à p).

2.1. Théorème de finitude en cohomologie l -adique. On désigne par l un nombre premier différent de la caractéristique p du corps de base. On se propose d'étudier la finitude de $H^3(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ en vue d'appliquer éventuellement le corollaire 2 (i) du §1 pour obtenir la finitude de $CH^2(X)_{l\text{-tors}}$.

THÉORÈME 2. *Soient k un corps fini de caractéristique p et X une k -variété algébrique projective et lisse. Soient $r \in \mathbf{Z}$ et l un nombre premier $\neq p$. Alors, pour tout entier $i \neq 2r, 2r + 1$, le groupe $H^i(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(r))$ est fini, et nul pour presque tout l .*

Observons tout d'abord que ce théorème et le corollaire 2 (i) impliquent, sous les hypothèses indiquées pour X , la finitude de $CH^2(X)_{p\text{-tors}}$.

Démonstration. Soient $k = \mathbf{F}_q$ le corps fini à q éléments et φ la substitution de Frobenius, générateur topologique de $G = \text{Gal}(\bar{k}/k) \simeq \hat{\mathbf{Z}}$. Si A est un G -module continu discret de torsion, on note $A^G = H^0(G, A)$ le sous-module des invariants et $A_G = H^1(G, A)$ le module quotient des co-invariants.

Comme G est de dimension cohomologique 1, la suite spectrale d'Hochschild–Serre

$$H^i(k, H^j(\bar{X}, \mathbf{Z}/l^n(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X, \mathbf{Z}/l^n(r))$$

donne des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow H^{i-1}(\bar{X}, \mathbf{Z}/l^n(r))_G \rightarrow H^i(X, \mathbf{Z}/l^n(r)) \rightarrow H^i(\bar{X}, \mathbf{Z}/l^n(r))^G \rightarrow 0 \quad (26)$$

où $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Les groupes $H^i(\bar{X}, \mathbf{Z}/l^n(r))$ sont finis ([1] XVI 5.2 p. 246), donc aussi les groupes $H^i(X, \mathbf{Z}/l^n(r))$. Ainsi, les systèmes projectifs $\{H^i(\bar{X}, \mathbf{Z}/l^n(r))\}_{n \in \mathbf{N} - \{0\}}$ et $\{H^i(X, \mathbf{Z}/l^n(r))\}_{n \in \mathbf{N} - \{0\}}$ définis par les projections naturelles $\mathbf{Z}/l^{n+m}(r) \rightarrow \mathbf{Z}/l^m(r)$ vérifient la condition de Mittag-Leffler ([18] EGA III, 0_{III} 13.1), ce qui autorise à passer à la limite projective dans les suites exactes. On obtient ainsi par des arguments standards (cf. [32] lemme 1.11 p. 165) les résultats suivants:

$$\text{les } \mathbf{Z}_l\text{-modules } H^i(X, \mathbf{Z}_l(r)) \text{ sont de type fini;} \quad (27)$$

on a des suites exactes naturelles déduites de (26) par passage à la limite projective en l'entier n , pour l'ordre naturel des entiers:

$$0 \rightarrow H^{i-1}(\bar{X}, \mathbf{Z}_l(r))_G \rightarrow H^i(X, \mathbf{Z}_l(r)) \rightarrow H^i(\bar{X}, \mathbf{Z}_l(r))^G \rightarrow 0 \quad (28)$$

(il convient de vérifier que le passage à la limite projective sur les $A_n := H^i(\bar{X}, Z/l^n(r))$ commute au passage aux invariants et co-invariants, ce qui résulte, par exemple, des suites exactes

$$0 \longrightarrow A_n^G \longrightarrow A_n \xrightarrow{1-\varphi} A_n \longrightarrow A_{n,G} \longrightarrow 0).$$

Par ailleurs les suites exactes de cohomologie déduites de $(1)_{l^m, l^n}$ donnent, par passage à la limite projective en m , les suites exactes

$$0 \rightarrow H^i(X, Z_l(r))/l^n \rightarrow H^i(X, Z/l^n(r)) \rightarrow {}_l H^{i+1}(X, Z_l(r)) \rightarrow 0,$$

puis, par passage à la limite inductive, pour n variable, la suite exacte

$$0 \rightarrow H^i(X, Z_l(r)) \otimes_{Z_l} \mathbb{Q}_l / Z_l \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q}_l / Z_l(r)) \rightarrow H^{i+1}(X, Z_l(r))_{\text{tors}} \rightarrow 0. \quad (29)$$

On sait, d'après (27), que le terme de droite est fini. Le terme médian est donc fini si, et seulement si, $H^i(X, Z_l(r))$ est de torsion. Pour établir le théorème, il suffit donc de prouver les deux assertions suivantes:

- (i) $H^i(X, Z_l(r))$ est de torsion pour tout $i \neq 2r, 2r + 1$;
- (ii) Pour tout $i \neq 2r + 1$, on a $H^i(X, Z_l(r))_{\text{tors}} = 0$ pour presque tout l .

D'après la conjecture de Weil établie par Deligne ([12] théorème 1.6), les valeurs propres du Frobenius géométrique $Fr = \varphi^{-1}$ agissant sur le \mathbb{Q}_l -espace vectoriel de dimension finie $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_l(r)) = H^i(\bar{X}, Z_l(r)) \otimes_{Z_l} \mathbb{Q}_l$ sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $\sqrt{q}^i / q^r = \sqrt{q}^{i-2r}$, donc différents de 1 pour $i \neq 2r$. Comme la suite exacte de Z_l -modules de type fini

$$0 \longrightarrow M^G \longrightarrow M \xrightarrow{1-\varphi} M \longrightarrow M_G \longrightarrow 0$$

avec $M = H^i(\bar{X}, Z_l(r))$ et $i \neq 2r$ donne par tensorisation avec le Z_l -module plat \mathbb{Q}_l un isomorphisme $M \otimes_{Z_l} \mathbb{Q}_l \xrightarrow{1-\varphi} M \otimes_{Z_l} \mathbb{Q}_l$, on obtient que les Z_l -modules $H^i(\bar{X}, Z_l(r))^G$ et $H^i(\bar{X}, Z_l(r))_G$ sont de torsion, donc finis, pour $i \neq 2r$. Compte tenu de (28), ceci établit l'assertion (i).

Pour établir (ii), on utilise le théorème suivant dû à Gabber:

THÉORÈME [17]. *Soient k un corps séparablement clos de caractéristique p et X une variété algébrique projective et lisse sur k . Pour presque tout nombre premier $l \neq p$, les groupes de cohomologie l -adique $H^i(X, Z_l)$ sont sans torsion.*

En utilisant (28) et ce théorème, on est donc ramené à établir l'assertion:

- (ii)' Pour tout $i \neq 2r$, on a $H^i(\bar{X}, Z_l(r))_G = 0$ pour presque tout l .

Fixons i et r comme ci-dessus. D'après le théorème de Gabber, $H^i(\bar{X}, Z_l(r))$ coïncide, pour presque tout l , avec son quotient A_l par son sous-groupe de torsion. Pour le Z_l -module libre de type fini A_l , un argument de diviseurs

élémentaires l -adiques donne:

$$\# A_{l,G} = |\det(1 - \varphi, A_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)|_l^{-1},$$

où $| \cdot |_l$ désigne la valeur absolue l -adique normalisée. Autrement dit,

$$\# A_{l,G} = |P_l(1)|_l$$

où

$$P_l(T) = \det(1 - \varphi T, H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_l(r))).$$

D'après Deligne ([12] loc. cit., [13] corollaire 3.3.9), le polynôme $P_l(T)$ est un polynôme $P(T)$ indépendant de l et à coefficients entiers naturels. Ainsi, $P_l(1)$ est un entier indépendant de l , et non nul car $i \neq 2r$ (voir ci-dessus). Par suite, $|P_l(1)|_l = 1$ pour presque tout l , ce qui prouve (ii)' et achève donc la démonstration du théorème.

Remarque 1. Comme Deligne ([13] loc. cit.) a démontré les conjectures de Weil pour une variété propre et lisse, ainsi que l'indépendance en l et l'intégralité des polynômes caractéristiques sous cette hypothèse plus générale, la démonstration ci-dessus donne la finitude de $H^i(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(r))$ pour $i \neq 2r, 2r + 1$, pour une telle variété X , donc la finitude de la torsion l -primaire de $CH^2(X)$. Par ailleurs, pour X une variété propre et lisse sur k de caractéristique zéro, le théorème de Gabber est clair par réduction au cas $k = \mathbb{C}$ (invariance de la cohomologie par extension de corps algébriquement clos) et comparaison avec la cohomologie classique ([14] Arcata p. 51). Pour X propre et lisse sur k séparablement clos de caractéristique $p > 0$, relevable en caractéristique zéro, le théorème de Gabber reste valide par un argument de spécialisation ([14] p. 62). Ainsi, sous cette dernière hypothèse, le théorème 2, et donc la partie première à p du théorème 1, valent encore pour X propre au lieu de projective.

2.2. Théorème de finitude en cohomologie p -adique. Compte tenu du corollaire 6 (§1.4), le théorème suivant, dû à O. Gabber, donne, pour $i = 1$ et $r = 2$, la finitude de $CH^2(X)_{p\text{-tors}}$ sous les hypothèses du théorème 1:

THÉORÈME 3. *Soit X une variété algébrique projective et lisse sur le corps fini k . Pour tout entier $i \neq r, r + 1$, le groupe $H^i(X, \nu_\infty(r))$ est fini.*

Pour les définitions préliminaires, en particulier celles des faisceaux étales $\nu_n(r)$ et $\nu_\infty(r)$, voir §1.4. Il est utile de rappeler la suite exacte (lemme 3) naturelle de faisceaux étales sur X :

$$0 \longrightarrow \nu_n(r) \longrightarrow \nu_{m+n}(r) \xrightarrow{R^n} \nu_m(r) \longrightarrow 0 \tag{25}$$

et le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 v_{m+n}(r) & \xrightarrow{\times P^m} & v_{m+n}(r) \\
 & \searrow R^m & \nearrow \\
 & & v_n(r)
 \end{array} \tag{30}$$

qui définit l'injection de $v_n(r)$ dans $v_{m+n}(r)$. La démonstration comporte plusieurs étapes. On suppose $k = \mathbb{F}_p$, ce qui est licite étant donné les hypothèses.

Pas n° 1. Montrons d'abord que les systèmes projectifs $\{H^i(X, v_n(r))\}$ et $\{H^i(\bar{X}, v_n(r))\}$ définis, pour n variable, par les morphismes induits par $R^m : v_{m+n}(r) \rightarrow v_n(r)$, vérifient la condition de Mittag-Leffler. Pour le premier système, cela résulte de la finitude des groupes $H^i(X, v_n(r))$: pour établir cette finitude, on se ramène, par dévissage au moyen des suites exactes (25) du lemme 3, au cas $n = 1$ où le résultat est connu ([30] théorème 1.9 p. 176, $v_1(r) = v(r)$). Par une même réduction au cas $n = 1$ traité par Milne ([30] corollaire 2.7 p. 183), on voit que le système projectif $\{H^i(\bar{X}, v_n(r))\}$ est le système des points à valeurs dans \bar{k} d'un système projectif de groupes quasi-algébriques au sens de Serre [34]; on en déduit qu'il vérifie la condition de Mittag-Leffler, la catégorie des groupes quasi-algébriques étant formée d'objets artiniens (loc. cit. 1.3).

Pas n° 2. On note \mathcal{S} la catégorie de Serre formée des groupes abéliens annulés par une puissance de p . Par passage à la limite inductive sur les suites (25) pour m variable, on obtient d'après (30) la suite exacte de faisceaux étales

$$0 \longrightarrow v_n(r) \longrightarrow v_\infty(r) \xrightarrow{P^n} v_\infty(r) \longrightarrow 0. \tag{31}$$

On en déduit que, si $p^n H^i(X, v_\infty(r)) = 0$, le groupe $H^i(X, v_\infty(r))$ est quotient du groupe $H^i(X, v_n(r))$, qui est fini d'après le pas n° 1. Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer:

$$H^i(X, v_\infty(r)) \in \mathcal{S} \quad \text{pour tout } i \neq r, r + 1. \tag{32}$$

Pas n° 3. La suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$H^i(k, H^j(\bar{X}, v_\infty(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X, v_\infty(r))$$

donne des suites exactes

$$0 \rightarrow H^{i-1}(\bar{X}, v_\infty(r))_G \rightarrow H^i(X, v_\infty(r)) \rightarrow H^i(\bar{X}, v_\infty(r))^G \rightarrow 0. \tag{33}$$

On est ainsi ramené à prouver:

$$H^i(\bar{X}, \nu_\infty(r))_G \text{ et } H^i(\bar{X}, \nu_\infty(r))^G \in \mathcal{S} \quad \text{pour tout } i \neq r. \quad (34)$$

Pas n° 4. Soit $\hat{p}(r)$ le pro-faisceau étale défini par le système projectif des épimorphismes $R^m : \nu_{n+m}(r) \rightarrow \nu_n(r)$. On pose par définition

$$H^i(\bar{X}, \hat{p}(r)) = \varprojlim_n H^i(\bar{X}, \nu_n(r)).$$

D'après (30), les suites exactes (25) définissent, pour n variable, la suite exacte de pro-faisceaux

$$0 \longrightarrow \hat{p}(r) \xrightarrow{\times P^m} \hat{p}(r) \longrightarrow \nu_m(r) \longrightarrow 0.$$

La condition de Mittag-Leffler étant vérifiée pour le système projectif $\{H^i(\bar{X}, \nu_n(r))\}$, on en déduit des suites exactes

$$0 \rightarrow H^i(\bar{X}, \hat{p}(r)) \otimes \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p \rightarrow H^i(\bar{X}, \nu_\infty(r)) \rightarrow H^{i+1}(\bar{X}, \hat{p}(r))_{\text{tors}} \rightarrow 0. \quad (35)$$

Il en résulte que, pour obtenir (34), et donc le théorème, il suffit d'établir les assertions suivantes, quels que soient i et r :

- (i) $H^i(\bar{X}, \hat{p}(r))_{\text{tors}} \in \mathcal{S}$ quels que soient i et r ,
- (ii) $H^i(\bar{X}, \hat{p}(r)) / \text{tors}$ est un \mathbb{Z}_p -module de type fini,
- (iii) les valeurs propres de φ agissant sur $H^i(\bar{X}, \hat{p}(r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes ont pour valeur absolue \sqrt{p}^{r-i}

Pas n° 5. La suite exacte du lemme 2 relative à \bar{X} donne des suites exactes longues

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^i(\bar{X}, \nu_n(r)) \rightarrow H^i(\bar{X}, W_n \Omega_{\bar{X}}^r) \xrightarrow{1-F} H^i(\bar{X}, W_n \Omega_{\bar{X}}^r / dV^{n-1} \Omega_{\bar{X}}^{r-1}) \\ &\longrightarrow H^{i+1}(\bar{X}, \nu_n(r)) \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (36)$$

On sait que le système projectif des groupes $H^i(\bar{X}, \nu_n(r))$ vérifie la condition de Mittag-Leffler. Il en est de même du système projectif $\{H^i(\bar{X}, W_n \Omega_{\bar{X}}^r)\}$: en effet, chaque $H^i(\bar{X}, W_n \Omega_{\bar{X}}^r)$ est un $W_n(\bar{k})$ -module de type fini, comme on le voit en se ramenant par dévissage au cas $n = 1$ (voir aussi [20] II 2.1 p. 607). Soit $W \Omega_{\bar{X}}^r$ le pro-objet défini par le système projectif $\{W_n \Omega_{\bar{X}}^r\}$. La factorisation

$$W_n \Omega_{\bar{X}}^r \longrightarrow W_n \Omega_{\bar{X}}^r / dV^{n-1} \Omega_{\bar{X}}^{r-1} \xrightarrow{R} W^{n-1} \Omega_{\bar{X}}^r$$

identifie $W \Omega_{\bar{X}}^r$ avec le pro-objet défini par le système $\{W_n \Omega_{\bar{X}}^r / dV^{n-1} \Omega_{\bar{X}}^{r-1}\}$. Le système projectif $\{H^i(\bar{X}, W_n \Omega_{\bar{X}}^r / dV^{n-1} \Omega_{\bar{X}}^{r-1})\}$ vérifie aussi la condition de Mittag-Leffler. D'après le diagramme (24), on voit donc qu'on obtient, par

passage à la limite projective en n sur les suites (36), une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^i(\bar{X}, \hat{p}(r)) \longrightarrow H^i(\bar{X}, W\Omega_{\bar{X}}^r) \xrightarrow{1-F} H^i(\bar{X}, W\Omega_{\bar{X}}^r) \\ \longrightarrow H^{i+1}(\bar{X}, \hat{p}(r)) \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{37}$$

où, par définition,

$$H^i(\bar{X}, W\Omega_{\bar{X}}^r) = \varprojlim_n H^i(\bar{X}, W_n\Omega_{\bar{X}}^r).$$

On pose désormais

$$H^{i,r} = H^i(\bar{X}, W\Omega_{\bar{X}}^r).$$

Pas n° 6. Soit $\sigma \in \text{Aut}(W(\bar{k}))$ l'automorphisme obtenu en élevant à la puissance p les composantes d'un vecteur de Witt. On sait que le morphisme F est σ -linéaire ([20] 0 1.13). D'après ([20] II théorème 2.13 p. 613), $H_{\text{tors}}^{i,r} \in \mathcal{S}$ et $H^{i,r}/H_{\text{tors}}^{i,r}$ est un $W(\bar{k})$ -module de type fini. Or, si M est un $W(\bar{k})$ -module de type fini, et si $F: M \rightarrow M$ est une application σ -linéaire, $F - 1$ est automatiquement surjective ([20] II lemme 5.3 p. 627). On en déduit aisément, au moyen de la suite exacte (37), que le morphisme naturel

$$H^i(\bar{X}, \hat{p}(r)) \rightarrow (H^{i,r}/H_{\text{tors}}^{i,r})^F \tag{38}$$

est un isomorphisme modulo \mathcal{S} , ce qui prouve en particulier (i).

Pas n° 7.

LEMME 4. *Soit M un $W(\bar{k})$ -module. Si $F: M \rightarrow M$ est une application σ -linéaire, l'application naturelle $W(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M^F \rightarrow M$ est injective.*

Démonstration. Posons $B = W(\bar{k})$ et $A = W(\bar{k})^\sigma = \mathbb{Z}_p$. Soient $x_1, \dots, x_n \in M^F$ et $R \subset B^n$ le sous-module, stable par σ , des relations entre les x_i dans M . Toute relation $\sum b_i x_i = 0$ implique $\sum b_i \otimes x_i = 0$ si l'on prouve que le B -module R est engendré par $R^\sigma = R \cap A^n$. Soient $B_m = W_m(\bar{k})$ et R_m l'image de R dans B_m^n . On montre de proche en proche que la réduction $R_{m+1}^\sigma \rightarrow R_m^\sigma$ est surjective en considérant la suite exacte $0 \rightarrow N_{m+1} \rightarrow R_{m+1} \rightarrow R_m \rightarrow 0$ et en observant que $1 - \sigma$ est surjectif sur N_{m+1} , car il en est ainsi sur \bar{k}^n . On montre également de proche en proche que $R_m = B_m \cdot R_m^\sigma$ en utilisant la surjectivité de l'application de Lang pour $\text{GL}_r(\bar{k})$ [25]. D'où la surjectivité de l'application $B \cdot R^\sigma \rightarrow B_m \cdot R_m^\sigma = R_m$ pour chaque m . D'où la densité du B -module $B \cdot R^\sigma$ dans R , et finalement $B \cdot R^\sigma = R$ puisque R est un B -module de type fini. Ceci achève la démonstration. De fait, ce lemme vaut pour tout corps algébriquement clos de caractéristique p .

Il résulte en particulier de ce lemme, $W(\bar{k})$ étant fidèlement plat sur \mathbb{Z}_p , que, si M est un $W(\bar{k})$ -module de type fini, le \mathbb{Z}_p -module M^F est de type fini, ce qui prouve (ii) grâce à (38).

Pas n° 8. Pour établir (iii), on va utiliser la conjecture de Weil relative à la cohomologie cristalline de \bar{X} . On a plusieurs endomorphismes “de Frobenius”, notés φ, Fr, \mathcal{F} et F , qui agissent sur $H^{i,r} = H^i(\bar{X}, W\Omega_{\bar{X}}^r)$. On a la substitution de Frobenius φ , induite par $(id_X, \varphi): \bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p \rightarrow \bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p$. On a le morphisme de Frobenius Fr , induit par $Fr = (Frob, id_{\bar{\mathbb{F}}_p}): \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, où $Frob: X \rightarrow X$ désigne le morphisme de Frobenius absolu de X . On a l’endomorphisme de Frobenius \mathcal{F} induit par l’endomorphisme de Frobenius $\bar{X} \rightarrow \bar{X}$ qui élève les fonctions à la puissance p . D’où

$$\varphi \circ Fr = Fr \circ \varphi = \mathcal{F}. \tag{39}$$

Quant à F , qui a déjà été défini, il est induit par le morphisme de pro-faisceaux $F: W\Omega_{\bar{X}}^r \rightarrow W\Omega_{\bar{X}}^r$. D’après ([20] I 2.18, 2.19, p. 564–565), on a sur $H^{i,r}$:

$$\mathcal{F} = p^r F. \tag{40}$$

Pas n° 9. Soient $K = \widehat{\mathbb{Q}}_p^{nr}$ le corps des fractions de $W(\bar{k})$ et $H_{\text{cris}}^i(\bar{X}/W(\bar{k}))$ la cohomologie cristalline de \bar{X} . D’après ([20] II théorème 3.2, p. 615), la suite spectrale des pentes (loc. cit. p. 614) dégénère modulo torsion dès E_1 et fournit un isomorphisme naturel de K -espaces vectoriels

$$H_{\text{cris}}^m(\bar{X}/W(\bar{k})) \otimes_{W(\bar{k})} K \simeq \bigoplus_{i+r=m} H^{i,r} \otimes_{W(\bar{k})} K$$

compatible à l’action de Fr . On sait, d’après Katz et Messing [24], que la cohomologie cristalline vérifie la conjecture de Weil: ici, X/\mathbb{F}_p n’est pas nécessairement géométriquement connexe comme supposé dans [24], mais la méthode de réduction utilisée par Deligne ([12] 7.2 p. 301) s’applique de même. Les valeurs propres de l’endomorphisme $Fr \otimes 1$ agissant sur le K -espace vectoriel $H_{\text{cris}}^{i+r}(\bar{X}/W(\bar{k})) \otimes_{W(\bar{k})} K$ sont des entiers algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue \sqrt{p}^{i+r} . Il en est donc de même pour l’action de Fr sur $H^{i,r} \otimes_{W(\bar{k})} K$. D’après le pas n° 8,

$$p^r F = \varphi \circ Fr \tag{41}$$

dans l’algèbre des endomorphismes de cet espace vectoriel. D’après le lemme 4, l’application naturelle $(H^{i,r})^F \otimes_{\mathbb{Z}_p} K \rightarrow H^{i,r} \otimes_{W(\bar{k})} K$ est injective. On en déduit que les valeurs propres de l’action de φ sur le K -espace vectoriel de dimension finie $(H^{i,r})^F \otimes_{\mathbb{Z}_p} K$ sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes ont pour valeur absolue $p^r/p^{(i+r)/2} = p^{(r-i)/2}$. Cela prouve (iii) et achève la démonstration du théorème.

2.3. *La classe fondamentale l -adique pour les cycles de codimension 2.* On a le résultat suivant:

THÉORÈME 4. *Soient X une variété algébrique projective et lisse sur un corps fini k et l un nombre premier différent de la caractéristique de k . L'application cycle l -adique est injective sur la torsion l -primaire:*

$$CH^2(X)_{l\text{-tors}} \xrightarrow{\rho} H^4(X, \mathbb{Z}_l(2)).$$

On considère le diagramme du corollaire 1 pour $i = r = 2$:

$$\begin{array}{ccc}
 CH^2(X)_{l\text{-tors}} & \xrightarrow{\rho} & H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))_{\text{tors}} \\
 \uparrow \alpha & \searrow \lambda & \uparrow \beta \\
 H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) & \xrightarrow{\gamma} & H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)).
 \end{array} \tag{42}$$

Comme on l'a vu au §2.1 les groupes $H^j(X, \mathbb{Z}/l^r(2))$ sont finis et les conjectures de Weil impliquent $H^3(X, \mathbb{Q}_l(2)) = 0$. Il en résulte comme indiqué au corollaire 3 (ii) du §1.2 que β est injective, que α est un isomorphisme et, finalement, que ρ est injective. On peut de plus introduire $\lambda = \gamma \circ \alpha^{-1}$ dans le diagramme.

2.4. *Corps de classes de Hilbert pour une surface sur un corps fini.* Soient k un corps fini de caractéristique p et X une surface algébrique complète et lisse sur k . On note $A_0(X)$ le sous-groupe de $CH^2(X)$ formé des classes de 0-cycles de degré 0. On note $\pi_1^{ab}(X)$ le plus grand quotient abélien du groupe fondamental $\pi_1(X)$ et $\pi_1^{\text{g\u00e9om}}(X)$ le noyau de la surjection naturelle $\pi_1^{ab}(X) \rightarrow \pi_1(k) = \hat{\mathbb{Z}}$ (voir [23]). L'application de r\u00e9ciprocit\u00e9

$$\theta : CH^2(X) \rightarrow \pi_1^{ab}(X)$$

est d\u00e9finie par $\theta(x) = F_x$ o\u00f9 F_x d\u00e9signe le Frobenius local au point ferm\u00e9 x de X . On a le diagramme commutatif suivant, dont les horizontales sont des suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_0(X) & \longrightarrow & CH^2(X) & \xrightarrow{d^0} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \theta_0 & & \downarrow \theta & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \pi_1^{\text{g\u00e9om}}(X) & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(X) & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0.
 \end{array} \tag{43}$$

La surjectivit\u00e9 du d^0 , i.e. l'existence d'un z\u00e9ro-cycle de d^0 est une cons\u00e9quence des estimations de Lang–Weil–Nisnev\u00ed\u010d (voir [26] p. 308).

PROPOSITION 4. *Soit X une surface algébrique projective, lisse et géométriquement intègre sur le corps F_q . Le groupe $A_0(X)$ des classes de 0-cycles de d^0 modulo l'équivalence rationnelle est un groupe fini.*

Il suffit d'établir que $A_0(X)$ est de torsion, auquel cas $A_0(X) = CH^2(X)_{\text{tors}}$ est fini d'après le théorème 1. Soit donc z un 0-cycle de d^0 sur X . Par application d'une variante des théorèmes de Bertini à X_K , pour $K = \bigcup_i F_{q^{l^i}}$ avec l premier fixé et $i \in \mathbb{N}$, on trouve une extension k_1 de F_q de degré l^i et une courbe C_1 définie sur k_1 , projective, lisse et géométriquement intègre, tracée sur X_{k_1} et passant par le support de z_{k_1} . La classe de z_{k_1} est certainement de torsion dans $J_{C_1}(k_1)$ où J_{C_1} désigne la jacobienne de C_1 . Il en est donc de même de sa classe dans $CH^2(X_{k_1})$. Un argument de transfert montre alors que la classe de $l^i z$ dans $CH^2(X)$ est également de torsion. Comme l est arbitraire, on conclut par Bezout.

On en tire la généralisation suivante qui ne sera utile qu'au §3:

COROLLAIRE 7. *Soit X une variété algébrique sur le corps fini F_q . On suppose $\dim X \leq 2$. Alors, les groupes d'homologie de Chow $CH_i(X)$ sont de type fini.*

Pour la théorie de l'équivalence rationnelle sur les variétés éventuellement singulières et la définition des groupes d'homologie de Chow, voir Fulton [16].

Pour la démonstration, on peut d'abord supposer X réduite. Pour $Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée, on dispose ([16] 1.9) des suites exactes

$$CH_i(Y) \rightarrow CH_i(X) \rightarrow CH_i(X - Y) \rightarrow 0. \quad (44)$$

On peut donc supposer X intègre. Quitte à faire une extension finie du corps de base, on peut même supposer X géométriquement intègre (un argument de transfert montre qu'une telle extension du corps de base n'est pas gênante pour l'assertion du corollaire). Comme on dispose de la résolution des singularités pour une variété de dimension ≤ 2 (Abhyankar), la suite exacte ci-dessus nous ramène, après compactification et désingularisation, au cas d'une F_q -variété projective, lisse et géométriquement intègre, de dimension 1 ou 2. En dimension 1, le résultat est clair: on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow J_X(F_q) \longrightarrow CH_0(X) \xrightarrow{d^0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

En dimension 2, on a les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow A_0(X) \longrightarrow CH_0(X) \xrightarrow{d^0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow J_X(F_q) \longrightarrow CH_1(X) \longrightarrow NS(X) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où J_X est la variété de Picard de X et $NS(X)$ le groupe de Néron-Severi, qui est de type fini. D'où l'assertion du corollaire, compte tenu de la finitude de $A_0(X)$.

On revient aux hypothèses de la proposition 4: soit X une surface algébrique, projective, lisse et géométriquement intègre sur le corps $k = F_q$ de caractéristique p . Ainsi, $A_0(X)$ est fini. Il en est de même de $\pi_1^{\text{g\u00e9om}}(X)$ d'après Lang [26, 27].

L'objet de cette section est de donner une autre démonstration du théorème suivant de Kato et Saito, du moins pour la partie première à p :

THÉORÈME [22]. *Soit X une surface algébrique complète, lisse et géométriquement intègre sur le corps fini F_q . L'application de réciprocité induit un isomorphisme*

$$A_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{gcom}}(X)$$

de groupes finis.

De fait, la surjectivité de θ_0 est due à Lang ([26], [27] p. 405) qui a établi la densité des Frobenius locaux, autrement dit le fait que l'image de θ est dense.

On va donc établir l'injectivité de θ_0 restreinte à $A_0(X)_{p' \text{-tors}}$. Pour tout entier n on a, pour π_1^{ab} , la formule suivante:

$$H^1(X, \mathbb{Z}/n) = \text{Hom}(\pi_1^{ab}(X), \mathbb{Z}/n)$$

et, $H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ étant fini, $\pi_1^{ab}(X)/n = \text{Hom}(H^1(X, \mathbb{Z}/n), \mathbb{Z}/n)$, d'où, pour l premier:

$$\pi_1^{ab}(X) \otimes \mathbb{Z}_l = H^1(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^*$$

où $*$ désigne $\text{Hom}(\ , \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Il s'agit de voir que θ_0 est injective sur $A_0(X)_{l \text{-tors}} = CH^2(X)_{l \text{-tors}}$ pour tout l premier $\neq p$. La démonstration se découpe en trois:

(i) La dualité de Poincaré définit un isomorphisme

$$\sigma : H^4(X, \mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^* = \pi_1^{ab}(X) \otimes \mathbb{Z}_l. \tag{45}$$

(ii) La composée de l'application cycle et de la dualité de Poincaré

$$CH^2(X) \xrightarrow{\rho} H^4(X, \mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sigma} \pi_1^{ab}(X) \otimes \mathbb{Z}_l$$

est l'application de réciprocité θ .

(iii) L'application cycle

$$CH^2(X)_{l \text{-tors}} \xrightarrow{\rho} H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))$$

est injective sur la torsion l -primaire.

Les deux premières assertions sont établies ci-après. La troisième a été établie au §2.3. On en déduit que l'application composée

$$CH^2(X)_{l \text{-tors}} \xrightarrow{\rho} H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))_{\text{tors}} \xrightarrow{\sigma} \pi_1^{\text{gcom}}(X)_{l \text{-tors}},$$

qui n'est autre que la restriction de θ_0 à la torsion l -primaire, est un isomorphisme. De même donc que l'application ρ ci-dessus. On voit ainsi que,

lorsque X est une surface, tous les morphismes du diagramme (42) sont des isomorphismes, ce qui conduit en particulier à la remarque suivante:

Remarque 2. On conserve les mêmes hypothèses sur X . La suite spectrale

$$E_2^{i,j} = H_{\text{Zar}}^i(X, \mathcal{H}^j(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$$

donne une suite de termes de bas degré $0 \rightarrow E_2^{1,2} \rightarrow E^3 \rightarrow E_2^{0,3} \rightarrow E_2^{2,2} \rightarrow E^4$, autrement dit:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{H}^2(2)) \xrightarrow{\gamma} H^3(X, 2) \longrightarrow H_{\text{Zar}}^0(X, \mathcal{H}^3(2)) \\ \longrightarrow H_{\text{Zar}}^2(X, \mathcal{H}^2(2)) \xrightarrow{c} H^4(X, 2) \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}^j(2) = \mathcal{H}^j(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$. La résolution de Gersten du faisceau $\mathcal{H}^j(2)$ due à Bloch et Ogus permet d'identifier $H_{\text{Zar}}^2(X, \mathcal{H}^2(2))$ à $CH^2(X) \otimes (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)$ ([7] 7.7 p. 198–199) et l'application c à l'application cycle $CH^2(X) \otimes (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \rightarrow H^4(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$. Elle est donc injective sous les hypothèses faites sur X : c'est en fait un isomorphisme $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \simeq \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$. Quant au morphisme γ , c'est le même que dans le diagramme (42). Il est donc surjectif. En conclusion,

$$H_{\text{Zar}}^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) = 0.$$

Démonstration de l'assertion (i). C'est une conséquence du lemme suivant:

LEMME 5. *Soit X une surface algébrique complète, lisse et géométriquement intègre sur le corps fini k de caractéristique p . Soit n un entier > 1 premier à p . On a une dualité de Poincaré*

$$H^i(X, \mathbf{Z}/n(r)) \times H^{5-i}(X, \mathbf{Z}/n(2-r)) \xrightarrow{\delta} \mathbf{Z}/n$$

pour tout entier i et tout $r \in \mathbf{Z}$. Cette dualité est une dualité parfaite de groupes finis. En particulier, $H^4(X, \mathbf{Z}/n(2)) = \text{Hom}(H^1(X, \mathbf{Z}/n), \mathbf{Z}/n)$.

Soient \bar{k} une clôture algébrique de k et $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Soit φ la substitution de Frobenius, générateur topologique de G . Comme $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ est une surface complète, lisse et intègre, on a une dualité de Poincaré ([14] Arcata, p. 71 théorème 3.1)

$$H^i(\bar{X}, \mathbf{Z}/n(r)) \times H^{4-i}(\bar{X}, \mathbf{Z}/n(2-r)) \xrightarrow{\cup} H^4(\bar{X}, \mathbf{Z}/n(2)) \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbf{Z}/n$$

qui est une dualité parfaite de groupes finis compatible à l'action de G , et où la

trace Tr est un isomorphisme. On en déduit un diagramme commutatif donné par les cup-produits et la suite spectrale d’Hochschild–Serre relative à \bar{k}/k :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}/n(r)) \times H^0(k, H^{5-i}(\bar{X}, \mathbb{Z}/n(2-r))) & \xrightarrow{\cup} & H^1(k, H^4(\bar{X}, \mathbb{Z}/n(2))) \\
 \downarrow & & \uparrow \quad \downarrow \simeq \eta \\
 H^i(X, \mathbb{Z}/n(r)) \times H^{5-i}(X, \mathbb{Z}/n(2-r)) & \xrightarrow{\cup} & H^5(X, \mathbb{Z}/n(2))
 \end{array}
 \tag{46}$$

où la verticale de droite est un isomorphisme puisque $H^5(\bar{X}, \mathbb{Z}/n) = 0$. D’autre part, Tr est un G -isomorphisme, donc φ agit trivialement sur $H^4(\bar{X}, \mathbb{Z}/n(2))$ et on peut définir une nouvelle trace par composition des deux isomorphismes suivants:

$$H^5(X, \mathbb{Z}/n(2)) \xrightarrow{\eta^{-1}} H^1(k, H^4(\bar{X}, \mathbb{Z}/n(2))) \xrightarrow{H^1(k, Tr)} \mathbb{Z}/n.$$

Celle-ci définit δ par composition avec le cup-produit. Il est clair que la dualité de Poincaré sur \bar{X} induit une dualité parfaite au niveau de la première ligne du diagramme (46): en effet, la transposée de $\varphi - 1$ pour cette dualité est $\varphi^{-1} - 1$, la dualité induit donc un accouplement parfait entre le conoyau de $\varphi - 1$ et le noyau de $\varphi^{-1} - 1$, qui est aussi celui de $\varphi - 1$. Les suites exactes (26) montrent alors que l’accouplement δ est une dualité parfaite de groupes finis.

Démonstration de l’assertion (ii). Si x est un point fermé de X , l’application cycle coïncide sur le sous-groupe de $CH^2(X)$ engendré par x avec le morphisme de Gysin $i_* : H^0(x, \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}/n(2))$. La formule de projection ([32] VI 6.5 p. 250) et la compatibilité des traces Tr ([32] VI 11.1 p. 276, noter aussi que la norme $H^1(k(x), \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^1(k, \mathbb{Z}/n)$ est l’identité $\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$) assurent la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 H^4(X, \mathbb{Z}/n(2)) \times H^1(X, \mathbb{Z}/n) & \xrightarrow{\cup} & H^5(X, \mathbb{Z}/n(2)) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/n \\
 \uparrow i_* & & \downarrow i^* & & \parallel \\
 H^0(x, \mathbb{Z}/n) \times H^1(x, \mathbb{Z}/n) & \xrightarrow{\cup} & H^1(x, \mathbb{Z}/n) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/n
 \end{array}$$

autrement dit la compatibilité des dualités de Poincaré pour X et x . Ceci donne

le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^4(X, \mathbb{Z}/n(2)) & \longrightarrow & H^1(X, \mathbb{Z}/n)^* = \pi_1^{ab}(X)/n \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H^0(x, \mathbb{Z}/n) & \longrightarrow & H^1(x, \mathbb{Z}/n)^* = \pi_1(x)/n
 \end{array}$$

et prouve ainsi que $\theta(x)$ est la classe dans $\pi_1^{ab}(X)/n$ du Frobenius local F_x en x .

2.5. *La classe fondamentale l -adique pour les 0-cycles.* Le cas de dimension 2 est le cas crucial pour l'énoncé suivant:

THÉORÈME 5. *Soient k un corps fini, X une k -variété algébrique projective et lisse de dimension d , et l un nombre premier différent de la caractéristique de k . L'application cycle définit un isomorphisme θ :*

$$CH^d(X) \otimes \mathbb{Z}_l \xrightarrow{\sim} H^{2d}(X, \mathbb{Z}_l(d)).$$

Pour $d = 2$, c'est un corollaire immédiat du §2.4: l'application cycle

$$CH^2(X)/l^v \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}/l^v(2))$$

est surjective, puisqu'il en est ainsi, d'après Lang, de la composée

$$CH^2(X)/l^v \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}/l^v(2)) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/l^v)^* = \pi_1^{ab}(X)/l^v$$

qui, d'après 2.4, envoie un point fermé x sur le Frobenius local F_x . Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_0(X) \otimes \mathbb{Z}_l & \longrightarrow & CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l & \xrightarrow{d^0} & \mathbb{Z}_l \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \theta_0 & & \downarrow \theta & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))_{\text{tors}} & \longrightarrow & H^4(X, \mathbb{Z}_l(2)) & \longrightarrow & H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))/\text{tors} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

θ est donc surjective et θ_0 est un isomorphisme d'après 2.4. On en déduit que les deux autres verticales, en particulier θ , sont des isomorphismes. Noter que la partie libre de $H^4(X, \mathbb{Z}_l(2))$ s'identifie à $H^4(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(2))^G$.

Pour d quelconque, la démonstration se fait par récurrence sur d . Commençons par un *résultat préliminaire* relatif à une section hyperplane lisse éventuelle $Y \xrightarrow{i} X$. Par transitivité des morphismes de Gysin ([32] VI 6.5 p. 250), on a alors

un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 CH_0(X) \otimes Z_l & \xrightarrow{\rho_X} & H^{2d}(X, Z_l(d)) \\
 \uparrow j_Y & & \uparrow i_* \\
 CH_0(Y) \otimes Z_l & \xrightarrow{\rho_Y} & H^{2d-2}(Y, Z_l(d-1))
 \end{array} \tag{47}$$

où i_* est le morphisme de Gysin et j_Y le morphisme naturel évident. Les suites exactes (26), les \tilde{i}_* et i_* donnent le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & H^{2d-1}(\bar{X}, Z_l(d))_G & \longrightarrow & H^{2d}(X, Z_l(d)) & \longrightarrow & H^{2d}(\bar{X}, Z_l(d))^G & \longrightarrow 0 \\
 & \uparrow \tilde{i}_* & & \uparrow i_* & & \uparrow \tilde{i}_* & \\
 0 \longrightarrow & H^{2d-3}(\bar{Y}, Z_l(d-1))_G & \longrightarrow & H^{2d-2}(Y, Z_l(d-1)) & \longrightarrow & H^{2d-2}(\bar{Y}, Z_l(d-1))^G & \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Le théorème de Lefschetz faible ([13] 4.1.6 p. 218, [32] VI §7) appliqué à (\bar{X}, \bar{Y}) montre que les \tilde{i}_* sont des isomorphismes, car $d > 2$ implique $2d - 2$ et $2d - 3 > d - 1$. Donc i_* est un isomorphisme. On déduit alors du diagramme (47) et de l'hypothèse de récurrence pour Y que ρ_X est surjective et que sa restriction à l'image de j_Y est injective.

Soit q un nombre premier auxiliaire. Soit z un zéro-cycle de X à coefficients dans Z_l dont la classe $[z]$ dans $CH_0(X) \otimes Z_l$ soit dans le noyau de ρ_X . Par application d'une variante de Bertini comme dans la démonstration de la proposition 4 au §2.4, il existe une extension k'/k de degré q^r telle que $X' = X_{k'}$ possède une section hyperplane lisse Y' qui contienne le support de $z' = z_{k'}$. Donc, par le résultat préliminaire appliqué à (X', Y') , l'application $\rho_{X'}$ est surjective et $[z'] = 0$ dans $CH_0(X') \otimes Z_l$. L'application cycle étant compatible au transfert π_* défini par $\pi : X' \rightarrow X$ et la composée $\pi_* \pi^*$ étant la multiplication par q^r , on en déduit que le conoyau de ρ_X est annulé par q^r et que $q^r [z] = 0$ dans $CH_0(X) \otimes Z_l$. Comme q est arbitraire, on en déduit que ρ_X est surjective et que $[z] = 0$. Ceci achève la démonstration.

Remarque 3. De fait, le résultat de cette section 2.5 n'est qu'une reformulation du §9 de Kato-Saito [22], et le principe de la démonstration est le même. On doit en effet noter que, comme au §2.4, la dualité de Poincaré définit un isomorphisme

$$H^{2d}(X, Z_l(d)) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{ab}(X) \otimes Z_l. \tag{48}$$

§3. Surfaces sur un corps de fonctions sur un corps fini. On étudie $CH^2(X)$ pour certaines surfaces algébriques définies sur un corps global de caractéristique $p > 0$. On commence par quelques résultats auxiliaires.

3.1. *Lemmes préliminaires.*

LEMME 6. *Soit X une courbe algébrique sur un corps k de type fini sur le corps premier. Alors, le groupe $CH_0(X)$ est un groupe abélien de type fini.*

Ceci est bien sûr une reformulation du théorème de Mordell–Weil–Néron. Pour établir le lemme, on peut supposer X réduite, puis intègre en utilisant la suite exacte (44). On peut de plus supposer X géométriquement intègre. Enfin, toujours par la même suite, on peut supposer X projective, et normale. On retrouve alors la formulation due à Roquette du théorème de Mordell–Weil–Néron (voir [28] chap. II theorem 6 p. 39).

LEMME 7. *Soient k un corps, Z une k -variété algébrique quasi-projective et lisse, et \mathcal{E} un fibré localement libre de rang $m + 1$ sur Z . Alors*

$$CH^i(\mathbb{P}_Z(\mathcal{E})) = CH^i(Z) \oplus CH^{i-1}(Z) \oplus \dots \oplus CH^{i-m}(Z).$$

C'est le calcul classique (par exemple [15] II-14 lemme 3 p. 48) de l'anneau de Chow d'un fibré projectif.

Plus précisément, posons $\mathbb{P} = \mathbb{P}_Z(\mathcal{E})$, puis considérons le faisceau inversible canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ sur \mathbb{P} et sa classe $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$ dans $\text{Pic } \mathbb{P} = CH^1(\mathbb{P})$. L'injection $CH^{i-j}(Z) \rightarrow CH^i(\mathbb{P})$ est donnée par $y \mapsto g^*(y) \cdot \xi^j$, où $g: \mathbb{P} \rightarrow Z$ désigne la projection canonique.

Notons par ailleurs que, si \mathcal{F} est le faisceau localement libre défini par la suite exacte canonique de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow g^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \rightarrow 0, \tag{49}$$

on a $y = g_*(g^*(y) \cdot c_m(\mathcal{F}))$ pour tout $y \in CH^r(Z)$ (voir [19] exp. VII 9.1 p. 335).

LEMME 8. *Soient k un corps, Y et Z deux k -variétés quasi-projectives et lisses et $i: Z \rightarrow Y$ une k -immersion fermée de codimension $m + 1$. Soit $f: Y' \rightarrow Y$ l'éclaté de Y le long de Z . Si $CH^r(Z) = 0$ pour tout r tel que $j - m \leq r < j$, alors*

$$f^*: CH^j(Y) \rightarrow CH^j(Y')$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On a le diagramme commutatif cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{i'} & Y' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

et $Z' = \mathbf{P}_Z(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E} = \mathcal{N}_{Z/Y}$ est le fibré normal de Z dans Y , localement libre de rang $m + 1$. Soit \mathcal{F} comme en (49) au lemme 7. On a la suite exacte ([19] VII théorème 9.9 p. 347)

$$0 \longrightarrow CH^{j-m-1}(Z) \xrightarrow{\lambda} CH^{j-1}(Z') \oplus CH^j(Y) \xrightarrow{\mu} CH^j(Y') \longrightarrow 0$$

où $\mu(x, y) = i'_*(x) + f^*(y)$ et $\lambda(x) = (g^*(x) \cdot c_m(\mathcal{F}), -i_*(x))$. D'après les hypothèses et le lemme 7, l'injection $CH^{j-m-1}(Z) \rightarrow CH^{j-1}(Z')$ donnée par $x \mapsto g^*(x) \cdot \xi^m$ est un isomorphisme, dont l'inverse est g_* . Il en est donc de même de l'injection $x \mapsto g^*(x) \cdot c_m(\mathcal{F})$ qui admet aussi g_* pour rétraction. Il en résulte que $f^* : CH^j(Y) \rightarrow CH^j(Y')$ est un isomorphisme.

COROLLAIRE 8. *Soient k un corps et Z une k -variété algébrique quasi-projective et lisse telle que $\text{Pic } Z = 0$. Soient $\pi : Y \rightarrow Z$ une famille lisse de surfaces algébriques possédant une section $\sigma : Z \rightarrow Y$ et $q : Y' \rightarrow Y$ l'éclaté de Y le long de $\sigma(Z)$. Alors*

$$q^* : CH^2(Y) \rightarrow CH^2(Y')$$

est un isomorphisme.

Corollaire immédiat du lemme précédent pour $m = 1$ et $j = 2$ auquel cas les hypothèses se réduisent à $\text{Pic } Z = 0$.

3.2. Surfaces rationnelles. Soit k un corps. Soit X une k -surface algébrique projective et lisse, géométriquement intègre. On dit que X est une *surface rationnelle* s'il existe une extension finie k'/k pour laquelle $X_{k'}$ est k' -birationnelle à $\mathbf{P}_{k'}^2$. Si en outre $X_{k'}$ se déduit de $\mathbf{P}_{k'}^2$ par un nombre fini d'éclatements de points k' -rationnels et de contractions de courbes exceptionnelles de première espèce, définies et absolument irréductibles sur k' , on dit que k' déploie X . Pour X rationnelle donnée, il existe toujours une telle extension k'/k finie.

THÉORÈME 6. *Soient k un corps de fonctions d'une ou de deux variables sur un corps fini de caractéristique p et X une k -surface rationnelle. Le groupe $A_0(X)$ des classes pour l'équivalence rationnelle de 0-cycles de degré 0 est, à la torsion p -primaire près, fini.*

Démonstration. Soit $k = k_0(Z)$ le corps des fonctions rationnelles d'une k_0 -variété algébrique Z , affine si l'on veut, lisse et géométriquement intègre sur le corps fini k_0 , de dimension 1 ou 2. Quitte à restreindre Z , il existe ([18] EGA IV 8.8.2) une k_0 -variété Y et un k_0 -morphisme projectif, lisse, à fibres géométriquement intègres, $\pi : Y \rightarrow Z$, de fibre générique X/k . Soit k'/k une extension finie déployant la k -surface rationnelle X , et soit Z' la clôture intégrale de Z dans k' , qui est finie sur Z ([8] chap. 5 §3 n° 2 théorème 2 p. 63). On utilise dans la suite, plusieurs fois et de façon implicite, la *remarque* suivante: comme la projection $\alpha : Z' \rightarrow Z$ est finie, tout ouvert non vide U' de Z' contient un ouvert de la forme $\alpha^{-1}(U)$, pour U ouvert non vide de Z . Soient $Y' = Y \times_Z Z'$ et

$X' = X_{k'} = X \times_k k'$. Considérons alors les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{\varphi} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z' & \xrightarrow{\alpha} & Z
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{\psi} & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Spec } k' & \longrightarrow & \text{Spec } k.
 \end{array}$$

Le carré de droite est la restriction du carré de gauche au point générique $\text{Spec } k$ de Z . Comme Z' est intègre et que le corps de base est fini, donc parfait, on peut, quitte à restreindre Z à un ouvert non vide, supposer Z' lisse sur k_0 . Comme $\dim Z \leq 2$, on peut en outre, quitte encore à restreindre Z , supposer, grâce au corollaire 7 du §2.4,

$$CH_i(Z') = 0 \quad \text{pour tout } i < \dim Z',$$

et, via (44), ceci vaudra encore pour tout ouvert non vide U' de Z' .

Si l'on considère deux k' -variétés algébriques lisses X'_0 et X'_1 et des prolongements respectifs Y'_0 et Y'_1 lisses au-dessus de Z' , et si l'on suppose que X'_1 est k' -isomorphe à l'éclatement \tilde{X}'_0 d'un point k' -rationnel x_0 de X'_0 , on peut prolonger celui-ci en une section σ_0 de $Y'_0 \rightarrow Z'$ au-dessus d'un ouvert convenable de Z' . Puis, quitte à restreindre encore Z' , on peut prolonger le k' -isomorphisme $X'_1 \rightarrow \tilde{X}'_0$ en un Z' -isomorphisme $Y'_1 \rightarrow \tilde{Y}'_0$ où \tilde{Y}'_0 désigne l'éclatement de Y'_0 le long de $\sigma_0(Z')$. Comme $\text{Pic } Z' = 0$, le corollaire 8 assure qu'on obtient ainsi un isomorphisme $CH^2(Y'_1) \xrightarrow{\sim} CH^2(Y'_0)$.

Par application répétée de cette observation un nombre fini de fois, en fonction des éclatements et contractions qui permettent de passer de $\mathbb{P}^2_{k'}$ à X' , on obtient donc, quitte à restreindre Z , un isomorphisme

$$CH^2(Y') \rightarrow CH^2(\mathbb{P}^2_{Z'})$$

compatible avec la restriction à la fibre générique, i.e. au changement de base $\text{Spec } k' \rightarrow Z'$. Or, d'après le lemme 7, cette restriction

$$CH^2(\mathbb{P}^2_{Z'}) \rightarrow CH^2(\mathbb{P}^2_{k'}) = \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme puisque $CH^2(Z') = \text{Pic } Z' = 0$. On obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 CH^2(Y) & \xrightarrow{\rho} & CH^2(X) \\
 \varphi^* \downarrow & & \downarrow \psi^* \\
 CH^2(Y') & \longrightarrow & CH^2(X') \\
 \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\
 \mathbb{Z} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

par restriction de Z à $\text{Spec } k$ et application de la functorialité contravariante. Comme ρ est évidemment surjective, on en déduit une surjection naturelle

$$\ker \varphi^* \longrightarrow \ker \psi^*.$$

De plus, l'application composée

$$CH^2(X) \xrightarrow{\psi^*} CH^2(X') \xrightarrow{\sim} Z$$

n'est autre que l'application degré, car elle commute avec $*$, et avec éclatements et contractions, et l'identification $CH^2(\mathbb{P}_k^2) = Z$ est donnée par le degré. D'où

$$\ker \psi^* = A_0(X).$$

Comme $Y' \xrightarrow{\varphi} Y$ est fini de degré n , on peut considérer le morphisme composé

$$CH^2(Y) \xrightarrow{\varphi^*} CH^2(Y') \xrightarrow{\varphi_*} CH^2(Y)$$

qui n'est autre que la multiplication par n (par la formule de projection, il suffit, pour l'établir, de savoir que $\varphi_*(1) = n$, ce qui est la définition de $\varphi_*(1)$, puisque, φ étant de degré n , il en est de même de l'extension des corps de fonctions).

En résumé, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \ker \varphi^* & \longrightarrow & A_0(X) \\ \downarrow & & \\ {}_n CH^2(Y) & & \end{array}$$

Soient l un diviseur premier de n , différent de la caractéristique p de k , et $n = l'm$ avec $(l, m) = 1$. On obtient alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\ker \varphi^*)_{l\text{-tors}} & \longrightarrow & A_0(X)_{l\text{-tors}} \\ \downarrow & & \\ {}_{l'} CH^2(Y) & & \end{array}$$

ce qui permet de conclure à la finitude de $A_0(X)_{l\text{-tors}}$ par application du corollaire 2 à Y . Comme $A_0(X)$ est annulé par n , ceci achève la démonstration.

3.3. *Surfaces fibrées en coniques.* On obtient le résultat suivant:

THÉORÈME 7. *Soit k un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini k_0 de caractéristique $p \neq 2$. Soit C une k -courbe algébrique intègre, et soit X une k -surface algébrique munie d'un k -morphisme $q: X \rightarrow C$ dont la fibre générique soit une courbe propre, lisse, géométriquement intègre et de genre zéro. Alors, le groupe $CH_0(X)$ est de type fini.*

Démonstration. Quitte à restreindre C , ce qui ne modifie pas le résultat (comme on le voit en utilisant la suite (44) et le lemme 6), on peut supposer C/k lisse, géométriquement intègre (quitte à changer k par une extension finie), et X/C projectif, lisse, à fibres géométriques isomorphes à des droites projectives. La fibre générique de q est une conique lisse sur le corps $k(C)$, de caractéristique $p \neq 2$, qui possède, d'après le théorème de Tsen, un point à valeurs dans le corps $\bar{k}(C)$ des fonctions rationnelles de $C \times_k \bar{k}$, donc aussi, puisque $p \neq 2$, dans le corps $k_s(C)$ où k_s est la clôture séparable de k dans \bar{k} (utiliser par exemple le théorème de Springer [35]). Soit alors k'/k une extension galoisienne finie de groupe G telle que la conique générique ait un point dans $k'(C)$. On pose $q' = q_{k'}$, $X' = X_{k'}$ et $C' = C_{k'}$. La projection $q' : X' \rightarrow C'$ admet alors une section, puisque c'est le cas au voisinage du point générique de C' , que C' est une k' -courbe lisse et intègre, et que q' est un k' -morphisme propre. Par ailleurs, les fibres de la projection q' sont des courbes de genre zéro munies d'un point rationnel (via la section). On voit alors que q' induit un isomorphisme

$$q'_* : CH_0(X') \xrightarrow{\sim} CH_0(C')$$

(tout point fermé de X' est rationnellement équivalent, le long de sa fibre, à un multiple du point de sa fibre situé sur la section choisie). Pour l premier, $l \neq 2$, soient G_l un l -sous-groupe de Sylow de G et $k'_l = k'^{G_l}$. Posons $q'_l = q_{k'_l}$, $X'_l = X_{k'_l}$ et $C'_l = C_{k'_l}$. Le théorème de Springer assure que la conique générique admet un $k'_l(C)$ -point rationnel, donc que $q'_l : X'_l \rightarrow C'_l$ admet une section. On a donc aussi un isomorphisme

$$q'_{l*} : CH_0(X'_l) \xrightarrow{\sim} CH_0(C'_l).$$

D'après le lemme 6, tous les groupes $CH_0(C'_l)$, pour l premier différent de 2, sont de type fini; il en est donc de même des groupes $CH_0(X'_l)$, si bien que, pour établir le théorème, il suffit de voir que le groupe

$$\ker \left[CH^2(X) \rightarrow \prod_{\substack{l \mid \# G \\ l \neq 2}} CH^2(X'_l) \right]$$

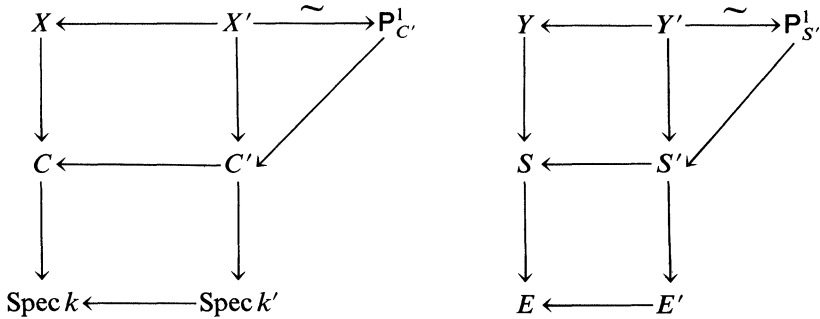
est fini. Un argument de transfert montre que ce groupe est annulé par 2^s pour $2^s \parallel \# G$. On va en fait montrer que, quitte à restreindre C , donc X , le groupe

$$2^s \left[\ker(CH^2(X) \rightarrow CH^2(X')) \right]$$

est fini. Notons que, d'après (44) et le lemme 6, on peut effectivement restreindre X à un ouvert non vide pour établir le théorème.

Quitte à restreindre encore C , on peut supposer que l'on dispose d'un C' -isomorphisme $X' \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{C'}^1$ (cela est vrai au point générique de C' , donc aussi sur un ouvert de C' , d'après [18] EGA IV 8.8.2). Invoquant plusieurs fois la même référence, on trouve deux k_0 -courbes algébriques intègres et lisses E et E' de

corps de fonctions respectifs k et k' , un k_0 -morphisme fini $E' \rightarrow E$ prolongeant le morphisme naturel $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$, une k_0 -surface lisse et intègre S et un k_0 -morphisme $S \rightarrow E$ qui étend le morphisme structural $C \rightarrow \text{Spec } k$, une k_0 -variété lisse et intègre Y et un k_0 -morphisme projectif et lisse $Y \rightarrow S$ qui étend la projection $q: X \rightarrow C$, tous ces objets étant tels que, pour $S' = S \times_E E'$ et $Y' = Y \times_E E'$, le C' -isomorphisme $X' \rightarrow \mathbf{P}^1_{C'}$ provienne d'un S' -isomorphisme $Y' \rightarrow \mathbf{P}^1_{S'}$. Tous ces choix étant ainsi faits, on a les diagrammes suivants, dont les carrés sont cartésiens:



le carré de gauche étant induit par celui de droite par restriction au point générique de E . On dispose alors du diagramme commutatif suivant, obtenu par passage de $\text{Spec } k$ à $\text{Spec } k'$ et de E à E' (pour les horizontales de gauche), restriction de E à $\text{Spec } k$ et de E' à $\text{Spec } k'$ (pour les verticales de gauche), et utilisation du lemme 7:

$$\begin{array}{ccccccc}
 CH^2(X) & \longrightarrow & CH^2(X') & \xleftarrow{\sim} & CH^2(\mathbf{P}^1_{C'}) & \xleftarrow{\sim} & CH^2(C') \oplus CH^1(C') \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 CH^2(Y) & \longrightarrow & CH^2(Y') & \xleftarrow{\sim} & CH^2(\mathbf{P}^1_{S'}) & \xleftarrow{\sim} & CH^2(S') \oplus CH^1(S').
 \end{array}$$

On a évidemment $CH^2(C') = 0$ puisque C' est une courbe. D'après le corollaire 7, $CH^2(S') = CH_0(S')$ est de type fini. Quitte à enlever un nombre fini de points à E , on peut donc assurer que $CH^2(S') = 0$, ceci restant vrai ensuite pour toute restriction de E . Quitte à restreindre E , on peut supposer que le morphisme $S' \rightarrow E'$ a ses fibres intègres et que l'on a $\text{Pic } E' = 0$ (utiliser (44)). La restriction $\text{Pic } S' \rightarrow \text{Pic } C'$, c'est-à-dire $CH^1(S') \rightarrow CH^1(C')$, est alors un isomorphisme. Comme la restriction $CH^2(Y) \rightarrow CH^2(X)$ est évidemment surjective, on en déduit le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 \ker(CH^2(Y) \rightarrow CH^2(Y')) & \twoheadrightarrow & \ker(CH^2(X) \rightarrow CH^2(X')) \\
 \downarrow & & \\
 {}_n CH^2(Y) & &
 \end{array}$$

l'inclusion verticale provenant du fait que Y'/Y est fini de degré $n = [k' : k]$. Comme 2^s est la plus grande puissance de 2 qui divise n et que chacun des groupes du diagramme ci-dessus est annulé par n , on obtient le diagramme suivant, par restriction aux parties 2-primaires:

$$\begin{array}{ccc} {}_2^s[\ker(CH^2(Y) \rightarrow CH^2(Y'))] & \longrightarrow & {}_2^s[\ker(CH^2(X) \rightarrow CH^2(X'))] \\ \downarrow & & \\ {}_2^sCH^2(Y) & & \end{array}$$

Comme $p \neq 2$, le groupe ${}_2^sCH^2(Y)$ est fini d'après le corollaire 2, ce qui achève la démonstration.

RÉFÉRENCES

1. M. ARTIN, A. GROTHENDIECK ET J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (= SGA 4, tome 3), Lecture Notes in Math. no. 305, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
2. S. BLOCH, *Torsion algebraic cycles, K_2 , and the Brauer group of function fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 941–945.
3. ———, *Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman*, Comp. Math. **39** (1979), 107–127.
4. ———, *Lectures on algebraic cycles*, Duke Univ. Math. Series IV, Duke University, Durham, 1980.
5. ———, *Torsion algebraic cycles, K_2 and Brauer groups of function fields*, in *Groupe de Brauer*, Lecture Notes in Math. no. 844, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981, 75–102.
6. S. BLOCH, O. GABBER ET K. KATO, *p -adic étale cohomology* (en préparation).
7. S. BLOCH ET A. OGUS, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, **7** (1974), 181–202.
8. N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, chap. 5, fasc. XXX, Hermann, Paris 1964.
9. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, *Hilbert's theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. Math. **71** (1983), 1–20.
10. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE ET F. ISCHEBECK, *L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles*, C. R. Acad. Sc. Paris **292** (1981), 723–725.
11. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC ET C. SOULÉ, *Quelques théorèmes de finitude en théorie des cycles algébriques*, C. R. Acad. Sc. Paris **294** (1982), 749–752.
12. P. DELIGNE, *La conjecture de Weil I*, Publ. math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–308.
13. ———, *La conjecture de Weil II*, Publ. math. I.H.E.S. **52** (1980), 137–252.
14. ———, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$, Cohomologie étale*, Lecture Notes in Math., no. 569, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
15. A. DOUADY ET J.-L. VERDIER, *Séminaire de géométrie analytique 74–75*, Astérisque nos. 36–37, Société mathématique de France 1976.
16. W. FULTON, *Rational equivalence on singular varieties*, Publ. math. I.H.E.S. **45** (1975), 147–167.
17. O. GABBER, *Sur la torsion dans la cohomologie l -adique d'une variété*, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître 1983).
18. A. GROTHENDIECK ET J. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie Algébrique*, EGA III et IV, Publ. math. I.H.E.S. **11** (1961) et **28** (1966).
19. A. GROTHENDIECK, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1965–66, SGA 5, Cohomologie l -adique et fonctions L* , Lecture Notes in Math. no. 589, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

20. L. ILLUSIE, *Complexe de De Rham–Witt et cohomologie cristalline*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, **12** (1979), 501–661.
21. K. KATO, *Galois cohomology of complete discrete valuation fields*, in *Algebraic K-theory II*, Oberwolfach 1980, Lecture Notes in Math. no. 967, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982, 215–238.
22. K. KATO ET S. SAITO, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces* (preprint 1982).
23. N. KATZ ET S. LANG, *Finiteness theorems in geometric classfield theory*, L'Enseignement mathématique **27** (1981), 285–314.
24. N. KATZ ET W. MESSING, *Some consequences of the Riemann Hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.
25. S. LANG, *Algebraic groups over finite fields*, Amer. J. Math. **78** (1956), 555–563.
26. ———, *Unramified class field theory over function fields in several variables*, Annals of Math. **64** (1956), 286–325.
27. ———, *Sur les séries L d'une variété algébrique*, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 385–407.
28. ———, *Diophantine Geometry*, Interscience, New York 1962.
29. A. S. MERKUR'EV ET A. A. SUSLIN, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphisms*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), 1011–1046.
30. J. S. MILNE, *Duality in the flat cohomology of a surface*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, **9** (1976), 171–202.
31. ———, *Zero cycles on algebraic varieties in non-zero characteristic: Rojzman's theorem*, Comp. Math. **47** (1982), 271–287.
32. ———, *Etale Cohomology*, Princeton University Press, Princeton 1980.
33. D. QUILLEN, *Higher algebraic K-theory I*, in *Algebraic K-theory I*, Lecture Notes in Math. no. 341, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
34. J.-P. SERRE, *Groupes proalgébriques*, Publ. math. I.H.E.S. **7** (1960), 1–67.
35. T. A. SPRINGER, *Sur les formes quadratiques d'indice zéro*, C. R. Acad. Sc. Paris **234** (1952), 1517–1519.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE: UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, C.N.R.S., MATHÉMATIQUES, BÂT. 425, F-91405 ORSAY

JEAN-JACQUES SANSUC: ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 45, RUE D'ULM, F-75230 PARIS CEDEX 05

CHRISTOPHE SOULÉ: UNIVERSITÉ DE PARIS VII, C.N.R.S., U.E.R DE MATHÉMATIQUES, TOUR 45-55, 5^e ÉTAGE, 2, PLACE JUSSIEU, F-75221 PARIS CEDEX 05