Groupe de Brauer non ramifié des hypersurfaces cubiques singulières (d'après P. Salberger)

J.-L. Colliot-Thélène

9 juin 2008

En réponse à une question de R. Heath-Brown, P. Salberger en 2006 a indiqué les grandes lignes de la démonstration de l'énoncé suivant, qui étend un résultat connu dans le cas lisse ([CT]). Les notations sont les notations usuelles dans ce domaine. Pour X un schéma on note $\mathrm{Pic}\, X = H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ son groupe de Picard et $\mathrm{Br}\, X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ son groupe de Brauer. Pour les propriétés usuelles de ces groupes, nous renvoyons le lecteur à [CTSan].

Théorème. *Soit k un corps de caractéristique zéro, $\overline{k}$ une clôture algébrique, $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une intersection complète géométriquement intègre de dimension au moins 3. Supposons le lieu singulier de X de codimension au moins égale à 4 dans X. Alors pour tout k-modèle projectif et lisse Y de X,*

(a) le groupe de Picard de $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$ est un module galoisien $\mathbf{Z}$-libre de type fini qui est stablement de pemutation;

(b) on a $H^1(\mathcal{G}, \mathrm{Pic}\, \overline{Y}) = 0$;

(c) on a $\mathrm{Br}\, k \simeq \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}\, \overline{Y}]$.

Démonstration. Les anneaux locaux de X en codimension au moins 3 sont réguliers, donc factoriels (théorème d'Auslander-Buchsbaum, voir SGA 2 XI Thm. 3.13). Comme X est une intersection complète, un théorème de Grothendieck (SGA 2 XI Cor. 3.14, ex-conjecture de Samuel) implique que tous les anneaux locaux de X sont factoriels. Ainsi les diviseurs de Weil sur X sont tous des diviseurs de Cartier. Ceci implique que pour tout ouvert $U \subset X$ la flèche de restriction $\mathrm{Pic}\, X \to \mathrm{Pic}\, U$ est surjective. Cette flèche est aussi injective. Soit en effet D un diviseur sur X qui est le diviseur d'une fonction rationnelle f sur U. Comme le complémentaire de U dans X est de codimension au moins 2 et que sur X diviseurs de Weil et diviseurs de Cartier coïncident, on conclut que D est le diviseur de f sur X. Le même argument montre que toute fonction rationnelle sur X définie et inversible sur U est définie et inversible sur X, et comme X est projectif et géométriquement intègre, toute telle fonction est une constante, elle appartient à k^*.

L'hypothèse sur la codimension du lieu singulier est géométrique, elle vaut pour X_K pour toute extension K de corps de k, par exemple $\overline{k}$. Les mêmes conclusions s'appliquent donc à $\overline{X}$. En particulier la flèche de restriction $\mathrm{Pic}\, \overline{X} \to \mathrm{Pic}\, \overline{U}$ est un isomorphisme.

Par ailleurs, le Corollaire 3.7 de SGA 2 XII montre que la flèche de restriction $\mathbf{Z} = \mathrm{Pic}\, \mathbf{P}^n_k \to \mathrm{Pic}\, X$ qui envoie la classe de $1 \in \mathbf{Z}$ sur la classe du faisceau inversible $\mathcal{O}_X(1)$ est un isomorphisme. Il en est de même de $\mathbf{Z} = \mathrm{Pic}\, \mathbf{P}^n_{\overline{k}} \to \mathrm{Pic}\, \overline{X}$, et l'action du groupe de Galois sur $\mathbf{Z} \simeq \mathrm{Pic}\, \overline{X}$ est triviale.

En conclusion, sous les hypothèses du théorème, le module galoisien $\mathrm{Pic}\, \overline{U}$ est le module galoisien trivial $\mathbf{Z}$ et l'on a $\overline{k}^* \simeq \overline{k}[U]^*$, où $\overline{k}[U]$ est l'anneau des fonctions définies sur $\overline{U}$. L'argument ci-dessus montre aussi que l'application naturelle $\mathrm{Pic}\, U \to \mathrm{Pic}\, \overline{U}$ est un isomorphisme.

D'une suite exacte bien connue (cf. [CTSan] (1.5.0) p. 386) on déduit que la flèche naturelle $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}\, U \to \mathrm{Br}\, \overline{U}]$ est un isomorphisme. Par des arguments standards sur le groupe de Brauer (pureté et injection par passage d'une variété lisse à un ouvert) un tel énoncé implique le même énoncé pour toute k-variété projective et lisse k-birationnelle à X : c'est l'énoncé (c).

Soit $U \subset Y$ une k-compactification lisse de U (le théorème de Hironaka assure l'existence d'une telle compactification). On a alors la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to \mathrm{Div}_\infty \overline{Y} \to \mathrm{Pic}\, \overline{Y} \to \mathrm{Pic}\, \overline{U} \to 0,$$

où le groupe $\mathrm{Div}_\infty \overline{Y}$ est le module de permutation sur les points de codimension 1 de $\overline{Y}$ en dehors de $\overline{U}$, et le zéro à gauche tient au fait que l'on a $\overline{k}^* \simeq \overline{k}[U]^*$. La suite de modules galoisiens ci-dessus est scindée, car tout groupe $H^1(\mathcal{G}, P)$ à valeurs dans un module de permutation est nul (lemme de Shapiro). Ainsi $\mathrm{Pic}\, \overline{Y}$ est la somme directe de deux modules de permutation, et est donc un module de permutation. Il en résulte que pour tout autre modèle projectif et lisse Y', le module galoisien $\mathrm{Pic}\, \overline{Y}'$ est stablement de permutation ([CTSan], Prop. 2.A.1 p. 461).

L'énoncé (b) en résulte.

Corollaire. *Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une hypersurface cubique géométriquement intègre de dimension au moins 3 qui n'est pas un cône. Supposons le lieu singulier de X de codimension au moins égale à 4 dans X. Alors pour tout modèle projectif et lisse Y de X, on a* $\mathrm{Br}\, k \simeq \mathrm{Br}\, Y$.

Démonstration. Au vu du théorème ci-dessus, il suffit de montrer $\mathrm{Br}\, \overline{Y} = 0$.

Si l'hypersurface X est lisse, on a $\mathrm{Br}\, \overline{X} = 0$ comme il est établi dans [CT] sans restriction sur le degré de l'hypersurface. Par l'invariance birationnelle du groupe de Brauer pour les variétés projectives et lisses ceci implique $\mathrm{Br}\, \overline{Y} = 0$.

Si X est singulière, comme l'hypersurface cubique n'est pas un cône, en utilisant les droites passant par un $\overline{k}$-point singulier on obtient une équivalence birationnelle de $\overline{X}$ avec l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}_{\overline{k}}$, dont le groupe de Brauer est nul. Par l'invariance birationnelle du groupe de Brauer pour les variétés projectives et lisses ceci implique $\mathrm{Br}\, \overline{Y} = 0$.

Remarques

(1) Il serait intéressant de voir si le corollaire vaut pour les hypersurfaces de degré supérieur à 3. C'est le cas lorsque les hypersurfaces sont lisses ([CT]).

(2) La condition que la codimension du lieu singulier est au moins égale à 4 est nécessaire. Par exemple dans [CTSal] on trouve des hypersurfaces cubiques géométriquement intègres non coniques dans $\mathbf{P}^4_k$, avec des points singuliers isolés, qui admettent un modèle projectif et lisse Y avec $\mathrm{Br}\, Y/\mathrm{Br}\, k \neq 0$.

(3) Lorsque k est un corps de nombres, le corollaire permet de conjecturer que sous les hypothèses données, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour le lieu lisse de l'hypersurface cubique X.

Références

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, The Brauer-Manin obstruction for complete intersections of dimension ≥ 3, appendix to [PV].

[CTSal] J.-L. Colliot-Thélène et P. Salberger, Arithmetic on some singular cubic hypersurfaces, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **58** (1989) 519–549.

[CTSan] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles II, Duke Math. J. **54** (1987) 375–492.

[SGA 2] A. Grothendieck, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2). Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1962. Augmenté d'un exposé de Michèle Raynaud. Documents Mathématiques (Paris) **4**. Société Mathématique de France, Paris, 2005.

[PV] B. Poonen et J. F. Voloch, Random Diophantine equations. With appendices by Jean-Louis Colliot-Thélène and Nicholas M. Katz. Progr. Math., **226**, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), 175–184, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S.,
UMR 8628 CNRS-Université
Mathématiques,
Bâtiment 425
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay
France

courriel : jlct at math.u-psud.fr