J. K-Theory **11** (2013), 1–53
doi:10.1017/is012009001jkt194

Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis

par

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET BRUNO KAHN

Abstract

Let X be a smooth projective variety over a finite field $\mathbb{F}$. We discuss the unramified cohomology group $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Several conjectures put together imply that this group is finite. For certain classes of threefolds, $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ actually vanishes. It is an open question whether this holds for arbitrary threefolds. For a threefold X equipped with a fibration onto a curve C, the generic fibre of which is a smooth projective surface V over the global field $\mathbb{F}(C)$, the vanishing of $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ together with the Tate conjecture for divisors on X implies a local-global principle of Brauer–Manin type for the Chow group of zero-cycles on V. This sheds new light on work started thirty years ago.

Résumé

Soit X une variété projective et lisse sur un corps fini $\mathbb{F}$. On s'intéresse au groupe de cohomologie non ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Un faisceau de conjectures implique que ce groupe est fini. Pour certaines classes de solides, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Savoir si c'est le cas pour tout solide (variété de dimension 3) est un problème ouvert. Lorsqu'un solide X est fibré au-dessus d'une courbe C, de fibre générique une surface projective et lisse V sur le corps global $\mathbb{F}(C)$, la combinaison de $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et de la conjecture de Tate pour les diviseurs sur X a pour conséquence un principe local-global de type Brauer–Manin pour le groupe de Chow des zéro-cycles de la fibre générique V. Ceci éclaire d'un jour nouveau des investigations commencées il y a trente ans.

Key Words: unramified cohomology, algebraic cycles, finite fields, local-global principle.

Mathematics Subject Classification 2010: 19E15, 14G15, 14G25, 14C25, 14C35.

Table des matières

Introduction

À une variété X projective, lisse, et géométriquement connexe sur un corps k, on associe ([13], [8]) des groupes de cohomologie non ramifiée

$$H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)),\ \ i \geq 1,$$

qui sont des invariants birationnels. Pour $i = 1$ ce groupe classifie les revêtements abéliens étales de X. Pour $i = 2$, on obtient le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$. Pour tout i, ils satisfont une propriété de rigidité [8, Thm. 4.4.1].

On s'intéresse ici au groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et à ses liens avec le groupe de Chow $CH^2(X)$ des cycles de codimension deux modulo l'équivalence rationnelle. Ceci a déjà fait l'objet de deux articles récents, l'un de Claire Voisin et du premier auteur [20], l'autre du deuxième auteur [42]. Dans ces articles, il est établi que :

- Pour k un corps fini ou algébriquement clos, pour tout nombre premier l différent de la caractéristique, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est extension d'un groupe fini C_l par un groupe divisible. Le groupe C_l est le sous-groupe de torsion du conoyau de l'application cycle $CH^2(X)\otimes\mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(2))$.
- Si $k = \mathbb{F}$ est un corps fini, $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini si X appartient à une certaine classe $B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F})$ qui contient conjecturalement toutes les variétés projectives et lisses.

Il se trouve, et c'est le point de départ de cet article, que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ intervient dans l'étude des zéro-cycles sur les variétés définies sur un corps global. Dans ce domaine, on a la conjecture suivante [16, 45, 65, 9] :

Conjecture 7.2. *Soit K un corps global. Soit l un nombre premier différent de la caractéristique de K. Soit V une variété projective et lisse, géométriquement connexe sur K. S'il existe une famille $\{z_v\}$ de zéro-cycles locaux de degrés premiers à l telle que, pour tout élément $A \in \mathrm{Br}(V)\{l\}$, on ait*

$$\sum_v \mathrm{inv}_v(A(z_v)) = 0,$$

alors il existe un zéro-cycle de degré premier à l sur V.

Cette conjecture a fait l'objet d'un certain nombre de travaux, l'un des plus récents étant l'article [81] de O. Wittenberg.

Un lien entre la conjecture 7.2 et la cohomologie non ramifiée de degré 3 est donné par l'énoncé suivant.

Théorème (*cf.* Théorème 7.4). *Soit X une variété projective lisse de dimension* 3 *fibrée au-dessus d'une courbe C sur un corps fini $\mathbb{F}$, la fibre générique étant une surface lisse géométriquement intègre V sur $K = \mathbb{F}(C)$. Soit $l \neq \mathrm{car}(\mathbb{F})$ un nombre premier. On suppose que :*

(i) *L'application cycle*

$$CH^1(X) \otimes \mathbb{Q}_l \to H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l(1))$$

est surjective (conjecture de Tate en codimension 1*).*

(ii) *On a $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$.*

Alors la conjecture 7.2 vaut pour pour la K-variété V.

En combinant ce théorème et un résultat récent de Parimala et Suresh ([58], Théorème 4.4 ci-dessous), on établit l'énoncé suivant (cas particulier de notre théorème 7.8) :

Théorème. *Soient $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p différente de* 2*, et C,S,X des variétés projectives, lisses, géométriquement connexes sur $\mathbb{F}$, de dimensions respectives* 1,2,3*, équipées de morphismes dominants $X \to S \to C$, la fibre générique de $X \to S$ étant une conique lisse, la fibre générique de $S \to C$ étant une courbe lisse géométriquement intègre. Supposons satisfaite la conjecture de Tate pour les diviseurs sur la surface S. Soit $V/\mathbb{F}(C)$ la fibre générique de l'application composée $X \to C$.*

Si la $\mathbb{F}(C)$-surface V porte une famille de zéro-cycles locaux de degrés 1 orthogonale au groupe de Brauer de V, alors il existe un zéro-cycle de degré une puissance de p sur V.

Parimala et Suresh établissent en effet que l'on a $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ pour les variétés ci-dessus et $l \neq p$. Dans leur article, ils établissent le théorème ci-dessus pour $S = \mathbf{P}^1_C$: dans ce cas la conjecture de Tate est bien connue.

Détaillons maintenant le contenu de l'article.

Au §1, on décrit les outils de cohomologie motivique utilisés dans l'article. La suite exacte (1.5) est particulièrement importante.

Au §2, on donne une nouvelle preuve d'une partie du théorème 1.1 de [42] sur la structure du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, lorsque le corps de base est un corps fini $\mathbb{F}$ (et plus généralement un corps à cohomologie galoisienne finie en l).

Aux §§3, 4 et 5, on se penche sur la taille du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour X projective et lisse sur un corps fini.

Au §3, on explique, avec un peu plus de détails que dans [42], comment certaines conjectures impliquent sa finitude. On exhibe des classes importantes de variétés qui vérifient cette conclusion : citons ici la proposition 3.2 et le théorème 3.18.

Pour X de dimension au plus 2, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul (voir la proposition 3.1). On donne au §4 deux cas de divisibilité de ce groupe pour X de dimension 3.

Question 5.4. Pour $X/\mathbb{F}$ une variété projective et lisse de dimension 3, a-t-on $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$?

L'analogue de cette question pour les variétés complexes a une réponse négative, comme l'ont montré de nombreux exemples (cf. [20, §5]).

On a $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ pour plusieurs classes de variétés X de dimension 3 géométriquement uniréglées ([58], [11]). Par ailleurs, pour une variété complexe X de dimension 3 uniréglée, on peut grâce à un théorème de C. Voisin montrer $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ ([20, Thm. 1.2]). Ceci motive :

Conjecture 5.7. *Pour $X/\mathbb{F}$ une variété projective et lisse de dimension 3 géométriquement uniréglée, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.*

Au §6.1, on fait de la descente galoisienne sur les groupes $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et $CH^2(X)$ pour X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps F *a priori* quelconque. On étudie en particulier le groupe

$$\operatorname{Ker}\big(H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\big),$$

où $\overline{X} = X \times_F F_s$ pour une clôture séparable F_s de F ; on relie ce noyau à la K-théorie du corps des fonctions de $\overline{X}$. Lorsque F est de dimension cohomologique ≤ 1, ceci donne un premier contrôle sur les noyau et conoyau de la restriction

$$CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G,$$

où $G = \mathrm{Gal}(F_s/F)$ (théorème 6.3).

Au §6.2, on applique les résultats du §6.1 au cas des variétés sur les corps finis. Des résultats connus sur la K-cohomologie de telles variétés [14, 28], et qui reposent sur les conjectures de Weil démontrées par Deligne, nous permettent alors d'établir le :

Théorème 6.8. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Soit $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, et soit G le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{F}}$ sur $\mathbb{F}$. Soit V une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Soit M le module galoisien fini $\bigoplus_l H^3(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2))\{l\}$. On a alors une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \to \operatorname{Ker}\big(CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})\big) &\to H^1(G,M) \\ &\to \operatorname{Ker}\big(H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\big) \\ &\to \operatorname{Coker}\Big(CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})^G\Big) \to 0. \end{aligned}$$

Au §7, on rappelle les conjectures locales-globales générales de [9] sur les zéro-cycles dans le cas des variétés sur un corps global $K = \mathbb{F}(C)$ de caractéristique positive, et on montre comment le théorème de Parimala et Suresh [58] permet d'établir ces conjectures pour des surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une courbe de genre quelconque, lorsque l'on suppose la conjecture de Tate pour les surfaces sur $\mathbb{F}$ (Théorème 7.8). On établit en particulier les deux théorèmes cités au début de l'introduction.

Au §8, nous considérons les variétés projectives et lisses sur un corps global quelconque. Pour le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ d'une telle variété V, nous formulons des questions et conjectures étroitement liées d'une part aux conjectures pour les variétés sur un corps fini discutées au §5, d'autre part à une conjecture faite en 1981 par Sansuc et le premier auteur pour V surface rationnelle sur un corps de nombres [16]. On voit comment le théorème 7.8 est parallèle aux résultats déjà obtenus pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une courbe sur un corps de nombres, sous l'hypothèse que le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne de la courbe est fini (cf. [81]).

Notations

Étant donné un groupe abélien A, un entier $n > 0$ et un nombre premier l, on note $A[n]$ le sous-groupe de A formé des éléments annulés par n, et on note $A\{l\}$ le sous-groupe de torsion l-primaire de A. On note A_{div} son sous-groupe divisible maximal.

1. Les outils

1.1. *Cohomologie non ramifiée*

Soient k un corps et X une k-variété. Pour tout nombre premier l différent de la caractéristique p de k, tout entier $n > 0$, tout entier $j \in \mathbb{Z}$ et tout ouvert $U \subset X$, on dispose du groupe de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(U,\mu_{l^n}^{\otimes j})$. En faisceautisant ces groupes pour la topologie de Zariski sur X, on obtient des faisceaux $\mathcal{H}^i_X(\mu_{l^n}^{\otimes j})$. On peut faire la même construction en remplaçant $\mu_{l^n}^{\otimes j}$ par $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j) = \varinjlim_n \mu_{l^n}^{\otimes j}$.

On définit les groupes de cohomologie non ramifiée $H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes j})$ et $H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ par les formules

$$H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes j}) = H^0(X,\mathcal{H}^i_X(\mu_{l^n}^{\otimes j}))$$

et

$$H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)) = H^0(X,\mathcal{H}^i_X(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))).$$

Comme il est expliqué par exemple dans [8], la conjecture de Gersten pour la cohomologie étale, établie par Bloch et Ogus [3], permet pour X/k *lisse* et intègre, de corps des fonctions $k(X)$, d'identifier ces groupes à

$$\mathrm{Ker}\big(H^i(k(X),\mu_n^{\otimes j}) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H^{i-1}(k(x),\mu_n^{\otimes j-1})\big)$$

et

$$\mathrm{Ker}\big(H^i(k(X),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H^{i-1}(k(x),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j-1))\big),$$

où x parcourt l'ensemble des points de codimension 1 de X, le corps $k(x)$ est le corps résiduel en x et les flèches sont des applications résidus en cohomologie galoisienne associées aux anneaux de valuation discrète $\mathcal{O}_{X,x}$. Ceci permet de montrer que les groupes $H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes j})$ et $H^i_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ sont des invariants k-birationnels des k-variétés intègres projectives et lisses. Pour de telles variétés, ceci permet de les identifier aux groupes de cohomologie non ramifiée introduits par Ojanguren et le premier auteur dans [13].

Une conséquence de la conjecture de Bloch–Kato (maintenant un théorème, grâce à plusieurs auteurs, parmi lesquels nous citerons par ordre alphabétique Rost, Suslin, Voevodsky, Weibel) est que pour $i \geq 1$ les groupes

$$H^i_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i-1))$$

sont la réunion, et non seulement la limite inductive, des groupes $H^i_{\mathrm{nr}}(X, \mu_{l^n}^{\otimes i-1})$.

En utilisant les complexes de de Rham-Witt (Bloch, Illusie, Milne), pour X régulier de type fini sur un corps k de caractéristique $p > 0$ et $i > 0$, on définit des groupes

$$H^i(X, \mathbb{Z}/p^n(j)) := H^{i-j}_{\text{ét}}(X, \nu_n(j)) \tag{1.1}$$
$$H^i(X, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)) := \varinjlim_n H^i(X, \mathbb{Z}/p^n(j))$$

où $\nu_n(j)$ est le faisceau de Hodge-Witt logarithmique de poids j et de niveau n, d'où des groupes $H^i_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i-1))$ [42, déf. 2.7, App. A].

Pour $i \geq 1$, et X lisse sur un corps k, on définit :

$$H^i_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)) = \bigoplus_l H^i_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i-1)).$$

1.2. Complexes motiviques

Le présent article, tout comme l'article [42], utilise de façon cruciale les complexes $\mathbb{Z}(2)$, version moderne des complexes $\Gamma(2)$ de Lichtenbaum, et leurs propriétés. On notera que celles-ci ne font intervenir que le théorème de Merkurjev–Suslin ; la conjecture générale de Bloch–Kato n'est pas utilisée dans [42] ni dans le présent article — alors qu'elle l'est, en degré 3, dans l'article [20].

Les complexes $\Gamma(2)$ et $\mathbb{Z}(2)$ sont des objets de la catégorie dérivée des faisceaux sur le petit site Zariski d'un schéma X ; on note leurs étalifiés avec un indice ét. Étant donné une variété X lisse (voire un schéma régulier de type fini) sur un corps k d'exposant caractéristique p et un entier n inversible sur X, on a des triangles exacts ("suites de Kummer et d'Artin-Schreier") dans cette catégorie dérivée :

$$\Gamma(2) \xrightarrow{\times n} \Gamma(2) \to \mu_n^{\otimes 2} \xrightarrow{+1}, \qquad \Gamma(2) \xrightarrow{\times p^r} \Gamma(2) \to \nu_r(2)[-2] \xrightarrow{+1} \tag{1.2}$$

(Lichtenbaum [49, 50], Kahn [37]), et leur variante "moderne"

$$\mathbb{Z}_{\text{ét}}(2) \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}_{\text{ét}}(2) \to \mu_n^{\otimes 2} \xrightarrow{+1}, \qquad \mathbb{Z}_{\text{ét}}(2) \xrightarrow{\times p^r} \mathbb{Z}_{\text{ét}}(2) \to \nu_r(2)[-2] \xrightarrow{+1} \tag{1.3}$$

Ces derniers sont des cas particuliers de triangles exacts

$$\mathbb{Z}_{\text{ét}}(i) \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}_{\text{ét}}(i) \to \mu_n^{\otimes i} \xrightarrow{+1}, \qquad \mathbb{Z}_{\text{ét}}(i) \xrightarrow{\times p^r} \mathbb{Z}_{\text{ét}}(i) \to \nu_r(i)[-i] \xrightarrow{+1} \tag{1.4}$$

où $\nu_r(i)$ est le faisceau de Hodge-Witt logarithmique de poids i et de niveau r si $p > 1$, et est 0 par définition si $p = 1$. On renvoie à [42, Thm. 2.6] pour les détails et les références.

1.3. Cohomologie motivique et $\mathcal{K}$-cohomologie

Certains des groupes d'hypercohomologie de complexes motiviques utilisés dans le présent article ont été étudiés dans le passé, en particulier dans l'article [14], dans le contexte de la K-cohomologie. Ils apparaissent aussi comme groupes de Chow supérieurs (Bloch).

Rappelons ici que l'on note $\mathcal{K}_{i,X}$ les faisceaux Zariski sur un schéma X associés au préfaisceau qui à un ouvert U associe le groupe $K_i(H^0(U, O_X))$, où $K_i(A)$ est le i-ième groupe de K-théorie d'un anneau commutatif A, défini par Quillen.

Pour la commodité du lecteur, nous répétons ici les identifications (voir [37, Thm. 1.1 et Thm. 1.6] et [42, §2]) entre les divers groupes qui nous intéressent ici.

Proposition 1.1 *Pour X une variété lisse sur un corps, on a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned}
CH^2(X,2) \simeq H^0(X,\mathcal{K}_2) &\simeq \mathbb{H}^2_{\mathrm{Zar}}(X,\Gamma(2)) \simeq \mathbb{H}^2_{\text{ét}}(X,\Gamma(2))\\
&\simeq \mathbb{H}^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathbb{Z}(2)) \simeq \mathbb{H}^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2));\\
CH^2(X,1) \simeq H^1(X,\mathcal{K}_2) &\simeq \mathbb{H}^3_{\mathrm{Zar}}(X,\Gamma(2)) \simeq \mathbb{H}^3_{\text{ét}}(X,\Gamma(2))\\
&\simeq \mathbb{H}^3_{\mathrm{Zar}}(X,\mathbb{Z}(2)) \simeq \mathbb{H}^3_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2));\\
CH^2(X) = CH^2(X,0) \simeq H^2(X,\mathcal{K}_2) &\simeq \mathbb{H}^4_{\mathrm{Zar}}(X,\Gamma(2))\\
&\simeq \mathbb{H}^4_{\mathrm{Zar}}(X,\mathbb{Z}(2)).
\end{aligned}$$

1.4. CH^2 et H^3_{nr}

Notons que dans la proposition ci-dessus, les isomorphismes entre groupes de cohomologie Zariski et étale s'arrêtent en degré 3. Outre le triangle exact (1.3), la suite exacte

$$0 \to CH^2(X) \to \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0 \tag{1.5}$$

joue un rôle central dans le présent article. Avec le complexe $\Gamma(2)$ de Lichtenbaum [49] à la place de de $\mathbb{Z}(2)$, cette suite apparaît pour la première fois (mais de façon pas complètement explicite) dans un article de Lichtenbaum ([50], Thm. 2.13, sa démonstration, et remarque 2.14), où elle est établie à la 2-torsion près. Toujours avec le complexe $\Gamma(2)$, elle est établie en toute généralité dans [37, Thm. 1.1]. Sous la forme moderne ci-dessus, la suite est établie dans [42, Prop. 2.9].

1.5. Descente

Enfin on fait de la descente galoisienne sur l'hypercohomologie des complexes $\mathbb{Z}(2)$. Dans [20], on fait cela sur les complexes de Gersten en K-théorie, comme cela avait été fait par Raskind et le premier auteur dans [14], à la suite de Spencer Bloch. Dans divers articles, et en particulier [36, 37], le second auteur a montré l'utilité de la descente galoisienne sur l'hypercohomologie étale des complexes $\Gamma(2)$ ou $\mathbb{Z}(2)$.

2. Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié

Soit l un nombre premier. On dit qu'un corps k est *à cohomologie galoisienne finie en* l si $l \neq \mathrm{car}(k)$ et si, pour tout module galoisien fini M d'ordre une puissance de l et tout entier $i \geq 0$, les groupes de cohomologie $H^i(k,M)$ sont finis. Ceci implique que pour toute k-variété X les groupes de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(X,M)$ sont finis. Exemples de tels corps : les corps algébriquement clos, les corps finis, le corps des réels, les corps p-adiques, les corps locaux supérieurs dont la dernière caractéristique résiduelle est distincte de l.

La considération de tels corps simplifie l'exposition de l'application cycle et la démonstration du théorème principal de cette section.

Le lemme suivant est bien connu et très utile :

Lemme 2.1 *Soient A un groupe abélien et l un nombre premier. On a une application naturelle*

$$A \otimes \mathbb{Z}_l \to \varprojlim_n A/l^n. \tag{2.1}$$

(i) *Pour tout $n > 0$, cette application induit modulo l^n un isomorphisme*

$$(A \otimes \mathbb{Z}_l)/l^n \xrightarrow{\sim} A/l^n.$$

(ii) *Le $\mathbb{Z}_l$-module $\varprojlim_n A/l^n$ est de type fini si et seulement si A/l est fini. Si c'est le cas, la flèche* (2.1) *est surjective.*

(iii) *Soit T un groupe abélien de torsion. Le groupe $T \otimes \mathbb{Z}_l$ s'identifie naturellement au sous-groupe de torsion l-primaire de T.*

Démonstration: Démontrons simplement (ii). Soit $B \subset A$ un sous-groupe de type fini engendrant A modulo l. On vérifie par récurrence sur n que les applications de groupes finis $B/l^n \xrightarrow{f_n} A/l^n$ sont surjectives. D'où la surjectivité des applications $\mathrm{Ker}\, f_{n+1} \to \mathrm{Ker}\, f_n$, qui entraîne la deuxième des surjections

$$B \otimes \mathbb{Z}_l \twoheadrightarrow \varprojlim_n B/l^n \twoheadrightarrow \varprojlim_n A/l^n.$$

□

2.1. L'application cycle

Soit X une k-variété lisse, et soit l un nombre premier.

Supposons d'abord l distinct de la caractéristique de k. Puisque k est à cohomologie galoisienne finie en l, le groupe

$$H^j_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(i)) = \varprojlim_n H^j_{\text{ét}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes i}) \tag{2.2}$$

est un $\mathbb{Z}_l$-module de type fini.

Supposons maintenant k *fini* de caractéristique p et X *projective*. Alors les groupes $H^j_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/p^n(i))$ de (1.1) sont *finis* [55, Cor. 1.12], et on peut définir $H^j_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_p(i))$ comme en (2.2) : c'est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini.

Dans les deux cas cités, on dispose d'applications classe de cycle

$$CH^i(X)\otimes\mathbb{Z}_l \to H^{2i}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(i)) \quad (i\geq 0) \tag{2.3}$$

définies comme limites projectives des applications classe de cycle usuelles :

$$CH^i(X)/l^n \to H^{2i}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/l^n(i)).$$

Pour $l\neq p$, celles-ci sont construites dans [32]. Pour $l=p$, une construction est donnée dans [27], et une construction équivalente dans [55]. Une autre est donnée dans [42, §3.1] ; il est probable, mais non démontré, que ces constructions coïncident.

2.2. Énoncé du théorème

Théorème 2.2 *Soient l un nombre premier, k un corps à cohomologie galoisienne finie en l, et soit X une k-variété lisse. Soit M le $\mathbb{Z}_l$-module de type fini*

$$M = \operatorname{Coker}\big(CH^2(X)\otimes\mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(2))\big).$$

Le quotient de $H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ par son sous-groupe divisible maximal est le groupe fini M_{tors}.
Si k est fini et X est projective, cette assertion s'étend à $l=p$, caractéristique de k.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème du second auteur [42, Thm. 1.1] valable sur un corps quelconque, les classes de cycle étant à valeurs dans la cohomologie étale continue de Jannsen. Le cas où le corps de base est le corps des complexes avait été considéré par C. Voisin et le premier auteur dans [20].

La méthode que nous utilisons ici, spécifique au cas des corps à cohomologie galoisienne finie, repose sur un argument de comptage. Elle a été reprise par Alena Pirutka [61] pour étudier, pour tout i entier, le conoyau de l'application

$$\mathrm{Coker}\big(CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(2))\big)$$

pour X projective et lisse de dimension d sur un corps k à cohomologie galoisienne finie en l, avec application particulière au cas $i = d-1$ lorsque k est un corps fini.

2.3. Démonstration du théorème

Cette démonstration fonctionne uniformément pour $l \neq p$ ou pour $l = p$, en prenant la définition de la classe de cycle p-adique de [42].

On considère la suite exacte fondamentale (1.5)

$$0 \to CH^2(X) \to \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0.$$

On la tensorise avec $\mathbb{Z}_l$. Cela donne

$$0 \to CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^3_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to 0.$$

Du triangle exact (1.3) on déduit la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2))/l^n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to \mathbb{H}^5_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2))[l^n] \to 0. \tag{2.4}$$

Les flèches

$$\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \to \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2))/l^n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$$

induisent des flèches

$$\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \to \varprojlim_n \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2))/l^n \to \varprojlim_n H^4_{\text{ét}}(X, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) = H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(2))$$

(où la dernière égalité est ici une définition) et donc une flèche

$$\theta_1 : \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(2)). \tag{2.5}$$

De (2.4) et de la finitude de $H^4_{\text{ét}}(X, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$, on déduit la suite exacte de $\mathbb{Z}_l$-modules de type fini

$$0 \to \varprojlim_n \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2))/l^n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(2)) \to \varprojlim_n \mathbb{H}^5_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2))[l^n] \to 0.$$

Le terme de droite est sans torsion, car c'est un module de Tate. Comme $\varprojlim_n \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2))/l^n$ est un $\mathbb{Z}_l$-module de type fini, il résulte alors du lemme 2.1 (ii) que l'application θ_1 de (2.5) a son conoyau sans torsion.

Si $l \neq p$, l'application composée

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(2))$$

est l'application cycle classique [42, Rem. 3.1]. Si $l = p$, il en est de même avec la définition de [42] (ibid.).

Considérons alors le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[r] \arrow[d, "\theta_1"] & H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_0"] & 0 \\ & CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[r] & H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

où la flèche θ_0 est induite par le reste du diagramme. L'image de cette flèche est évidemment de torsion. Notons

$$\theta : H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to M_{\text{tors}}$$

l'application induite. On a vu que la flèche verticale médiane a son conoyau sans torsion, et le diagramme montre que ce conoyau s'identifie à celui de θ_0. Ainsi θ est surjective.

Par définition de la flèche $\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(2))$, pour tout $n > 0$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}_l)/l^n \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2))/l^n \arrow[d, "d"'] \\ H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(2))/l^n \arrow[r, "b"] & H^4_{\text{ét}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2}) \end{tikzcd}$$

La flèche a est un isomorphisme (lemme 2.1 (i)). La flèche d est une injection, d'après (1.3). On conclut que c est injectif.

Notons $K = H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. Passant au quotient modulo l^n dans le diagramme (2.6), on voit que c induit une injection

$$\theta_0 \mod l^n \ : K/l^n \hookrightarrow M/l^n.$$

On a vu que θ_0 induit une surjection $\theta : K \to M_{\text{tors}}$. On conclut que θ induit un isomorphisme

$$\theta \mod l^n \ : K/l^n \to M_{\text{tors}}/l^n.$$

Le groupe M_{tors} est fini, en particulier d'exposant l^e fini. Pour $n \geq e$, la projection naturelle $M_{\text{tors}}/l^{n+1} \to M_{\text{tors}}/l^n$ est donc un isomorphisme. Il en résulte que pour $n \geq e$, les flèches

$$K/l^{n+1} \to K/l^n \to M_{\text{tors}}/l^n$$

et $M_{\text{tors}} \to M_{\text{tors}}/l^n$ sont des isomorphismes. Ainsi pout tout tel n, $l^n K = l^{n+1} K$. Le sous-groupe $l^e K \subset K$ est donc un groupe divisible, c'est le sous-groupe divisible maximal K_{div} de K, et le quotient de K par K_{div} s'identifie au groupe fini M_{tors}.

On a donc montré que le quotient $K = H^3_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ par son sous-groupe divisible maximal s'identifie au sous-groupe de torsion du conoyau de l'application cycle

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(2)),$$

sous-groupe de torsion qui est fini.

2.4. *Remarques*

Remarque 2.3 On a vu dans la démonstration que la flèche θ_1 de (2.5) a un conoyau sans torsion. On en déduit l'énoncé suivant : *toute classe* $\alpha \in H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(2))_{\text{tors}}$ *est dans l'image de* $\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}_l$. Dans [42, Cor. 3.5], il est démontré que le noyau de θ_1 est divisible, ce qui implique que α provient même de $\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2))_{\text{tors}} \xrightarrow{\sim} \left(\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}_l\right)_{\text{tors}}$ (voir lemme 2.1 (iii)), donc en particulier de $\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2))$.

Si $k = \mathbb{C}$, si X est projective et si on remplace $\mathbb{Z}(2)$ par $\Gamma(2)$, ce dernier énoncé est dû à Lichtenbaum [50, Thm. 2.15]. L'argument ci-dessus évite le théorème de Lieberman, utilisé dans [50], selon lequel l'équivalence homologique coïncide avec l'équivalence numérique sur les cycles de codimension 2 (théorème reposant *in fine* sur le théorème (1,1) de Lefschetz).

Si l'on lit cet énoncé à la lueur de la suite exacte

$$0 \to CH^2(X) \to \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0,$$

on voit que le corollaire 2.16 de [50] implique que les contre-exemples de Atiyah et Hirzebruch à la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 donnent des exemples sur $\mathbb{C}$ avec $H^3_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq 0$ (voir [20]).

Remarque 2.4 Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}$. Supposons $H^3_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ fini (comme on le verra au §3, c'est peut-être toujours le cas). La proposition 4.3.5 de Saito-Sato [66] établit alors le résultat suivant, cas particulier du Théorème 2.2 : *l'ordre* de $H^3_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est égal à *l'ordre* du sous-groupe de torsion du groupe

$$\text{Coker}\left(CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(2))\right).$$

3. Finitude de H^3 non ramifié : résultats et conjectures

Commençons par un rappel.

Proposition 3.1 *Soit k un corps algébriquement clos. Pour toute k-variété lisse X de dimension $d \leq 2$ (resp. pour tout corps de fonctions K/k en au plus 2 variables), on a $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ (resp. $H^3_{\mathrm{nr}}(K/k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$). La même conclusion est vraie si k est fini et X* projective.

Pour la torsion première à $p = \mathrm{car}(k)$, le résultat est clair sur un corps séparablement clos (la dimension cohomologique du corps de fonctions $k(X)$ est au plus 2) ; sur un corps fini, il est dû à Sansuc, Soulé et au premier auteur [17, Rem. 2 p. 790]. Pour la p-torsion, le résultat sur un corps algébriquement clos est dû à N. Suwa [76, Lemma 2.1] et sur un corps fini à K. Kato [44, Cor. p. 145], qui utilise des résultats de M. Gros [26]. Enfin, le passage des variétés projectives lisses aux corps de fonctions découle de la résolution des singularités en dimension au plus 2 (Abhyankar) grâce à [8, Prop. 2.1.8].

3.1. Correspondances et motifs birationnels

Proposition 3.2 *Soit k un corps fini ou un corps séparablement clos. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Supposons qu'il existe un domaine universel Ω contenant k, une surface Y projective et lisse sur k et un k-morphisme $f : Y \to X$ qui induit une surjection*

$$f_* : CH_0(Y_\Omega) \otimes \mathbb{Q} \twoheadrightarrow CH_0(X_\Omega) \otimes \mathbb{Q}.$$

Alors pour tout l premier distinct de la caractéristique de k, le groupe

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

est fini, et il est nul pour presque tout premier l.

Démonstration: Soit d la dimension de X. Soit $\Delta_X \subset X \times_k X$ la diagonale. Par un argument utilisé par S. Bloch [2, Lecture 1, Appendix], l'hypothèse assure l'existence d'un entier $N > 0$ tel que la classe de $N.\Delta_X \in CH_d(X \times_k X)$ soit la somme de la classe d'un cycle $Z_1 \in g_*(CH_d(Y \times_k X))$, et d'un cycle $Z_2 \in CH_d(X \times_k X)$ de restriction nulle à $CH_d(X \times_k U)$ pour U un ouvert de Zariski non vide de X.

(Détaillons légèrement cet argument. Soit K le corps des fonctions de X, qu'on suppose plongé dans Ω. Un argument de transfert montre facilement que l'hypothèse implique la surjectivité de l'homomorphisme

$$CH_0(Y_K) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{f_*} CH_0(X_K) \otimes \mathbb{Q}.$$

Si z est un 0-cycle de Y_K à coefficients rationnels qui s'envoie sur la classe du point générique de X, un relèvement de z à $Y \times X$ fournit le cycle Z_1 cherché.)

Les groupes de cohomologie galoisienne $H^i_{\text{ét}}(\bullet, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ associés aux corps contenant k satisfont les axiomes des modules de cycles de Rost [63, (1.11)]. Avec les notations de [63] et [52], le groupe $A^0(X,M)$ associé à $M = H^i_{\text{ét}}(\bullet, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ sur une k-variété projective et lisse X est le groupe $H^i_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$.

On dispose donc d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^3_{\text{nr}}(Y,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \times CH_d(Y \times_k X) \arrow[drr] & & \\
H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \times CH_d(Y \times_k X) \arrow[u, "f^*\times 1"] \arrow[d, "1\times f_*"'] & & H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)). \\
H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \times CH_d(X \times_k X) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les flèches diagonales sont des accouplements de correspondances fournis par la théorie de cycles de Rost [52, 21]. La commutativité du diagramme résulte d'un cas particulier d'une formule de projection mentionnée dans [52, §1] et établie par F. Déglise [21, Prop. 5.9 (3)].

L'égalité

$$N.\Delta_X = Z_1 + Z_2 \in CH_d(X \times_k X)$$

permet de décomposer la multiplication par N sur $H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ en la somme de $Z_{1,*}$ et $Z_{2,*}$. D'après [52, Prop. 3.1], $Z_{2,*} = 0$.

La nullité de $H^3_{\text{nr}}(Y,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ (Proposition 3.1) et le diagramme ci-dessus donnent $Z_{1,*} = 0$.

On voit donc que l'entier N annule $H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. D'après le théorème 2.2, le groupe $H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est extension d'un groupe fini par un groupe l-divisible. Ceci achève la démonstration. □

Remarque 3.3 L'hypothèse de la proposition 3.2 est satisfaite si la variété est rationnellement dominée par le produit d'une surface et d'un espace projectif. Un autre exemple non trivial est celui de Bloch–Srinivas, [4, Ex. 1 p. 1242]. Si k est de caractéristique zéro, l'hypothèse est conjecturalement très proche de la nullité des groupes de cohomologie cohérente $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ pour $i \geq 3$.

Démonstration alternative de la proposition 3.2.

Lemme 3.4 *Soit $\mathcal{A}$ le quotient de la catégorie des groupes abéliens par la classe de Serre des groupes abéliens d'exposant fini. Pour $l \neq \mathrm{car}(k)$, considérons $H^3_{\text{nr}}(-,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ comme un foncteur de la catégorie des variétés projectives lisses vers $\mathcal{A}$. Alors :*

(a) Ce foncteur s'étend en un foncteur sur la catégorie $\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}(k,\mathbb{Q})$ des motifs de Chow effectifs à coefficients rationnels.

(b) Ce nouveau foncteur passe au quotient à travers la catégorie $\mathcal{M}^{\mathrm{o}}(k,\mathbb{Q})$ des motifs de Chow birationnels.

Démonstration: (a) La catégorie $\mathcal{A}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire et abélienne : il suffit donc de montrer que les correspondances de Chow à coefficients entiers opèrent sur ce foncteur. Ce fait est justifié ci-dessus.

(b) Une définition de $\mathcal{M}^{\mathrm{o}}(k,\mathbb{Q})$ est : l'enveloppe pseudo-abélienne de la localisation de $\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}(k,\mathbb{Q})$ obtenue en inversant les morphismes birationnels [43, Cor. 2.4.2]. Il suffit donc de voir que tout morphisme birationnel induit un isomorphisme sur H^3 non ramifié, ce qui est bien connu. □

Lemme 3.5 *Soient X,Y deux variétés projectives lisses sur un corps k et soit $\gamma \in CH_{\dim Y}(Y \times X) \otimes \mathbb{Q}$ une correspondance de Chow. Supposons que l'application induite*

$$CH_0(Y_\Omega) \otimes \mathbb{Q} \to CH_0(X_\Omega) \otimes \mathbb{Q}$$

soit surjective. Alors le motif birationnel de X est facteur direct de celui de Y.

Démonstration: C'est une variante de celle de [41, Prop. 7.6]. □

Proposition 3.6 *Notons $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(2) = \bigoplus_{l \neq \mathrm{car}(k)} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$. Alors, sous les hypothèses du lemme 3.5 :*
a) Dans la catégorie $\mathcal{A}$, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(2))$ est facteur direct du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(Y,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(2))$.
b) Si k est à cohomologie galoisienne finie en l pour tout $l \neq \mathrm{car}(k)$, la finitude de $H^3_{\mathrm{nr}}(Y,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(2))$ implique celle de $H^3_{\mathrm{nr}}(X,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(2))$ (dans la catégorie des groupes abéliens).

Démonstration: a) résulte des lemmes 3.4 et 3.5. b) D'après l'énoncé a), le groupe abélien $H^3_{\mathrm{nr}}(X,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(2))$ est d'exposant fini. Mais d'après [42, Thm. 1.1] ou encore d'après le théorème 2.2, pour tout l premier, ses composantes l-primaires sont extensions d'un groupe fini par un groupe divisible. Elles sont donc finies, et au total $H^3_{\mathrm{nr}}(X,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(2))$ est fini. □

Les propositions 3.1 et 3.6 donnent immédiatement la proposition 3.2. □

Remarque 3.7 Si $l = \mathrm{car}(k)$, les arguments ci-dessus fonctionnent à condition de savoir que les correspondances de Chow à coefficients entiers opèrent sur $H^3_{\mathrm{nr}}(-,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$. La technique de démonstration précédente ne s'applique plus, car $K \mapsto H^{*+1}_{\text{ét}}(K,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(*)) = H^1_{\text{ét}}(K,\nu_\infty(*))$ ne vérifie pas les axiomes des modules de cycles de Rost à cause du défaut de pureté de la cohomologie de Hodge-Witt logarithmique. On peut toutefois utiliser la suite exacte (1.5), à condition de savoir que les correspondances de Chow opèrent sur les groupes de Chow supérieurs étales. Ce fait est rédigé dans [38, App. A], sous réserve de vérification de certaines fonctorialités des groupes de Chow supérieurs de Bloch : ibid., A.1.

Par ailleurs, dans la proposition 3.6 b), il faut exiger que k soit fini si on veut la finitude de $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$ en conclusion.

3.2. *Une conséquence d'une conjecture de Bass*

Soit X lisse sur un corps k, et soit l un nombre premier distinct de la caractéristique de k. D'après Bloch et Ogus [3], on a les suites exactes

$$0 \to H^1(X,\mathcal{H}^2(\mu_{l^n}^{\otimes 2})) \to H^3_{\text{ét}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2}) \\ \to H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to CH^2(X)/l^n \to H^4_{\text{ét}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$$

et par passage à la limite sur n

$$0 \to H^1(X,\mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) \to H^3_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \\ \to H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to CH^2(X)\otimes\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)).$$

Soit $k = \mathbb{F}$ un corps fini. Supposons en outre $X/\mathbb{F}$ projective, lisse, géométriquement intègre. On sait (ceci utilise le théorème de Merkurjev-Suslin et les conjectures de Weil, voir par exemple [7]) qu'alors la dernière suite se réécrit

$$0 \to CH^2(X)\{l\} \to H^3_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \\ \to H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to CH^2(X)\otimes\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

et l'on sait (voir [17]) que le groupe $H^3_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est fini, et nul pour presque tout l.

L'énoncé suivant est donc connu depuis les années 1980.

Proposition 3.8 *Soit $k = \mathbb{F}$ un corps fini, $p = \mathrm{car}(\mathbb{F})$. Soit $X/\mathbb{F}$ projective, lisse, géométriquement intègre. Soit $l \neq p$ un nombre premier.*

(a) Si le groupe $CH^2(X)$ est un groupe de type fini, alors le groupe

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

est de cotype fini.

(b) Le groupe $CH^2(X)/l^n$ est fini si et seulement si le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ est fini.

(c) Si le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ *est de cotype fini, alors pour tout entier* $n>0$*, les groupes* $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ *et* $CH^2(X)/l^n$ *sont finis.*

(d) Le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ *est fini si et seulement si l'application* $CH^2(X)\otimes\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l\to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ *a un noyau fini.*

En 1968, Bass a demandé si le groupe $K_0(X)$ d'une variété X lisse sur un corps fini est de type fini. Si c'est le cas, en utilisant le théorème de Riemann-Roch sans dénominateurs [29, Formule (15)] cela implique que le groupe $CH^2(X)$ est de type fini, et donc que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est de cotype fini.

3.3. Rappels sur les conjectures de Tate et Beilinson

Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$. Soit $G=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$.

Soit X une $\mathbb{F}$-variété projective lisse et soit i un entier ≥ 0, enfin soit l un nombre premier ($l=p$ est permis). La conjecture de Tate “cohomologique" pour (X,i,l) est :

Conjecture 3.9 *L'application classe de cycle géométrique*

$$CH^i(X)\otimes\mathbb{Q}_l\to H^{2i}_{\text{ét}}(\bar{X},\mathbb{Q}_l(i))^G$$

est surjective.

En utilisant les conjectures de Weil, on voit que cet énoncé est équivalent au suivant :

Conjecture 3.10 *L'application cycle* (2.3)

$$CH^i(X)\otimes\mathbb{Z}_l\to H^{2i}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(i))$$

a un conoyau fini.

La forme “forte" de la conjecture de Tate est :

Conjecture 3.11 *L'ordre du pôle de* $\zeta(X,s)$ *en* $s=i$ *est égal au rang du groupe des cycles de codimension* i *sur* X*, modulo l'équivalence numérique.*

Cette conjecture entraîne la conjecture 3.9, *cf.* §3.5.

Soit $A^i(X)$ le groupe des cycles de codimension i sur X modulo l'équivalence numérique. On sait que c'est un groupe abélien libre de type fini. La conjecture de Beilinson est :

Conjecture 3.12 *L'application* $CH^i(X)\otimes\mathbb{Q}\to A^i(X)\otimes\mathbb{Q}$ *est un isomorphisme.*

3.4. Les classes $B(\mathbb{F})$*,* $B_{\mathrm{num}}(\mathbb{F})$ *et* $B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F})$

Soit $V(\mathbb{F})$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de variétés projectives lisses sur $\mathbb{F}$. Rappelons de [39, p. 978, Déf. 1] :

Définition 3.13 a) On note $B(\mathbb{F})$ le sous-ensemble de $V(\mathbb{F})$ formé des variétés dont le motif de Chow (à coefficients rationnels) est dans la sous-catégorie épaisse rigide engendrée par les motifs d'Artin et les motifs de variétés abéliennes (ou de courbes, c'est la même chose).
On dit que X est *de type abélien* si $X \in B(\mathbb{F})$.
b) On note $B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F})$ le sous-ensemble de $B(\mathbb{F})$ formé des variétés X vérifiant la conjecture 3.11 en toute codimension.

On montre facilement que la condition $X \in B(\mathbb{F})$ est équivalente à la suivante : il existe une variété abélienne A définie sur $\mathbb{F}$ telle que le motif de Chow de X devienne facteur direct de celui de A après une extension finie (ou sur la clôture algébrique).

Propriétés 3.14

(i) $B(\mathbb{F})$ est stable par produits directs.

(ii) Si $f : X \to Y$ est un morphisme surjectif, alors $X \in B(\mathbb{F}) \Rightarrow Y \in B(\mathbb{F})$ (le motif de Y est facteur direct de celui de X).

(iii) Si $X \in B(\mathbb{F})$ et $\dim X \leq 3$, tout éclatement de X de centre lisse est dans $B(\mathbb{F})$.

(iv) Par un résultat célèbre de Katsura-Shioda [47], les hypersurfaces de Fermat sont dans $B(\mathbb{F})$.

(v) On sait montrer que de nombreuses variétés abéliennes sont dans $B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F})$, par exemple les produits de courbes elliptiques (Spieß [73]). Pour d'autres exemples, voir [39, Ex. 1 c)].

(vi) Si $X \in B(\mathbb{F})$ et $\dim X \leq 3$, alors $X \in B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F})$. Cela résulte de la proposition 3.15 b) (ii) ci-dessous.

(vii) Notons $B_{\mathrm{num}}(\mathbb{F})$ le sous-ensemble de $V(\mathbb{F})$ défini comme $B(\mathbb{F})$, mais en remplaçant équivalence rationnelle par équivalence numérique : il contient évidemment $B(\mathbb{F})$ et lui est égal sous la conjecture 3.12. D'après Milne [56, Rem. 2.7], la conjecture 3.11 implique que toute $\mathbb{F}$-variété projective lisse X a sa classe dans $B_{\mathrm{num}}(\mathbb{F})$ (ce résultat utilise les conjectures de Weil et un théorème de Honda). Ainsi, les conjectures 3.11 et 3.12 entraînent que *toute variété projective lisse est dans* $B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F})$.

3.5. Relations entre les conjectures 3.9, 3.11 et 3.12

Proposition 3.15 *Soit (X,i) comme ci-dessus, avec $\dim X = d$, et soit l un nombre premier. Alors :*
a) La conjecture 3.11 pour (X,i) implique la conjecture 3.9 pour (X,i,l). Elle implique aussi, pour tout l :

1. *La condition $S^i(X,l)$: la composition*
$$H^{2i}(\overline{X},\mathbb{Q}_l(i))^G \to H^{2i}(\overline{X},\mathbb{Q}_l(i)) \to H^{2i}(\overline{X},\mathbb{Q}_l(i))_G$$
est un isomorphisme.
2. *Équivalence homologique l-adique et équivalence numérique coïncident sur $CH^i(X)\otimes\mathbb{Q}_l$.*

b) Réciproquement :

(i) *La conjecture 3.9 pour $(X,1,l)$ implique la conjecture 3.11 pour $(X,1)$ et $(X,d-1)$ (et donc la conjecture 3.9 pour $(X,d-1,l)$).*

(ii) *Si $X\in B(\mathbb{F})$, la condition $S^i(X,l)$ est vraie pour tout (i,l). De plus, la conjecture 3.9 pour (X,i,l) et $(X,d-i,l)$ implique la conjecture 3.11 pour (X,i) et $(X,d-i)$. Ces conjectures sont vraies pour $i=1$.*

c) Dans les cas de b), la conjecture 3.9 ne dépend pas du choix de l.
d) Si $X\in B(\mathbb{F})$, alors $X\in B_{\text{Tate}}(\mathbb{F}) \iff$ il existe l tel que X vérifie la conjecture 3.9 en toute codimension.
e) Si $X\in B(\mathbb{F})$, alors les conjectures 3.9 (pour tout l) et 3.11 sont vraies pour $(X,1)$ et $(X,d-1)$.

Démonstration: Cela résulte des propositions 8.2 et 8.4 de Milne [55], résumées dans [79, Thm. 2.9] : les arguments de [55, §8] sont explicitement rédigés sans distinction entre $l\neq p$ et $l=p$ [1].

La condition $S^i(X,l)$ est équivalente à la suivante : 1 n'est pas une racine multiple du polynôme minimal de l'endomorphisme de Frobenius sur $H^{2i}(\overline{X},\mathbb{Q}_l(i))$.

D'après la partie (b) de [79, Thm. 2.9], la conjecture 3.11 pour (X,i) est équivalente à la conjecture 3.9 pour (X,i,l), jointe à la condition 1 de a). D'autre part, la partie (c) de [79, Thm. 2.9] dit que la conjecture 3.11 pour (X,i) est équivalente à la conjecture 3.9 pour (X,i,l) et $(X,d-i,l)$ jointe à la condition 2 de a). Cela démontre a) et la première affirmation de b) (i), puisque la condition 1 de a) est connue en codimension 1. En appliquant ceci pour $i=1$ et en tenant compte de la première affirmation de (i), on obtient la seconde.

1. et valent en $l=p$ quelle que soit la définition de la classe de cycle p-adique, puisqu'ils n'en utilisent que les propriétés formelles.

Pour $l \neq p$, la première assertion de (ii) résulte du fait que l'action de Frobenius sur $H^*(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$ est semi-simple pour tout $X \in B(\mathbb{F})$. Pour le voir, on se ramène immédiatement au cas où X est une variété abélienne A, et alors cela résulte de [39, Lemme 1.9]. Pour $l = p$, Milne affirme que $S^i(X, p)$ est encore vrai ; Illusie nous en a fourni une justification. La seconde assertion de (ii) en découle alors, comme ci-dessus.

La troisième assertion de (ii) (cas $i = 1$) découle du théorème de Tate sur les endomorphismes de variétés abéliennes [77].

c) et d) découlent alors de b), puisque la conjecture 3.11 ne fait pas intervenir l.

□

Remarque 3.16 Par la suite exacte de Kummer, resp. d'Artin-Schreier-Witt, la conjecture 3.10 et donc la conjecture 3.9 équivalent pour $i = 1$ à la surjectivité de l'application

$$CH^1(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(1))$$

ou encore à la finitude du sous-groupe de torsion l-primaire du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$. En utilisant les parties a) et b) (i) de la proposition 3.15, on retrouve le fait connu que cette finitude ne dépend pas de l.

Théorème 3.17 *Si $X \in B_{\text{Tate}}(\mathbb{F})$, la conjecture 3.9 implique la conjecture 3.12.*

Démonstration: C'est le contenu de [39, Thm. 1.10]. □

3.6. Conséquences des conjectures de Tate et Beilinson

Dans [39], le second auteur a établi un certain nombre de propriétés de la cohomologie motivique de ces variétés. Pour les cycles de codimension 2, on a en particulier le théorème suivant, dont la preuve utilise le théorème 3.17.

Théorème 3.18 ([39]) *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini et X une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse, géométriquement connexe, dans la classe $B_{\text{Tate}}(\mathbb{F})$. Alors :*

(a) Le groupe $CH^2(X)$ est un groupe de type fini.
(b) Le groupe $H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2))$ est un groupe de type fini.
(c) Le groupe $H^3_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.

Les énoncés (a) et (c) résultent de l'énoncé (b), cas particulier de [39, Cor. 3.10], via la suite exacte (1.5).

Ainsi, en tenant compte du résultat de Milne 3.14 (vii), la combinaison des conjectures 3.11 (conjecture de Tate sur les pôles de la fonction zêta) et 3.12 (conjecture de Beilinson sur la coïncidence de l'équivalence de Chow et de l'équivalence numérique à coefficients $\mathbb{Q}$) implique que $H^3_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ *est fini pour toute variété projective lisse sur un corps fini.*

Le corollaire suivant permet parfois de montrer que $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini sans savoir que X est dans $B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F})$. Il résulte immédiatement de la combinaison du théorème 3.18, de la proposition 3.6 et de l'exemple 3.14 (vi).

Corollaire 3.19 *Soit $X/\mathbb{F}$ une variété projective lisse. On suppose qu'il existe une $\mathbb{F}$-variété projective lisse Y et une correspondance de Chow $\gamma \in CH_{\dim Y}(Y\times X)\otimes\mathbb{Q}$ telles que :*

(i) $Y \in B_{\mathrm{Tate}}(\mathbb{F})$.

(ii) $\gamma_* : CH_0(Y_\Omega)\otimes\mathbb{Q} \to CH_0(X_\Omega)\otimes\mathbb{Q}$ *est surjectif.*

Alors $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini. □

Par exemple, il suffit de trouver (Y,γ) avec $\dim Y \le 3$ et $Y \in B(\mathbb{F})$.

3.7. *Conjecture de Tate sur les diviseurs et sur les* 1*-cycles*

Soit X une $\mathbb{F}$-variété projective lisse de dimension d, et soit l un nombre premier. Comme on le rappellera au §7.1, on s'intéresse particulièrement au conoyau de l'application cycle

$$CH^{d-1}(X)\otimes\mathbb{Z}_l \to H^{2d-2}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(d-1)),$$

dont on se demande s'il est nul.

Supposons que la conjecture 3.9 soit vraie pour $(X,1,l)$. La proposition 3.15 b) (i) implique alors qu'elle est vraie pour $(X,1,l')$ et $(X,d-1,l')$ pour tout nombre premier l' ; de manière équivalente (conjecture 3.10), pour $i=1$ et $i=d-1$ le conoyau de (2.3) est fini.

Nous allons raffiner ce résultat. Pour cela, nous avons besoin de la condition $S^i(X,l)$ de la proposition 3.15 a) 1 ; on y a vu (b) (ii)) qu'elle est vraie pour tout tout l si $X \in B(\mathbb{F})$.

Lemme 3.20 *Soit $i\in[0,d]$. Il existe un entier $N=N(X,i)>0$ ayant la propriété suivante : pour $l>N$, si la condition $S^i(X,l)$ est vraie, alors l'accouplement*

$$H^{2i}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(i))\times H^{2(d-i)}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(d-i)) \to H^{2d}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(d)) \to H^{2d}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(d))\simeq\mathbb{Z}_l$$

est parfait (en particulier, ses deux termes sont sans torsion).

Démonstration: On dispose de l'action du Frobenius géométrique F sur chaque $\mathbb{Z}_l$-module $H^i(\overline{X},\mathbb{Z}_l(j))$ et sur le $\mathbb{Q}_l$-vectoriel correspondant $H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_l(j))$.

D'après Deligne [22], le polynôme caractéristique inverse $\det(1-Ft)$ pour cette action est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}[t]$ indépendant de l, et qui pour $i\neq 2j$ ne s'annule pas en $t=1$.

D'après Gabber [23], pour presque tout nombre premier l, les $\mathbb{Z}_l$-modules $H^i(\overline{X},\mathbb{Z}_l(j))$ sont sans torsion. Il en résulte que pour presque tout premier l, pour $i \neq 2j$, $H^i(\overline{X},\mathbb{Z}_l(j))$ est sans torsion et l'endomorphisme $F-1$ est un automorphisme de ce module, et donc $H^1(G,H^i(\overline{X},\mathbb{Z}_l(j)))=0$.

De la suite spectrale de Hochschild-Serre, on déduit pour tout i des suites exactes courtes

$$0 \to H^1(G,H^{2i-1}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(i)))) \to H^{2i}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(i)) \to H^{2i}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(i)))^G \to 0.$$

On obtient donc que pour presque tout l, on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}_l$-modules sans torsion

$$H^{2i}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(i)) \xrightarrow{\sim} H^{2i}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(i)))^G.$$

Soit $P(t)=\det(1-Ft)$ le polynôme caractéristique inverse de F sur $H^{2i}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Q}_l(i))$, qui est comme on l'a dit dans $\mathbb{Q}[t]$ et indépendant de l. Écrivons $P(t)=(t-1)^m.Q(t)$ dans $\mathbb{Q}[t]$, avec $Q(1)\neq 0$. On a une égalité de Bézout

$$a(t)(t-1)+b(t)Q(t)=1 \in \mathbb{Q}[t]. \tag{3.1}$$

Sous l'hypothèse $S^i(X,l)$, l'endomorphisme $(F-1).Q(F)$ s'annule sur le vectoriel $V_l := H^{2i}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Q}_l(i))$, et

$$V_l = V_l^{F=1} \oplus V_l^{Q(F)=0}.$$

Notant $M_l = H^{2i}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(i))$, utilisant le fait que (3.1) est à coefficients l-entiers pour presque tout l, on en conclut que pour presque tout l satisfaisant $S^i(X,l)$, on a une décomposition

$$M_l = M_l^{F=1} \oplus M_l^{Q(F)=0},$$

avec M_l sans torsion, et une égalité

$$a(F)(F-1)+b(F)Q(F)=1 \in \mathbb{Z}_l[F].$$

Ceci implique que pour presque tout premier l, si $S^i(X,l)$ est vérifié, l'application composée

$$M_l^G = M_l^{F=1} \to M_l \to M_l/(F-1)M_l = (M_l)_G$$

est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_l$-modules sans torsion.

Il est connu que pour tout premier l différent de la caractéristique, l'accouplement de Poincaré

$$H^{2i}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(i)) \times H^{2(d-i)}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(d-i)) \to \mathbb{Z}_l$$

est parfait modulo torsion. (Voir [82] pour une démonstration récente.)

Ce qui précède implique que pour presque tout nombre premier l satisfaisant $S(X,i,l)$, l'accouplement induit

$$H^{2i}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(i))_G \times H^{2(d-i)}_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{Z}_l(d-i))^G \to \mathbb{Z}_l$$

est une dualité parfaite de $\mathbb{Z}_l$-modules sans torsion, et qui s'identifie à l'accouplement

$$H^{2i}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(i)) \times H^{2(d-i)}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(d-i))) \to \mathbb{Z}_l$$

par les flèches évidentes. Pour presque tout l satisfaisant $S(X,i,l)$, l'accouplement

$$H^{2i}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(i)) \times H^{2(d-i)}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(d-i))) \to \mathbb{Z}_l$$

est donc parfait. □

Proposition 3.21 *Si la Conjecture 3.9 est vraie pour* $(X,1)$ *(pour un nombre premier* l_0*), alors l'application cycle*

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2d-2}(X,\mathbb{Z}_l(d-1))$$

a son conoyau fini, et nul pour presque tout l*.*
En particulier, cette conclusion vaut pour tout $X \in B(\mathbb{F})$*.*

Démonstration: La finitude du conoyau de l'application pour chaque premier l est un cas particulier de la proposition 3.15 b (i).

Notons $B^i(X,\mathbb{Z}_l)$ l'image de l'application cycle (2.3) : comme l'équivalence homologique sur les cycles implique l'équivalence numérique, on a une surjection

$$\varphi^i_l : B^i(X,\mathbb{Z}_l) \twoheadrightarrow A^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l.$$

D'après la proposition 3.15, la conjecture 3.9 pour $(X,1,l_0)$ implique la conjecture 3.11 pour $(X,1)$ et $(X,d-1)$, donc a fortiori :

– La conjecture 3.10 est vraie pour $(X,1,l)$ et $(X,d-1,l)$ quel que soit l.
– La condition $S^1(X,l)$ est vraie quel que soit l.
– Le noyau de φ^{d-1}_l est de torsion quel que soit l.

Si $l > N(X,1)$ où $N(X,1)$ est l'entier du lemme 3.20, φ^{d-1}_l est bijectif puisque $H^{2d-2}(X,\mathbb{Z}_l(d-1))$ est sans torsion.

Considérons l'accouplement de $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini

$$A^1(X) \times A^{d-1}(X) \to \mathbb{Z}.$$

Par définition de l'équivalence numérique, il est non dégénéré. Soit D son discriminant : pour $l > D$, cet accouplement devient parfait après tensorisation par $\mathbb{Z}_l$. Si $l > \sup(D, N(X,1))$, l'accouplement du lemme 3.20 est également parfait, et compatible avec l'accouplement d'intersection sur les groupes de Chow.

Le conoyau de $B^{d-1}(X,\mathbb{Z}_l) \hookrightarrow H^{2d-2}(X,\mathbb{Z}_l(d-1))$ est un module de torsion. Montrons qu'il est nul. Soit $x \in H^{2d-2}(X,\mathbb{Z}_l(d-1))$ tel que $lx = \mathrm{cl}(y)$, pour $y \in B^{d-1}(X,\mathbb{Z}_l)$. Pour tout $y' \in B^1(X,\mathbb{Z}_l)$, le produit d'intersection $\langle y, y'\rangle$ est divisible par l. Par conséquent, y est divisible par l dans $A^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l$, donc dans $B^{d-1}(X,\mathbb{Z}_l)$. Ceci conclut la démonstration.

La dernière affirmation résulte de la proposition 3.15 b) (ii). □

Corollaire 3.22 *Si X de dimension 3 vérifie la conjecture de Tate pour les diviseurs, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est divisible pour $l \gg 0$.*

Démonstration: Cela résulte de la proposition 3.21 et du théorème 2.2. □

Proposition 3.23 *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Soit X une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse, géométriquement intègre de dimension d. S'il existe une extension finie $L/\mathbb{F}$, un domaine universel Ω contenant L, une courbe Y projective et lisse sur L et un L-morphisme $Y \to X \times_{\mathbb{F}} L$ qui induit une surjection des groupes de Chow de zéro-cycles sur le corps Ω, alors pour tout l premier distinct de la caractéristique, le groupe*

$$\mathrm{Coker}\Big(CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2d-2}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(d-1))\Big)$$

est fini, et il est nul pour presque tout l.

Démonstration: Comme le groupe de Brauer d'une courbe projective et lisse sur un corps fini est nul, un argument de correspondances entièrement analogue à celui donné dans la proposition 3.2 montre que le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ est annulé par un entier $N > 0$, donc est, à la torsion p-primaire près, fini. D'après la remarque 3.16, la conjecture 3.9 vaut pour $(X,1)$. On conclut alors avec la proposition 3.21. □

4. Divisibilité, voire nullité, de H^3 non ramifié : exemples

4.1. Solides sur la clôture algébrique d'un corps fini

Lemme 4.1 *Soient G un groupe profini et M un $\mathbb{Z}_l$-module de type fini muni d'une action continue de G. Soit $M^{(1)} \subset M$ le $\mathbb{Z}_l$-module formé des éléments dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert de G. Le quotient $M/M^{(1)}$ est sans torsion.*

Démonstration: a) Soit M_{tors} le sous-module de torsion de M, et soit

$$\bar{M} = M/M_{\mathrm{tors}}.$$

Comme M_{tors} est fini, on a

$$\varinjlim_{U\subset G} H^0(U,M_{\mathrm{tors}}) = M_{\mathrm{tors}}, \qquad \varinjlim_{U\subset G} H^1(U,M_{\mathrm{tors}}) = 0$$

où U décrit les sous-groupes ouverts de G. On en déduit une suite exacte

$$0 \to M_{\mathrm{tors}} \to M^{(1)} \to \bar{M}^{(1)} \to 0.$$

Ainsi, $M/M^{(1)} \xrightarrow{\sim} \bar{M}/\bar{M}^{(1)}$ et on peut supposer M sans torsion.

b) Supposons M sans torsion. Comme M est un $\mathbb{Z}_l$-module noethérien, on a $M^{(1)} = M^U$ pour un sous-groupe ouvert $U \subset G$ assez petit. Soit $m \in M$ tel que $lm \in M^{(1)}$, c'est-à-dire $(u-1)(lm) = 0$ pour tout $u \in U$. Alors $(u-1)m = 0$ pour tout $u \in U$, donc $m \in M^{(1)}$. □

Proposition 4.2 *Soit V une variété projective, lisse, connexe de dimension 3 sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}$ d'un corps fini $\mathbb{F}$. Sous la conjecture de Tate pour les classes de diviseurs sur les surfaces sur un corps fini, pour tout nombre premier l différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$, le groupe*

$$H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

est un groupe divisible.

Démonstration: Il existe un corps fini $\mathbb{F}$ et une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse, géométriquement intègre X telle que $V = X \times_F \overline{\mathbb{F}}$. Soit $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. D'après un théorème de Schoen ([70], voir aussi [18]), pour V de dimension d, la conjecture de Tate pour les diviseurs sur les surfaces implique que l'image de la classe de cycle

$$CH^{d-1}(V) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2d-2}_{\text{ét}}(V,\mathbb{Z}_l(2))$$

est précisément le $\mathbb{Z}_l$-sous-module des éléments dont le stabilisateur est ouvert dans G. Il résulte alors du lemme 4.1 que le conoyau de l'application cycle ci-dessus est sans torsion. Pour $d = 3$, le théorème 2.2 implique alors que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est divisible. □

Remarque 4.3 On notera que sur le corps des complexes on dispose de variétés V projectives et lisses de dimension 3 avec pour l premier convenable $H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ non divisible, c'est-à-dire ([20, Thm. 3.7] ou théorème 2.2 ci-dessus) que la torsion du groupe

$$M = \mathrm{Coker}\big(CH^2(V) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(V,\mathbb{Z}_l(2))\big)$$

est non nulle. De tels exemples, avec M fini, ont été donnés par Kollár (voir [20, §5.3]).

4.2. Solides sur un corps fini fibrés en coniques

Théorème 4.4 (Parimala et Suresh [58]) [2] *Soit* $f : X \to S$ *un morphisme surjectif de variétés projectives lisses sur un corps fini* $\mathbb{F}$ *de caractéristique* $p \neq 2$. *Supposons que* S *soit une surface et que la fibre générique de* f *soit une conique (lisse et géométriquement intègre sur* $\mathbb{F}(S)$*). Alors pour tout nombre premier* $l \neq p$*, on a*

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0.$$

Remarque 4.5 Remarquons que $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est a priori annulé par 2, en particulier fini d'après le théorème 2.2. En effet, soient $K = \mathbb{F}(S)$ et $F = \mathbb{F}(X)$. Alors $F = K(C)$ où C est une conique. Si c est un point de degré 2 de C et $K' = K(c)$, alors $F' = K'F$ est K'-isomorphe à $K'(t)$. Donc

$$H^3_{\mathrm{nr}}(K'/\mathbb{F},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H^3_{\mathrm{nr}}(F'/\mathbb{F},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

(l'isomorphisme est classique hors de la p-torsion ; pour celle-ci, cf. [12, Ex. 7.4 (3) et Thm. 8.6.1]), et le groupe de gauche est nul par la proposition 3.1. On conclut par l'argument habituel de transfert.

Remarque 4.6 Dans le théorème 4.4, le cas d'une fibration lisse est simple à expliquer :

En gardant les notations ci-dessus, l'application naturelle

$$H^3(K,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to H^3(F,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

induit une surjection (valable en général pour le corps des fonctions d'une conique [74])

$$H^3(K,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(F/K,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to 0.$$

Soit $\beta \in H^3(K,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. Soient $s \in S$ un point de codimension 1 et $x = f^{-1}(s) \in X$. Sous l'hypothèse de lissité de $f : X \to S$, x est un point de codimension 1 et l'extension $\mathcal{O}_{S,s} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ est non ramifiée ; d'où

$$\partial_x(f^*\beta) = f^*\partial_s(\beta) \in \mathrm{Br}(K(x)).$$

Toujours sous l'hypothèse de lissité, la fibration en coniques est associée à une algèbre d'Azumaya A sur S (de dimension 4). D'après un théorème classique de Witt, on a

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(\mathbb{F}(s)) \to \mathrm{Br}(K(x))) = \langle A_s \rangle$$

2. Ce résultat vient d'être étendu par A. Pirutka [60] aux fibrations en variétés de Severi-Brauer d'indice premier au-dessus d'une surface.

où A_s désigne la fibre de A en s. Mais $A_s = 0$ car elle provient d'un élément du groupe de Brauer d'une courbe projective lisse sur un corps fini (à savoir, la normalisation de l'adhérence de x dans X).

Ainsi, si β devient non ramifiée dans $H^3(F,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$, alors $\partial_s(\beta) = 0$ pour tout $s \in S^{(1)}$. Finalement le morphisme

$$H^3_{\mathrm{nr}}(K/\mathbb{F},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) \to H^3_{\mathrm{nr}}(F/\mathbb{F},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)))$$

est surjectif, et on conclut par la proposition 3.1.

5. Questions et conjectures

Soient $\mathbb{F}$ un corps fini, $p = \mathrm{car}(\mathbb{F})$ et $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique. Soit l premier, $l \neq p$. En grande dimension, une adaptation des exemples d'Atiyah-Hirzebruch (voir [18]) donne des exemples de $V/\overline{\mathbb{F}}$ projectives et lisses et de classes dans $H^4_{\text{ét}}(V,\mathbb{Z}_l(2))_{\text{tors}}$ qui ne sont pas dans l'image de l'application cycle

$$CH^2(V) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(V,\mathbb{Z}_l(2)).$$

On en déduit immédiatement des exemples de variétés $X/\mathbb{F}$ projectives et lisses et de classes dans $H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(2))_{\text{tors}}$ qui ne sont pas dans l'image de l'application cycle

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(2)).$$

En utilisant le théorème 2.2, ceci donne des exemples de $V/\overline{\mathbb{F}}$ pour lesquelles le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est non divisible, et donc non nul, et des exemples de $X/\mathbb{F}$ avec $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ non divisible, et donc non nul.

A. Pirutka [59] a par ailleurs donné des exemples de variétés $X/\mathbb{F}$ projectives et lisses géométriquement rationnelles de dimension 5 avec

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{X},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$$

et $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ fini non nul.

Ces exemples et le paragraphe 4 laissent les conjectures et questions suivantes ouvertes. La première conjecture résulte de la combinaison de la conjecture 3.11 de Tate sur les pôles de la fonction zêta et de la conjecture 3.12 de Beilinson, nous la répétons pour mémoire (cf. §3.6) :

Conjecture 5.1 *Le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini pour toute $X/\mathbb{F}$ projective et lisse.*

Question 5.2 Existe-t-il $V/\overline{\mathbb{F}}$ projective et lisse, avec $H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ infini ?

Voir [42, Prop. 5.5] pour une liste de conditions équivalentes à la finitude de ce groupe et [42, Thm. 5.6] pour un exemple non trivial où cette finitude est établie.

Question 5.3 Pour $V/\overline{\mathbb{F}}$ projective et lisse, de dimension 3, a-t-on

$$H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0 \ \ ?$$

Ceci serait bien sûr le cas si l'on avait une réponse affirmative à la question suivante.

Question 5.4 Pour une variété $X/\mathbb{F}$ projective et lisse de dimension 3, a-t-on $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$?

Remarque 5.5 Soit $X/\mathbb{F}$ projective, lisse, géométriquement connexe de dimension d. On peut s'intéresser plus généralement aux groupes $H^{i+1}_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$, $i \geq 0$.

Le quotient $H^1_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/H^1(\mathbb{F},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est fini (Weil). La conjecture 3.9 pour $i = 1$ est équivalente à la finitude de $H^2_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \mathrm{Br}(X)$ (Tate, cf. [79]).

Pour $i = 0,1$, on a de nombreux exemples de variétés de dimension $d = i + 1$ pour lequelles les groupes ci-dessus sont non nuls. Il semble difficile de construire un tel exemple avec $i = 2$ et $d = 3$: c'est la question 5.4. Elle est liée à des problèmes délicats sur le groupe de Griffiths des cycles de codimension 2 (cf. [42, §5]).

Remarque 5.6 C'est un théorème de Merkurjev et Suslin que l'on a un isomorphisme naturel

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mu_l^{\otimes 2}) = H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))[l].$$

Compte tenu de la suite exacte rappelée au début du §3.2, on voit que la nullité de $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ pour X comme dans la question 5.4 est un énoncé très fort, car équivalent à la conjonction de :

(a) L'application cycle $CH^2(X)/l \to H^4_{\text{ét}}(X,\mu_l^{\otimes 2})$ est injective.

(b) La restriction $H^3_{\text{ét}}(X,\mu_l^{\otimes 2}) \to H^3_{\text{ét}}(\mathbb{F}(X),\mu_l^{\otimes 2})$ est d'image nulle.

On dit qu'une variété géométriquement intègre de dimension d est *géométriquement uniréglée* si après extension finie du corps de base elle est rationnellement dominée par le produit de la droite projective et d'une variété de dimension $d-1$. Pour une variété complexe X de dimension 3 uniréglée, on peut grâce à un théorème de C. Voisin montrer $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ [20, Thm. 1.2]. Une variété de dimension 3 fibrée en coniques sur une surface est uniréglée. Si l'on tient compte du théorème 4.4 (Parimala et Suresh) pour de telles variétés définies sur un corps fini, on est amené à proposer la conjecture suivante.

Conjecture 5.7 *Pour X une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse, de dimension 3, géométriquement uniréglée, le groupe fini (remarque 3.3) $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nul.*

Le cas particulier où X est géométriquement rationnelle est déjà ouvert. En voici un autre, qui motive en grande partie le présent article (voir le §7 et le §8).

Conjecture 5.8 *Soit $f : X \to C$ un morphisme (surjectif à fibre générique lisse et géométriquement intègre) de variétés projectives, lisses, géométriquement intègres sur un corps fini $\mathbb{F}$. On suppose que C est une courbe et que la fibre générique de f est une surface géométriquement rationnelle. Alors $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$.*

6. Descente galoisienne

6.1. Descente galoisienne sur un corps quelconque

L'énoncé suivant corrige et amplifie la suite "exacte" (6) de [37, p. 397]. Il est utilisé pour établir la proposition 6.2.

Proposition 6.1 *Soit F un corps d'exposant caractéristique p, et soit A une F-algèbre régulière semi-locale essentiellement de type fini sur F, d'origine géométrique et géométriquement intègre. Notons F_s une clôture séparable de F et $A_s = A \otimes_F F_s$ (qui, par hypothèse, est intègre). Alors on a un complexe de groupes de cohomologie étale*

$$\begin{aligned} H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) &\to \mathrm{Ker}\big(H^3(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(A_s,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\big) \\ &\to H^2(F,K_2(A_s)/K_2(F_s))) \to H^4(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^4(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \end{aligned}$$

qui est exact, sauf peut-être au terme $H^4(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ où son homologie est l'homologie d'un complexe

$$H^3(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(A_s,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))^G \to H^3(F,K_2(A_s)/K_2(F_s))$$

où $G = Gal(F_s/F)$.
Dans cet énoncé, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = \bigoplus_l \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$ où, pour $l \neq p$, $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$ est un groupe de racines de l'unité tordues, tandis que pour $l = p$ c'est le faisceau décalé $\nu_\infty(2)[-2]$, cf. *§1.*

Démonstration: On va suivre la technique de [37], en remplaçant les complexes $\Gamma(X,2)$ de Lichtenbaum par les complexes $\mathbb{Z}_X(2)$ de Bloch, considérés pour la topologie étale. Cette opération est *a priori* un peu désagréable, car ces complexes ne sont cohomologiquement bornés inférieurement que conjecturalement (conjecture de Beilinson-Soulé), et on travaille avec un corps de dimension cohomologique éventuellement infinie. Que ce problème soit innocent est expliqué dans [42, §2.3].

Soit $f : \mathrm{Spec}\, A \to \mathrm{Spec}\, F$ le morphisme structural et soit $\mathbb{Z}(A/F,2)$ "la" fibre homotopique de $\mathbb{Z}(2)_F \to Rf_*\mathbb{Z}(2)_A$, prise dans la catégorie dérivée des complexes de G-modules. On a une suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{p,q} = H^p(G,\mathcal{H}^q(\mathbb{Z}(A/F,2))) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(F,\mathbb{Z}(A/F,2))$$

Comme $\mathbb{Z}(A/F,2)$ est un complexe a priori non borné, cette suite spectrale s'obtient en remplaçant ce complexe de faisceaux par un complexe quasi-isomorphe K-injectif au sens de Spaltenstein, cf. [72, Thm. 4.5 et Rem. 4.6]. Elle converge par l'argument rappelé dans [42, §2.3], ou par une variante plus concrète de cet argument donnée ci-dessous.

Considérons le diagramme commutatif de triangles exacts

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}(A/F,2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_F(2) \arrow[r] \arrow[d] & Rf_*\mathbb{Z}_A(2) \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
\mathbb{Q}(A/F,2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}_F(2) \arrow[r] \arrow[d] & Rf_*\mathbb{Q}_A(2) \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(A/F,2) \arrow[r] \arrow[d, "+1"'] & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_F(2) \arrow[r] \arrow[d, "+1"'] & Rf_*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_A(2) \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "+1"'] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

La dernière ligne et la valeur de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_F(2)$, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_A(2)$ (1.3) montrent que $\mathcal{H}^q(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(A/F,2)) = 0$ pour $q \leq 1$. On déduit alors de la colonne de gauche que $\mathcal{H}^q(\mathbb{Z}(A/F,2))$ est uniquement divisible pour $q \leq 2$, ce qui donne la première ligne de

$$\mathcal{H}^q(\mathbb{Z}(A/F,2)) = \begin{cases} \text{uniquement divisible} & \text{pour } q \leq 2 \\ K_2(A_s)/K_2(F_s) & \text{pour } q = 3 \\ 0 & \text{pour } q = 4 \\ H^3(A_s,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) & \text{pour } q = 5 \end{cases}$$

cf. [37, Lemma 3.1]. La différence avec le calcul de [37] est le cas $q \leq 1$, où l'on trouve 0 (ici ce n'est qu'une conjecture). Le reste du calcul se fait avec les mêmes raisonnements que dans loc. cit.

En particulier on a $E_2^{p,q} = 0$ pour $p > 0, q \leq 2$, ce qui assure la convergence de la suite spectrale.

Comme dans [36], (1.3) donne aussi une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbb{H}^4(F,\mathbb{Z}(A/F,2)) \to H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \\ \to \mathbb{H}^5(F,\mathbb{Z}(A/F,2)) \to H^4(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^4(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \dots \quad (6.1) \end{aligned}$$

Donc $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \leq 1$ et $q = 2, p \neq 0$, d'où un isomorphisme

$$H^1(G, K_2(A_s)/K_2(F_s)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^4(F, \mathbb{Z}(V/F,2)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}\eta \tag{6.2}$$

où η est l'homomorphisme $H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ (on a utilisé (6.1)), et une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to H^2(G, K_2(A_s)/K_2(F_s)) &\to \mathbb{H}^5(F, \mathbb{Z}(A/F,2)) \\ &\to \mathbb{H}^5(F_s, \mathbb{Z}(A_s/F_s,2))^G \to H^3(G, K_2(A_s)/K_2(F_s)). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Disposons (6.3) et une partie de (6.1) en croix : pour faire tenir le diagramme dans la page, on note $M = K_2(A_s)/K_2(F_s)$, $C = \mathbb{Z}(A/F,2)$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = 2$.

$$\begin{tikzcd} & & H^3(F,2) \arrow[d] & & \\ & & H^3(A,2) \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & H^2(G,M) \arrow[r] & \mathbb{H}^5(F,C) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(A_s,2)^G \arrow[r] & H^3(G,M) \\ & & H^4(F,2) \arrow[d] & & \\ & & H^4(A,2) & & \end{tikzcd}$$

Un argument simple [54, Lemma of the 700th, p. 142] montre alors que l'homologie du complexe

$$0 \to H^2(G,M) \to H^4(F,2) \to H^4(A,2)$$

en $H^2(G,M)$ (resp. en $H^4(F,2)$) est isomorphe à l'homologie du complexe

$$H^3(F,2) \to H^3(A,2) \to H^3(A_s,2)^G \to H^3(G,M)$$

en $H^3(A,2)$ (resp. en $H^3(A_s,2)^G$). La conclusion en suit. □

Soit V une variété lisse géométriquement intègre sur F. Soit $V^{(1)}$ l'ensemble des points de codimension 1 de V. Pour tout $x \in V^{(1)}$ le symbole modéré définit une suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to \mathcal{K}_2(O_{V_s,x}) \to \mathcal{K}_2(F_s(V)) \to F_s(x)^\times \to 0,$$

d'où une suite exacte de groupes de cohomologie

$$H^2(G, K_2(O_{V_s,x})/K_2(F_s)) \to H^2(G, K_2(F_s(V))/K_2(F_s)) \\ \to H^2(G,\ F_s(x)^\times). \quad (6.4)$$

Sur un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique 1, l'énoncé suivant est établi dans [20, Prop. 8.4]. Il sert ici, sur un corps global, à démontrer la proposition 8.5.

Proposition 6.2 *Soit V une variété lisse géométriquement intègre sur un corps F. Notons*

$$\varepsilon : H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(V \times_F F_s, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

et

$$\mathcal{N}(V) = \mathrm{Ker}\Big(H^2(G, K_2(F_s(V))/K_2(F_s)) \to H^2(G, \bigoplus_{x \in V^{(1)}} F_s(x)^\times)\Big).$$

Les suites exactes de la proposition 6.1 se globalisent en une suite exacte

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathrm{Ker}(\varepsilon) \to \mathcal{N}(V) \to H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Démonstration: Il suffit de mettre en regard les suites exactes de la proposition 6.1 relatives à $F(V)$ et aux $O_{V,x}$, puis de tenir compte de (6.4). □

Théorème 6.3 *Soit F un corps parfait de dimension cohomologique ≤ 1. Soient $\bar{F}$ une clôture algébrique de F et $G = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Soit V une F-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Notons $\overline{V} = V \times_F \bar{F}$. On a alors une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Ker}\Big(CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})^G\Big) \to H^1(G, \mathbb{H}^3_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbb{Z}(2))) \\ \to \mathrm{Ker}\big(H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{V}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\big) \\ \to \mathrm{Coker}\Big(CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})^G\Big) \to 0.$$

Démonstration: Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & CH^2(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(V, \mathbb{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(V, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & CH^2(\overline{V})^G \arrow[r] & \mathbb{H}^4_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbb{Z}(2))^G \arrow[r] & H^0(\overline{V}, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))^G &
\end{tikzcd}$$

où les lignes exactes proviennent de (1.5). Dans la suite spectrale de Hochschild-Serre (à laquelle on peut penser comme suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de G-modules $\mathbb{Z}(2)_{\overline{V}}$)

$$E_2^{p,q} = H^p(G, \mathbb{H}^q_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbb{Z}(2))) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}_{\text{ét}}(V, \mathbb{Z}(2))$$

on a $E_2^{p,q} = 0$ pour $p > 2$ puisque, par hypothèse, $\mathrm{cd}(G) \leq 1$. D'après [14, Thm. 1.8 et Thm. 2.2] et [28] (voir aussi [42, Prop. 4.17 et Rem. 4.18]), sur le corps algébriquement clos $\overline{F}$, les groupes $H^0(\overline{V},\mathcal{K}_2) \simeq \mathbb{H}^2_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}(2))$ et $H^1(\overline{V},\mathcal{K}_2) \simeq \mathbb{H}^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}(2))$ sont chacun extension d'un groupe de torsion d'exposant fini par un groupe divisible. Il en résulte $E_2^{2,q} = 0$ pour $q = 2,3$. Ainsi la flèche verticale centrale dans ce diagramme est surjective de noyau $H^1(G,\mathbb{H}^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}(2)))$, et le théorème 6.3 résulte du lemme du serpent. □

Remarque 6.4 Cet argument donne de plus une suite exacte

$$H^3_{\text{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\text{nr}}(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))^G \\ \to H^1(F,CH^2(\overline{V})) \to H^1(F,\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}(2))).$$

Remarque 6.5 En caractéristique zéro, la proposition 6.2 (pour $cd(k) \leq 1$) et le théorème 6.3 sont établis dans [20, Prop. 8.4 et Thm. 8.5] ; la première est utilisée pour démontrer le second. On aurait pu suivre la même méthode ici, mais on n'eût obtenu le résultat qu'à la p-torsion près.

6.2. Descente galoisienne sur un corps fini

Pour tirer du théorème 6.3 des conséquences pratiques, il faut contrôler le module galoisien $\mathbb{H}^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}(2)) \simeq H^1(\overline{V},\mathcal{K}_2)$. Le théorème suivant regroupe des résultats de Raskind et du premier auteur [14, Thm. 2.2] pour $l \neq p$ et de Gros et Suwa [28, §3] pour $l = p$.

Pour V projective et lisse sur un corps F d'exposant caractéristique p, les groupes $H^i(\overline{V},\mathbb{Z}_l(j))$ et $H^i(\overline{V},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ ci-dessous utilisés sont pour $l \neq p$ les groupes de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}_l(j))$ et $H^i_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$. Pour $l = p$, ce sont ceux définis par Gros et Suwa dans [28].

Rappelons que le groupe $\bigoplus_l H^3(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2))\{l\}$ est fini. Pour la partie première à p, c'est dû à Gabber [23]. Pour la partie p-primaire, c'est dû à Illusie et Raynaud [34, p. 194]).

Théorème 6.6 ([14, 28]) *Soient F un corps parfait d'exposant caractéristique p, $\bar{F}$ une clôture algébrique de F et $G = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Soit V une F-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Soit $M = M(\overline{V})$ le module galoisien fini $\bigoplus_l H^3(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2))\{l\}$.*

(a) Il existe une suite exacte naturelle

$$0 \to D \to \mathbb{H}^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}(2)) \to M \to 0,$$

où le groupe D est divisible.

(b) Pour tout premier l, il existe un isomorphisme naturel

$$H^2(\overline{V},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}(2))\{l\}.$$

(c) Pour tout premier l, il existe un isomorphisme naturel de groupes divisibles

$$H^2(\overline{V},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))_{\text{div}} \xrightarrow{\sim} D\{l\}.$$

On a la proposition (cf. [28, Prop. 4.1]) :

Proposition 6.7 *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Soit V une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Soit M le module galoisien fini*

$$\bigoplus_l H^3(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2))\{l\}.$$

On a un isomorphisme de groupes finis :

$$H^1(G,\mathbb{H}^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}(2))) \xrightarrow{\sim} H^1(G,M).$$

Démonstration: De la suite exacte du théorème 6.6 (a) on tire la suite exacte

$$H^1(G,D) \to H^1(G,\mathbb{H}^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}(2))) \to H^1(G,M) \to H^2(G,D),$$

où D est un groupe divisible. Ceci implique déjà $H^2(G,D) = 0$ et que la flèche $H^1(G,D_{\text{tors}}) \to H^1(G,D)$ est surjective. D'après le théorème 6.6 (c), on a un isomorphisme de modules galoisiens

$$\bigoplus_l H^2(\overline{V},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))_{\text{div}} \xrightarrow{\sim} D_{\text{tors}}.$$

Pour tout l, on a un isomorphisme

$$H^2(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H^2(\overline{V},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))_{\text{div}}$$

(cf. [17, p. 781]), d'où

$$\begin{aligned} H^1(G,H^2(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2))) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &\simeq H^1(G,H^2(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\sim} H^1(G,H^2(\overline{V},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))_{\text{div}}). \end{aligned}$$

On a $H^1(G,H^2(\overline{V},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))_{\text{div}}) = 0$ pour tout premier l. En effet, ce groupe est un groupe de coïnvariants d'un groupe divisible, donc est divisible. Pour $l \neq p$, sa finitude, et donc sa nullité, résulte du fait que le groupe de coïnvariants $H^2_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2))_G$ est fini (Deligne, voir [17, §2.1]).

Par définition $H^2(\overline{V},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)) = H^0(\overline{V},\nu_\infty(2))$. La finitude du groupe des coïnvariants de ce dernier groupe sous l'action de G est établie, suivant O. Gabber, dans [17, §2.2, Formule (34)]. □

La combinaison de ce résultat avec le théorème 6.3 donne :

Théorème 6.8 *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Soit $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, et soit G le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{F}}$ sur $\mathbb{F}$. Soit V une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Soit M le module galoisien fini $\bigoplus_l H^3(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2))\{l\}$. On a alors une suite exacte*

$$
\begin{aligned}
0 \to \mathrm{Ker}\big(CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})\big) \to H^1(G,M) \\
\to \mathrm{Ker}\big(H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\big) \\
\to \mathrm{Coker}\Big(CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})^G\Big) \to 0.
\end{aligned}
$$

Si l'on remplace le corps $\mathbb{F}$ par un corps de fonctions d'une variable sur le corps des complexes, on a un énoncé analogue [20, Thm. 8.7], mais il faut alors supposer que le groupe de cohomologie cohérente $H^2(V,O_V)$ est nul.

Corollaire 6.9 *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soit $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, et $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. Soit V une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse, géométriquement intègre.*

(a) Si $\bigoplus_l H^3(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2))\{l\} = 0$, on a une suite exacte

$$
\begin{aligned}
0 \to CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})^G \to H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))^G \\
\to H^1(\mathbb{F},CH^2(\overline{V})) \to H^1(\mathbb{F},\mathbb{H}^4_{\text{ét}}(\overline{V},\Gamma(2))).
\end{aligned}
$$

(b) Si V est une variété géométriquement rationnelle, on a une suite exacte

$$0 \to CH^2(V)[1/p] \to CH^2(\overline{V})^G[1/p] \to H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))[1/p] \to 0$$

où pour tout groupe abélien A on note $A[1/p] := A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$.

Démonstration: L'énoncé (a) est une conséquence immédiate du théorème 6.8 et de la remarque 6.4. Soit l premier, $l \neq p$. Si $\overline{V}$ est rationnelle, les invariants birationnels $H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{V},\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ et $\mathrm{Br}(\overline{V})\{l\}$ sont nuls. Comme l'a montré Grothendieck [31, (8.9)], il résulte de la suite de Kummer que le quotient de $\mathrm{Br}(\overline{V})\{l\}$ par son sous-groupe divisible maximal est le groupe fini $H^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}_l(1))\{l\}$. Pour $\overline{V}$ rationnelle, on a donc $H^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}_l(1))\{l\} = 0$ et donc $H^3_{\text{ét}}(\overline{V},\mathbb{Z}_l(2))\{l\} = 0$. L'énoncé b) résulte alors du théorème 6.8. □

Remarque 6.10 La question de la surjectivité de la flèche $CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})^G$ sur un corps de base fini avait été posée par T. Geisser. A. Pirutka [59] vient d'exhiber des exemples de variétés projectives et lisses sur un corps fini, géométriquement rationnelles, de dimension 5, pour lesquelles les groupes $H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et $\mathrm{Coker}\big(CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})^G\big)$ sont non nuls. Le corollaire 6.9 (b) montre directement que, pour les variétés géométriquement rationnelles, ces deux groupes sont isomorphes à la p-torsion près.

Soit $V/\mathbb{F}$ une surface projective et lisse, géométriquement intègre. Comme rappelé dans la proposition 3.1, on a $H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et $H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Le théorème 6.8 donne donc une suite exacte

$$0 \to H^1(G,M) \to CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})^G \to 0.$$

Comme une telle surface possède un zéro-cycle de degré 1, cela donne aussi une suite exacte

$$0 \to H^1(G,M) \to A_0(V) \to A_0(\overline{V})^G \to 0,$$

où $A_0(V) \subset CH_0(V)$ est le groupe des zéro-cycles de degré zéro modulo l'équivalence rationnelle.

Le théorème de Roïtman donne un isomorphisme

$$A_0(\overline{V}) \xrightarrow{\sim} Alb_X(\overline{\mathbb{F}})$$

entre le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro modulo l'équivalence rationnelle et le groupe des points géométriques de la variété d'Albanese. Par ailleurs on vérifie que le module galoisien M est isomorphe au dual de Cartier D de la torsion du groupe de Néron-Severi NS de $\overline{V}$. On obtient alors une suite exacte

$$0 \to H^1(\mathbb{F},D)) \to A_0(V) \to Alb_X(\mathbb{F}) \to 0.$$

On retrouve ainsi, dans le cas des surfaces, un théorème de K. Kato et S. Saito ([46, Prop. 9.1], voir aussi [15]).

7. Zéro-cycles sur les corps globaux de caractéristique positive

7.1. Conjectures sur les zéro-cycles : rappels

Soit $\mathbb{F}$ un corps fini, $C/\mathbb{F}$ une courbe projective, lisse, géométriquement connexe, de corps des fonctions $K = \mathbb{F}(C)$. Pour v point fermé de C, notons K_v le complété de K en v, c'est-à-dire le corps des fractions de l'anneau local complété $\hat{O}_{C,v}$.

Soit $X/\mathbb{F}$ une variété projective, lisse, géométriquement connexe de dimension $d+1$, équipée d'un morphisme dominant $p : X \to C$ de fibre générique V/K lisse et géométriquement intègre. Soit l premier différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Notons $V_v = V \times_K K_v$.

Comme expliqué dans [9, §1 et §2], on a un diagramme commutatif de complexes :

$$\begin{array}{ccccc}
H^{2d}_{\text{ét}}(V,\mu_{l^n}^{\otimes d}) & \longrightarrow & \prod_{v\in C^{(1)}} H^{2d}_{\text{ét}}(V_v,\mu_{l^n}^{\otimes d}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H^2_{\text{ét}}(V,\mu_{l^n}),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) \\
\uparrow{\scriptstyle cl} & & \uparrow{\scriptstyle cl} & & \uparrow \\
CH_0(V) & \longrightarrow & \prod_{v\in C^{(1)}} CH_0(V_v) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(V)[l^n],\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l).
\end{array}$$

Dans ce diagramme, le terme médian du complexe supérieur est un produit direct restreint : on ne prend que les familles $\{\xi_v\}$ telles que pour presque tout v, ξ_v est dans l'image de $H^{2d}_{\text{ét}}(X\times_C \mathrm{Spec}\,(\hat{O}_{C,v}),\mu_{l^n}^{\otimes d})$. C'est une suite exacte (S. Saito [64]). Les flèches cl sont les applications cycle en cohomologie étale. La flèche $\prod_{v\in C^{(1)}} CH_0(V_v)\to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(V)[l^n],\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$ est induite par les accouplements naturels

$$CH_0(V_v)\times \mathrm{Br}(V_v)\to \mathrm{Br}(K_v)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui à un zéro-cycle z_v et un élément $A\in \mathrm{Br}(V_v)$ associent $\mathrm{inv}_v(A(z_v))\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

À la suite de divers travaux ([16], [45], [65]), le premier auteur a formulé la conjecture suivante [9, Conjecture 2.2].

Conjecture 7.1 *Pour chaque $v\in C^{(1)}$, soit $z_v\in CH_0(V_v)$. Supposons que pour tout élément $A\in \mathrm{Br}(V)\{l\}$, on ait $\sum_v \mathrm{inv}_v(A(z_v))=0$. Alors pour tout $n>0$ il existe $z_n\in CH_0(V)$ tel que pour tout v on ait $cl(z_n)=cl(z_v)\in H^{2d}_{\text{ét}}(V_v,\mu_{l^n}^{\otimes d})$.*

Elle a comme cas particulier l'énoncé suivant (voir [65, Statement (M_l^*), p. 400]) :

Conjecture 7.2 *S'il existe une famille $\{z_v\}_{v\in C^{(1)}}$, de zéro-cycles locaux de degrés premiers à l telle que pour tout élément $A\in \mathrm{Br}(V)\{l\}$ on ait $\sum_v \mathrm{inv}_v(A(z_v))=0$ alors il existe un zéro-cycle de degré premier à l sur V.*

Pour plus de détail sur ces conjectures, que l'on peut formuler plus généralement pour toute variété projective et lisse sur un corps global K, en particulier sur un corps de nombres, on consultera l'introduction de [81].

Le théorème suivant [9, Prop. 3.2] étend un théorème de Shuji Saito [65, Cor. (8-6)].

Théorème 7.3 ([9]) *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini, $C/\mathbb{F}$ une courbe projective, lisse, géométriquement connexe, de corps des fonctions $K=\mathbb{F}(C)$. Soit $X/\mathbb{F}$ une variété projective, lisse, géométriquement connexe de dimension d, équipée d'un morphisme dominant $p : X\to C$ de fibre générique V/K lisse et géométriquement* *intègre. Soit l premier différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Si l'application cycle*

$$CH^{d-1}(X)\otimes\mathbb{Z}_l \to H^{2d-2}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(d-1))$$

est surjective, les conjectures 7.1 et 7.2 valent pour V.

On ne connaît pas de contre-exemple à l'hypothèse de surjectivité dans le théorème 7.3. Sur la clôture algébrique d'un corps fini, voir la démonstration de la proposition 4.2.

Sur un corps fini, du théorème de Lefschetz faible on déduit aisément que la surjectivité de

$$CH^{2}(X)\otimes\mathbb{Z}_l \to H^{4}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(d-1))$$

pour toute variété projective et lisse X de dimension 3 impliquerait la surjectivité de

$$CH^{d-1}(X)\otimes\mathbb{Z}_l \to H^{2d-2}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(d-1))$$

pour toute variété projective et lisse X de dimension $d > 3$.

7.2. Le cas des solides fibrés en coniques

Commençons par un énoncé général sur les solides.

Théorème 7.4 *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini, $C/\mathbb{F}$ une courbe projective, lisse, géométriquement connexe, de corps des fonctions $K = \mathbb{F}(C)$. Soit $X/\mathbb{F}$ une variété projective, lisse, géométriquement connexe de dimension 3, équipée d'un morphisme dominant $p : X \to C$ de fibre générique une surface V/K lisse et géométriquement intègre. Soit l premier différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$.*

On suppose que :

(i) *La conjecture de Tate [79] vaut pour les diviseurs sur X, c'est-à-dire que l'application cycle*

$$CH^{1}(X)\otimes\mathbb{Q}_l \to H^{2}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_l(1))$$

est surjective.

(ii) *Le groupe $H^3_{\text{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est divisible.*

Alors les conjectures 7.1 et 7.2 valent pour V.

Démonstration: D'après la proposition 3.21, comme la variété X est de dimension 3, l'application cycle

$$CH^{2}(X)\otimes\mathbb{Z}_l \to H^{4}_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_l(2))$$

a son conoyau fini. D'après le théorème 2.2, la torsion de ce conoyau, donc le conoyau lui-même, est le quotient de $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ par son sous-groupe divisible maximal, et par l'hypothèse (ii) ce quotient est nul. L'application cycle ci-dessus est donc surjective, et on peut alors appliquer le théorème 7.3. □

Le lemme suivant rassemble des résultats bien connus.

Lemme 7.5 *(i) Soit K un corps et C une K-conique lisse. L'application naturelle* $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(C)$ *est surjective, et son noyau est d'ordre au plus 2.*

(ii) Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel κ de caractéristique différente de 2. Toute conique lisse C/K admet un modèle régulier $Y \subset \mathbf{P}^2_A$ donné par une équation homogène $x^2 - ay^2 - bt^2 = 0$ avec $a \in A^\times$ et b de valuation 0 *ou* 1. *La fibre spéciale de Y/A est soit*

(ii.a) une κ-courbe propre, lisse, géométriquement connexe de genre zéro soit

(ii.b) une κ-courbe intègre qui sur une extension au plus quadratique λ/κ est la réunion disjointe de deux droites se coupant transversalement en un κ-point.

(iii) Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(K)\{l\}$ avec $l \in A^\times$. Supposons que l'image de α dans $\mathrm{Br}(C)$ *appartienne à* $\mathrm{Br}(Y) \subset \mathrm{Br}(C)$. *Alors le résidu $\partial_A(\alpha) \in H^1(\kappa,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$ est nul dans le cas (ii.a), et appartient à $H^1(\lambda/\kappa,\mathbb{Z}/2) \hookrightarrow \mathbb{Z}/2$ dans le cas (ii.b). Il est en particulier nul si $l \neq 2$.*

Proposition 7.6 *Soient $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p différente de 2, et S,X des variétés projectives, lisses, géométriquement connexes sur $\mathbb{F}$, $X \to S$ un morphisme dominant dont la fibre générique X_η est une conique lisse sur le corps $\mathbb{F}(S)$. Si la conjecture de Tate pour les diviseurs et le nombre premier $l \neq p$ vaut pour S, alors elle vaut pour X.*

Démonstration: Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(X)\{l\}$. Soit l un nombre premier impair. Sa restriction à $\mathrm{Br}(X_\eta)$ est l'image d'un élément $\beta \in \mathrm{Br}(\mathbb{F}(S))$. Soit x un point de codimension 1 sur S, et soit $A = O_{S,x}$ l'anneau de valuation discrète défini par son anneau local. Soit Y/A un modèle de $X_\eta/\mathbb{F}(S)$ comme dans le lemme 7.5 (ii). Les A-schémas réguliers propres Y/A et $X \times_S \mathrm{Spec}\,(A)$ ont des fibres génériques isomorphes. Par la pureté du groupe de Brauer sur les schémas réguliers de dimension 2 [30, Prop. 2.3], ceci implique que $\alpha \in \mathrm{Br}(X_\eta)$ appartient à $\mathrm{Br}(Y)$. Il résulte alors du lemme 7.5 (iii) que $\partial_A(\alpha)$ est nul si on est dans le cas (ii.a) et ne peut prendre que l'une de deux valeurs si on est dans le cas (ii.b). Partant d'une équation $x^2 - ay^2 - bt^2 = 0$ pour X_η sur le corps $\mathbb{F}(S)$, on voit qu'il n'y a qu'un ensemble T fini de points de codimension 1 de S où l'on ne peut pas prendre un modèle du type (ii.a). D'après [31, Théorème (6.1)], on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(S)\{l\} \to \mathrm{Br}(\mathbb{F}(S)\{l\} \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^1(\mathbb{F}(S),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l).$$

La conjecture de Tate pour la surface S dit que le groupe $\mathrm{Br}(S)\{l\}$ est fini. Le sous-groupe des éléments de $\mathrm{Br}(\mathbb{F}(S)\{l\}$ dont les résidus hors de T sont nuls et dont les résidus aux points de T appartiennent au groupe fini

$$H^1(\lambda/\kappa, \mathbb{Z}/2) \hookrightarrow \mathbb{Z}/2$$

est donc fini. Ceci implique que $\mathrm{Br}(X)\{l\}$ est fini, et donc la conjecture de Tate vaut pour les diviseurs sur X et le nombre premier l. □

Remarque 7.7 L'argument développé dans la proposition précédente a une portée plus générale. Soient $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p différente de 2, et S, X des variétés projectives, lisses, géométriquement connexes sur $\mathbb{F}$, puis $X \to S$ un morphisme dominant de fibre générique $V = X_\eta/\mathbb{F}(S)$ lisse et géométriquement intègre. Supposons que pour un premier $l \neq p$ l'application $\mathrm{Br}(\mathbb{F}(S))\{l\} \to \mathrm{Br}(V)\{l\}$ soit surjective (c'est le cas par exemple si V est une intersection complète lisse de dimension au moins 3 dans un espace projectif). Supposons le groupe $\mathrm{Br}(S)\{l\}$ fini. En utilisant [79, Prop. (4.3)], le théorème de pureté pour le groupe de Brauer, et le comportement des résidus d'un élément de $\mathrm{Br}(\mathbb{F}(S))\{l\}$ sur S par passage à X, on montre que le groupe $\mathrm{Br}(X)$ est fini.

Théorème 7.8 *Soient* $\mathbb{F}$ *un corps fini de caractéristique* p *différente de* 2, *et* C, S, X *des variétés projectives, lisses, géométriquement connexes sur* $\mathbb{F}$, *de dimensions respectives* 1,2,3, *équipées de morphismes dominants* $X \to S \to C$, *la fibre générique de* $X \to S$ *étant une conique lisse, la fibre générique de* $S \to C$ *étant une courbe lisse géométriquement intègre. Soient* $K = \mathbb{F}(C)$ *et* V *la* K*-surface fibre générique de l'application composée* $X \to C$.

Si la conjecture de Tate pour les diviseurs vaut sur la $\mathbb{F}$*-surface* S, *alors, pour tout* $l \neq p$, *les conjectures 7.1 et 7.2 valent pour la* K*-surface* V.

Démonstration: D'après la proposition 7.6, la conjecture de Tate en codimension 1 vaut pour X. D'après le théorème 4.4 (Parimala et Suresh), $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ pour tout premier $l \neq p$. On peut alors appliquer le théorème 7.4. □

Corollaire 7.9 *Soient* $\mathbb{F}$ *un corps fini de caractéristique* p *différente de* 2, *et* C, S, X *des variétés projectives, lisses, géométriquement connexes sur* $\mathbb{F}$, *de dimensions respectives* 1,2,3, *équipées de morphismes dominants* $X \to S \to C$, *la fibre générique de* $X \to S$ *étant une conique lisse et la fibre générique de* $S \to C$ *étant une conique lisse. Alors pour tout* $l \neq p$, *les conjectures 7.1 et 7.2 valent pour* $V/\mathbb{F}(C)$, *fibre générique de l'application composée* $X \to C$.

Démonstration: En utilisant les propriétés des coniques et le théorème de Tsen, on voit qu'il existe une extension finie $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$, une courbe C' sur $\mathbb{F}'$ et, sur $\mathbb{F}'$, une application rationnelle dominante de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times C'$ vers $X' = X \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$. D'après

[79, Prop. 5.2 (b], la conjecture de Tate pour les diviseurs sur X résulte de la même conjecture sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times C'$, laquelle est évidente. Il est clair que la $\mathbb{F}(C)$-variété V possède un zéro-cycle de degré 4. L'énoncé découle alors du théorème 7.8. □

Remarque 7.10 Comme la surface V possède un zéro-cycle de degré 4, la conjecture 7.2 s'écrit ici : S'il existe une famille $\{z_v\}_{v \in C^{(1)}}$ de zéro-cycles locaux de degré 1 telle que pour tout élément $A \in \mathrm{Br}(V)$ d'ordre impair on ait $\sum_v \mathrm{inv}_v(A(z_v)) = 0$, alors il existe un zéro-cycle de degré 1 sur V. Cet énoncé est déjà obtenu par Parimala et Suresh dans [58].

8. Principe local-global pour H^3 non ramifié

Soient K un corps global, Ω l'ensemble de ses places. Pour $v \in \Omega$, on note K_v le complété de K en v. On note K_s une clôture séparable de K et $g = \mathrm{Gal}(K_s/K)$. Pour toute K-variété V, on note $\overline{V} = V \times_K K_s$, et $V_v = V \times_K K_v$.

8.1. Questions et conjectures en K-théorie algébrique

Soient F un corps, F_s une clôture séparable de k, puis $g = \mathrm{Gal}(F_s/F)$. Soit V une F-variété lisse géométriquement intègre. On dispose de l'application g-équivariante définie par les symboles modérés

$$K_2F_s(V)/K_2F_s \to \bigoplus_{x \in V^{(1)}} F_s(x)^\times.$$

Comme dans la proposition 6.2, on note :

$$\mathcal{N}(V) := \mathrm{Ker}(H^2(g, K_2F_s(V)/K_2F_s) \to H^2(g, \bigoplus_{x \in V^{(1)}} F_s(x)^\times)).$$

Si maintenant F est un corps global K, on note

$$Ш\mathcal{N}(V) := \mathrm{Ker}(\mathcal{N}(V) \to \prod_v \mathcal{N}(V_v)).$$

Soient V une K-variété projective, lisse, géométriquement connexe.

Conjecture 8.1 *Le groupe* $Ш\mathcal{N}(V)$ *est fini.*

Question 8.2 Si $\dim V = 2$, le groupe $Ш\mathcal{N}(V)$ est-il nul ?

Conjecture 8.3 *Si V est une K-surface géométriquement réglée, le groupe* $Ш\mathcal{N}(V)$ *est nul.*

La conjecture 8.3 est inspirée de [16], où elle n'est formulée que pour les surfaces rationnelles (conjecture B, op. cit.).

Comme expliqué dans [16] (voir aussi la sous-section 8.4 ci-dessous), cette conjecture implique l'essentiel des conjectures locales-globales sur les zéro-cycles d'une telle surface faites dans [16]. Pour X une surface fibrée en coniques sur la droite projective sur un corps de nombres, la conjecture B de [16] fut établie par Salberger [68, Thm. (7.1)].

Remarque 8.4 Des résultats sur les zéro-cycles, analogues à ceux du théorème 7.8, ont été obtenus pour les surfaces fibrées en coniques sur une courbe de genre quelconque sur un corps de nombres (le premier auteur, Frossard, van Hamel, Wittenberg, voir [81]). Dans ces travaux, on fait l'hypothèse que le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne de la courbe est fini. C'est l'analogue de l'hypothèse que la conjecture de Tate vaut pour la surface S dans le théorème 7.8.

Il conviendrait de vérifier que sans faire cette hypothèse les articles en question établissent $\text{Ш}\mathcal{N}(V)=0$ pour toute telle surface V fibrée en coniques au-desssus d'une courbe de genre quelconque, et donc la conjecture 8.3 pour de telles surfaces.

8.2. Traduction en termes de H^3_{nr}

Pour V une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur le corps global K, on note

$$\text{Ш}H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) := \mathrm{Ker}(H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \prod_v H^3_{\mathrm{nr}}(V_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))).$$

On note

$$\varepsilon : H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Définissons $\text{Ш}(\mathrm{Ker}(\varepsilon))$ de la façon évidente.

La flèche naturelle $\text{Ш}(\mathrm{Ker}(\varepsilon)) \to \text{Ш}H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un isomorphisme. En effet, si L est une extension régulière de K, toute classe dans $H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ qui s'annule après extension des scalaires de K à L s'annule par passage à K_s [3].

Notons $\Omega_{\mathbb{R}}$ l'ensemble, éventuellement vide, des places réelles de K. On a :

$$H^3(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathbb{R}}} H^3(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathbb{R}}} \mathbb{Z}/2,$$

et

$$H^4(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathbb{R}}} H^4(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0.$$

3. C'est une propriété générale des foncteurs commutant aux limites inductives filtrantes.

Pour la torsion première à la caractéristique de K, voir [57, Thm. I. 4.10]. Si K est un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini de caractéristique $p > 0$, on a $\nu_n(2) = 0$ pour tout $n > 0$ et donc $H^r(K,\mathbb{Z}/p^n(2)) = 0$ pour tout entier r.

De la proposition 6.2 on déduit alors :

Proposition 8.5 *Soit K un corps global. On a une suite exacte*

$$0 \to A \to Ш H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to Ш\mathcal{N}(V) \to 0,$$

où $A = (\mathbb{Z}/2)^s$, avec s au plus égal au nombre de places réelles de K pour lesquelles l'ensemble $V(K_v)$ des K_v-point de V est vide.

Remarque 8.6 Soit $K = \mathbb{Q}$. Soit $V/\mathbb{Q}$ avec $V(\mathbb{R}) = \emptyset$. Le groupe A vaut $\mathbb{Z}/2$ si et seulement si -1 n'est pas une somme de 4 carrés dans $\mathbb{Q}(V)$ mais -1 est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(V)$. Si V est une surface, alors -1 est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(V)$ (Pfister) et -1 une somme de 8 carrés dans $\mathbb{Q}(V)$ (Jannsen et le premier auteur). C'est un problème ouvert de savoir s'il existe une telle surface V sur $\mathbb{Q}$ pour laquelle -1 n'est pas une somme de 4 carrés dans $\mathbb{Q}(V)$. Voir à ce sujet [35].

Soit V une K-variété projective, lisse, géométriquement connexe. D'après la proposition 8.5, les questions et conjectures du paragraphe 8.1 sont équivalentes aux questions et conjectures suivantes.

Conjecture 8.7 *Le groupe $Ш H^3_{nr}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.*

Question 8.8 Si $\dim V = 2$, le groupe $Ш H^3_{nr}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(2)$ est-il fini d'exposant 2, nul si V possède des K_v-points pour toute place réelle v ?

Conjecture 8.9 *Si V est une K-surface géométriquement réglée, le groupe $Ш H^3_{nr}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(2)$ est un groupe fini $A = (\mathbb{Z}/2)^s$, avec s au plus égal au nombre de places réelles de K telles que $V(K_v) = \emptyset$.*

Proposition 8.10 *Soit V/K une surface projective et lisse sur un corps global K. Soit l un premier distinct de la caractéristique de K. L'image de l'application de restriction aux complétés de K*

$$H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to \prod_{v\in\Omega} H^3_{\mathrm{nr}}(V_v,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

appartient à la somme directe $\bigoplus_{v\in\Omega} H^3_{\mathrm{nr}}(V_v,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$.

Démonstration: Soit $\mathcal{V}/U$ un modèle projectif et lisse de V/K au-dessus d'un ouvert $U = \mathrm{Spec}(O)$ de l'anneau des entiers du corps de nombres K, ou d'une courbe lisse sur un corps fini, de corps des fractions le corps global K de caractéristique positive. Soit $\xi \in H^3(k(V),\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ une classe non ramifiée sur V. Les points (en nombre fini) de codimension 1 de $\mathcal{V}$ où le résidu de ξ est non nul sont situés au-dessus d'un nombre fini de points fermés de U. Quitte à remplacer U par un ouvert non vide, on peut donc supposer que ξ appartient à $H^0(\mathcal{V},\mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2}))$. Pour tout $v \in U$, son image $\xi_v \in H^3_{\mathrm{nr}}(V_v,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ appartient donc à $H^0(\mathcal{V}\times_O O_v,\mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2}))$. Or S. Saito et K. Sato ont montré que pour une surface relative projective et lisse sur un anneau de valuation discrète hensélien excellent, à corps résiduel fini, ce dernier groupe est nul ([67], cf. [10, Thm. 3.16]). $\square$

8.3. Sur un corps global de caractéristique positive

Sur un tel corps, le lien entre les conjectures et questions ci-dessus et celles du §5 est fourni par la :

Proposition 8.11 *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini, $C/\mathbb{F}$ une $\mathbb{F}$-courbe projective lisse géométriquement connexe, $K = \mathbb{F}(C)$ son corps des fonctions, X une $\mathbb{F}$-variété projective lisse géométriquement connexe, $f : X \to C$ un morphisme dominant à fibre générique lisse géométriquement intègre V/K.*

Pour tout l premier, $l \neq \mathrm{car}.\mathbb{F}$, on a une inclusion naturelle

$$Ш H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \hookrightarrow H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)).$$

Démonstration: Une classe dans

$$H^3(K(V),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = H^3(\mathbb{F}(X),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

qui est dans $Ш H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ a tous ses résidus nuls sur X. Elle appartient donc à $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. $\square$

Ainsi :

(a) La finitude de $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ (conjecture 5.1) entraîne la finitude de $Ш H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ (conjecture 8.7) et de $Ш\mathcal{N}(V)$ (conjecture 8.1).

(b) Pour X de dimension 3, la nullité de $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ (question 5.4) entraîne la nullité de $Ш H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ (question 8.8) et de $Ш\mathcal{N}(V)$ (question 8.3).

Soient $\mathcal{X} \to S \to C$ des morphismes dominants de variétés projectives lisses, géométriquement connexes de dimensions respectives 3,2,1, sur un corps fini $\mathbb{F}$ de caractéristique p impaire, soit $K = \mathbb{F}(C)$ et

$$X = \mathcal{X} \times_C \operatorname{Spec} K.$$

Supposons que la fibre générique de $X \to S$ soit une conique. Pour $l \neq p$ un nombre premier, le théorème de Parimala et Suresh (théorème 4.4 ci-dessus) donne

$H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$. Pour la surface $V/K = \mathbb{F}(C)$, on a donc $Ш H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ et $Ш\mathcal{N}(V) = 0$. On comparera ce résultat à la remarque 8.4 ci-dessus.

8.4. Cas des surfaces rationnelles

Soient F un corps et F_s une clôture séparable de K. Soit $g = \mathrm{Gal}(F_s/F)$. Soit V une F-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(V \times_F F_s)$ est un g-réseau autodual. On note S le K-tore de groupe de caractères le g-réseau $\mathrm{Pic}(V \times_F F_s)$. Soit $A_0(V)$ le groupe des zéro-cycles de degré zéro sur V modulo l'équivalence rationnelle. L'indice $I(V)$ de V est le pgcd des degrés des points fermés de V.

Théorème 8.12 ([1, 16, 6]) *Supposons $I(V) = 1$. On a alors une suite exacte naturelle :*

$$0 \to A_0(V) \to H^1(F,S) \to \mathcal{N}(V) \to 0.$$

Supposons maintenant que F soit un corps global K. L'application diagonale $H^1(K,S) \to \prod_v H^1(K_v,S)$ a son image dans la somme directe ; on note

$$Ч^1(K,S) := \mathrm{Coker}\Big(H^1(K,S) \to \bigoplus_v H^1(K_v,S)\Big).$$

La dualité de Tate-Nakayama pour le K-tore S donne une injection

$$Ч^1(K,S) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(H^1(K,\mathrm{Pic}(\overline{V})),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Pour une référence récente pour ces faits sur les K-tores, voir [5, Prop. 2.34].

Le théorème 8.12 donne donc naissance au diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_0(V) & \longrightarrow & H^1(K,S) & \longrightarrow & \mathcal{N}(V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_v A_0(V_v) & \longrightarrow & \bigoplus_v H^1(K_v,S) & \longrightarrow & \bigoplus_v \mathcal{N}(V_v) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Le lemme du serpent donne alors une suite exacte

$$0 \to Ш A_0(V) \to Ш^1(K,S) \to Ш\mathcal{N}(V) \to Ч A_0(V) \to Ч^1(k,S).$$

On a donc :

Proposition 8.13 *Dans la situation ci-dessus, on a équivalence entre les deux énoncés suivants*

(a) $Ш\mathcal{N}(V) = 0$ *(Conjecture B de [16]).*

(b) L'injection $ШA_0(V) \hookrightarrow Ш^1(K,S)$ *est un isomorphisme et l'application* $ЧA_0(V) \to Ч^1(K,S)$ *est injective.* □

L'énoncé (b) se réinterprète comme l'existence d'une suite exacte de groupes finis

$$0 \to Ш^1(K,S) \to A_0(X) \to \bigoplus_v A_0(X_v) \to \mathrm{Hom}(H^1(K,\mathrm{Pic}(\overline{V})),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

soit encore, compte tenu de l'isomorphisme $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(K) \xrightarrow{\sim} H^1(K,\mathrm{Pic}(\overline{V}))$,

$$0 \to Ш^1(K,S) \to A_0(X) \to \bigoplus_v A_0(X_v) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(K),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Lorsque K est un corps de nombres, l'existence d'une telle suite exacte est la conjecture A de [16]. Qu'elle résulte de la conjecture B est déjà mentionné dans [16].

Pour une surface V fibrée en coniques sur $\mathbf{P}^1_K$, lorsque K est un corps de nombres, cette conjecture A fut établie par Salberger [68]. Nous sommes maintenant en mesure de donner un énoncé analogue sur un corps global K de caractéristique positive. On observera que la méthode de démonstration est fort différente de celle de Salberger sur un corps de nombres.

Théorème 8.14 *Soit* $K = \mathbb{F}(C)$ *le corps des fonctions d'une courbe projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini* $\mathbb{F}$ *de caractéristique différente de* 2*. Soit* X *une* $\mathbb{F}$*-variété projective, lisse, géométriquement connexe, de dimension* 3*, équipée d'un morphisme* $X \to \mathbf{P}^1_C$ *de fibre générique une conique. Soit* V/K *la fibre générique de* $X \to C$*, qui est une surface fibrée en coniques au-dessus de* $\mathbf{P}^1_K$*, et donc géométriquement rationnelle. Supposons* $I(V) = 1$*. On a alors une suite exacte de groupes de torsion* 2*-primaire :*

$$0 \to Ш^1(K,S) \to A_0(V) \to \bigoplus_v A_0(V_v) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(K),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Démonstration: Pour V/K comme ci-dessus, il est connu que les groupes intervenant dans cette suite sont de torsion 2-primaire, et même de 2-torsion (voir [16]). D'après la proposition 8.5, on a

$$Ш H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2)) \xrightarrow{\sim} Ш\mathcal{N}(V)\{2\}.$$

D'après la proposition 8.11 on a

$$Ш H^3_{\mathrm{nr}}(V,\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2)) \hookrightarrow H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2)).$$

Le théorème 4.4 (Parimala et Suresh) donne $H^3_{\mathrm{nr}}(X,\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2)) = 0$. On a donc $Ш\mathcal{N}(V)\{2\} = 0$. La démonstration de la proposition 8.13 valant composante l-primaire par composante l-primaire, ceci permet de conclure. □

RÉFÉRENCES

1. S. Bloch, On the Chow groups of certain rational surfaces, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **14** (1981), no. 1, 41–59.
2. S. Bloch, *Lectures on algebraic cycles*, Duke University Mathematics Series IV (1980). Second edition : Lectures on Algebraic Cycles : New Mathematical Monographs Series **16**, Cambridge University Press (2011).
3. S. Bloch, A. Ogus, Gersten's conjecture and the homology of schemes, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **7** (1974), 181–201.
4. S. Bloch, V. Srinivas, Remarks on correspondences and algebraic cycles, Amer. J. Math. **105** (1983), 1235–1253.
5. D. Bourqui, Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques non déployées. Mem. Amer. Math. Soc. **211** (2011), no. 994.
6. J.-L. Colliot-Thélène, Hilbert's theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces, Invent. math. **71** (1983), 1–20.
7. J.-L. Colliot-Thélène, Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique, in *Arithmetic Algebraic Geometry* (CIME, Trento, 1991), Springer L.N.M. **1553** (1993), 1–49.
8. J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58**, Part I (1995), 1–64.
9. J.-L. Colliot-Thélène, Conjectures de type local-global sur les groupes de Chow dans la cohomologie étale, in *Algebraic K-Theory* (1997), W. Raskind and C. Weibel ed., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **67**, Amer. Math. Soc. (1999), 1–12.
10. J.-L. Colliot-Thélène, Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés p-adiques [d'après S. Saito, K. Sato et al.], Séminaire Bourbaki, 62ème année, 2009–2010, no. 1012.
11. J.-L. Colliot-Thélène, Quelques cas d'annulation du troisième groupe de cohomologie non ramifiée, in *Regulators* (Barcelone 2010). Contemporary Mathematics **571** (2012), 45–50, Amer. Math. Soc.
12. J.-L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler et B. Kahn, The Bloch–Ogus–Gabber theorem, in *Algebraic K-theory* (Toronto, ON, 1996) (V. P. Snaith ed.), 31–94, Fields Inst. Commun. **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

13. J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford, Invent. math. **97** (1989), 141–158.
14. J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, K_2-cohomology and the second Chow group, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.
15. J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, On the reciprocity law for surfaces over finite fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **33** (1986), 283–294.
16. J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch. Duke Math. J. **48** (1981), 421–447.
17. J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, Duke Math. J. **50** (1983), 763–801.
18. J.-L. Colliot-Thélène et T. Szamuely, Autour de la conjecture de Tate à coefficients $\mathbb{Z}_\ell$ pour les variétés sur les corps finis, in *The Geometry of Algebraic Cycles*, ed. R. Akhtar, P. Brosnan, R. Joshua, Clay Mathematics Proceedings **9**, Amer. Math. Soc. (2010), 83–98.
19. J.-L. Colliot-Thélène et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi–Brauer and similar varieties, Journal für die reine und angew. Math. (Crelle) **453** (1994), 49–112.
20. J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, Duke Math. J. **161** (5) (2012), 735–801.
21. F. Déglise, Transferts sur les groupes de Chow à coefficients, Math. Z. **252** (2006), 315–343.
22. P. Deligne, La conjecture de Weil, I, Pub. Math. IHÉS **43** (1974), 273–307.
23. O. Gabber, Sur la torsion dans la cohomologie l-adique d'une variété, C. R. Acad. Sci. Paris **297** (1983), 179–182.
24. T. Geisser et M. Levine, The K-theory of fields in characteristic p, Invent. math. **139** (2000), 459–493.
25. T. Geisser et M. Levine, The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin–Voevodsky, Journal für die reine und angew. Math. (Crelle) **530** (2001), 55–103.
26. M. Gros, Sur la partie p-primaire du groupe de Chow de codimension deux, Comm. Algebra **13** (1985), 2407–2420.
27. M. Gros, Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique, Mém. SMF **21** (1985), 1–87.
28. M. Gros et N. Suwa, Application d'Abel-Jacobi p-adique et cycles algébriques, Duke Math. J. **57** (1988), 579–613.
29. A. Grothendieck, La théorie des classes de Chern, Bulletin de la Société Mathématique de France **86** (1958), 137–154.
30. A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, II : Théorie cohomologique, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, 1968.
31. A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, III : exemples et compléments, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, 1968.

32. A. Grothendieck, La classe de cohomologie associée à un cycle (réd. P. Deligne), in *Cohomologie étale* (SGA 4 1/2), Lect. Notes in Math. **569**, Springer, 1977, 129–153.
33. R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lect. Notes in Math. **20**, Springer, 1966.
34. L. Illusie et M. Raynaud, Les suites spectrales associées au complexe de de Rham–Witt, Publ. math. I.H.É.S. **57** (1983), 73–212.
35. U. Jannsen et R. Sujatha, Levels of function fields of surfaces over number fields, J. Algebra **251** (2002), no. 1, 350–357.
36. B. Kahn, Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres, K-theory **7** (1993), 55–100.
37. B. Kahn, Applications of weight two motivic cohomology, Documenta Mathematica **1** (1996), 395–416.
38. B. Kahn, Équivalence rationnelle, équivalence numérique et produits de courbes elliptiques sur un corps fini, version préliminaire de [39], `arXiv:math/0205158`.
39. B. Kahn, Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **36** (2003), 977–1002.
40. B. Kahn, Algebraic K-theory, algebraic cycles and arithmetic geometry, in *Handbook of K-theory*, Vol. 1, Springer, 2005.
41. B. Kahn, Zeta functions and motives, Pure Appl. Math. Quarterly **5** (2009), 507–570 [2008].
42. B. Kahn, Classes de cycles motiviques étales, `arXiv:1102.0375v2[math.AG]`, à paraître dans Algebra & Number Theory.
43. B. Kahn et R. Sujatha, Birational motives, I : pure birational motives, `arXiv:0902.4902v1[math.AG]`.
44. K. Kato, A Hasse principle for two-dimensional global fields, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **366** (1986), 142–181.
45. K. Kato et S. Saito, Global class field theory of arithmetic schemes, in *Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory*, Contemporary Math. **55** (I) (1985), 255–331.
46. K. Kato et S. Saito, Unramified class field theory of arithmetical surfaces, Annals of Math. **118** (1985), 241–275.
47. T. Katsura, T. Shioda, On Fermat varieties, Tôhoku Math. J. **31** (1979), 97–115.
48. S. Lichtenbaum, Values of zeta-functions at non-negative integers, in *Number Theory* (Noordwijkerhout 1983), Lect. Notes in Math. **1068**, 127–138, Springer, 1984.
49. S. Lichtenbaum, The construction of weight-two arithmetic cohomology, Invent. math. **88** (1987), 183–215.
50. S. Lichtenbaum, New results on weight-two arithmetic cohomology, in *Grothendieck Festschrift*, vol. III, Progress in math. **88** (1990), 35–55.
51. C. Mazza, V. Voevodsky et C. Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. **2**.

52. A. Merkurjev, Rational correspondences, preprint Feb. 2001, disponible sur `http://www.math.ucla.edu/~merkurev/publicat.htm`, voir aussi l'appendice RC dans l'article 'On standard norm varieties', par A. S. Merkurjev et N. Karpenko, à paraître dans Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.
53. A. S. Merkurjev et A. A. Suslin, Le groupe K_3 d'un corps, Izv. Akad. Nauk SSSR **54** (1990), 339–356 (trad. anglaise : Math. USSR Izvestija **36** (1990), 541–565).
54. A. S. Merkurjev et J.-P. Tignol, Galois cohomology of biquadratic extensions. Comment. Math. Helv. **68** (1993), no. 1, 138–169.
55. J.S. Milne, Values of zeta functions of varieties over finite fields, Amer. J. Math. **108** (1986), 297–360.
56. J.S. Milne, Motives over finite fields, in *Motives* (Seattle, 1991) (U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre eds.), Proc. Symp. pure Math. **55** (1), Amer. Math. Soc., 1994, 401–459.
57. J.S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, Second Edition, Kea Books, 2006.
58. R. Parimala et V. Suresh, Degree three cohomology of function fields of surfaces, `arXiv:1012.5367v1[math.NT]`, revised version 11th May 2012.
59. A. Pirutka, Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis, Algebra & Number Theory **5** (6) (2011), 803–817.
60. A. Pirutka, Cohomologie non ramifiée en degré trois d'une variété de Severi–Brauer, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **349** (2011), 369–373.
61. A. Pirutka, Invariants birationnels dans la suite spectrale de Bloch–Ogus, `arXiv:1106.3001v1[math.AG]`, à paraître dans J. K-Theory.
62. B. Poonen, Bertini theorems over finite fields, Annals of Math. **160** (2004), 1099–1127.
63. M. Rost, Chow groups with coefficients, Doc. Math. **1** (1996), 319–393.
64. S. Saito, A global duality theorem for varieties over global fields, in *Algebraic K-theory : connections with geometry and topology* (Lake Louise, AB, 1987), 425–444, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 279, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
65. S. Saito, Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes, Invent. math. **98** (1989), 371-404.
66. S. Saito et K. Sato, A p-adic regulator map and finiteness results for arithmetic schemes, Documenta math. Extra Volume Suslin (2010), 525–594.
67. S. Saito et K. Sato, A finiteness theorem for zero-cycles over $\mathfrak{p}$-adic fields, with an appendix by U. Jannsen, Annals of Math. **172** (2010), 593–639.
68. P. Salberger, Zero-cycles on rational surfaces over number fields. Invent. math. **91** (1988), 505–524.
69. P. Salberger, On obstructions to the Hasse principle. in *Number theory and algebraic geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **303**, 251–277, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

70. C. Schoen, An integral analog of the Tate conjecture for one-dimensional cycles on varieties over finite fields, Math. Ann. **311** (1998), 493–500.

71. A. Scholl, Classical motives, in *Motives* (Seattle, 1991) (U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre, eds.), Proc. Symp. pure Math. **55** (1), Amer. Math. Soc., 1994, 163–187.

72. N. Spaltenstein, Resolutions of unbounded complexes, Compositio Math. **65** (1988), 121–154.

73. M. Spieß, Proof of the Tate conjecture for products of elliptic curves over finite fields, Math. Ann. **314** (1999), 285–290.

74. A. A. Suslin, Quaternion homomorphism for the field of functions on a conic. Dokl. Akad. Nauk SSSR **265** (1982), 292–296. Engl. transl. : Soviet Math. Dokl. **26** (1982), 72–77 (1983).

75. A. A. Suslin et V. Voevodsky, Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coeffiicients, in *The arithmetic and geometry of algebraic cycles* (Banff, AB, 1998), 117–189, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., **548**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

76. N. Suwa, A note on Gersten's conjecture for logarithmic Hodge-Witt sheaves, K-Theory **9** (1995), 245–271.

77. J. Tate, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Invent. math. **2** (1966), 134–144.

78. J. Tate, The cohomology groups of tori in finite Galois extensions of number fields, Nagoya Math. J. **27** (1966), 709–719.

79. J. Tate, Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology, in *Motives*, (Seattle, 1991) (U. Jannsen, S. Kleiman, J-P. Serre eds.), Proc. Symposia Pure Math. **55** (1), AMS, 1994, 71–83.

80. C. Voisin, On integral Hodge classes on uniruled and Calabi-Yau threefolds, in *Moduli Spaces and Arithmetic Geometry*, Advanced Studies in Pure Mathematics **45**, 2006, 43–73.

81. O. Wittenberg, Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque, Duke Math. J. **61** (11) (2012), 2113–2166.

82. Yuri G. Zarhin, Poincaré duality and unimodularity, `arXiv:1112.1429v3[math.AG]`.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE `jlct@math.u-psud.fr`

C.N.R.S., Université Paris Sud
UMR 8628
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex
France

BRUNO KAHN kahn@math.jussieu.fr

Institut de Mathématiques de Jussieu
UMR 7586
Case 247
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France

Received: January 28, 2012