Algèbre/*Algebra*

Sommes de carrés dans les corps de fonctions

Jean-Louis Colliot-Thélène et Uwe Jannsen

Résumé – Soient k un corps de nombres et K un corps de fonctions sur k, de degré de transcendance d. Nous expliquons pourquoi, lorsque $d \geqq 2$, il est naturel de conjecturer que toute somme de carrés dans K peut s'écrire comme une somme d'au plus 2^{d+1} carrés. Nous établissons cette conjecture pour un corps de fonctions de deux variables, et pour une extension pure de degré de transcendance 1 d'un tel corps. En particulier toute somme de carrés dans le corps des fonctions rationnelles en 3 variables sur un corps de nombres peut s'écrire comme une somme de 16 carrés.

Sums of squares in function fields

Abstract – *Let k be a number field and let* K *be a function field over k, of transcendence degree d. We demonstrate how well-known conjectures imply that any sum of squares in* K *may be written as a sum of at most* 2^{d+1} *squares, provided* $d \geqq 2$. *The present state of the conjectures enables us to prove this universal bound for an arbitrary function field in two variables, and for the rational function field in one variable over such a field. In particular any sum of squares in the rational function field in* 3 *variables over a number field is a sum of at most* 16 *squares.*

1. Notations. – Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k. Étant donné un entier n inversible dans k, on note μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans k_s. Étant donné un entier naturel $j \geqq 1$, on note $\mu_n^{\otimes j}$ le produit tensoriel de μ_n, j fois avec lui-même. Pour tout corps F contenant k, et i et j des entiers naturels, on note $\mathrm{H}^i(\mathrm{F}, \mu_n^{\otimes j})$ le i-ième groupe de cohomologie galoisienne (=étale) de F à valeurs dans $\mu_n^{\otimes j}$. A tout élément a dans le groupe multiplicatif F* de F, on associe la classe de cohomologie $\{a\} \in \mathrm{H}^1(\mathrm{F}, \mu_n)$ via l'isomorphisme de Kummer $\mathrm{F}^*/\mathrm{F}^{*n} \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{F}, \mu_n)$. Pour l un nombre premier différent de la caractéristique de F, on note $\mathrm{H}^i(\mathrm{F}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(j))$ la limite, pour m tendant vers l'infini, des groupes $\mathrm{H}^i(\mathrm{F}, \mu_{l^m}^{\otimes j})$. Nous utiliserons les notations usuelles en théorie des formes quadratiques [8]. En particulier, étant donnés des éléments non nuls $a_1, \ldots, a_n$ dans un corps F de caractéristique différente de 2, on désigne par $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ la forme de Pfister de rang 2^n définie par le produit tensoriel de formes binaires $\langle 1, -a_1 \rangle \otimes \ldots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$. Il est bien connu (Pfister, *voir* [8], X.1.6, X.1.7) qu'une telle forme est totalement hyperbolique si et seulement si elle représente zéro non trivialement, ou encore si et seulement si l'élément a_n de F est représenté par la forme $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle\rangle$.

Lemme 1.1 ([1], [3]). – *Soit* F *un corps de caractéristique différente de 2, et soient* $a_1, \ldots, a_n$ *dans* F*. *Si la forme de Pfister* $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ *est totalement hyperbolique, alors le cup-produit*

$$\{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_n\} \in \mathrm{H}^n(\mathrm{F}, \mu_2^{\otimes n})$$

est nul, où $\{a_i\}$ *désigne la classe de* $a_i \in \mathrm{F}^*/\mathrm{F}^{*2} \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{F}, \mu_2)$.

2. Conjectures. – La première conjecture est due à K. Kato ([7], Conj. 0.4) :

Conjecture 2.1. – *Soient k un corps de nombres, et* X *une variété géométriquement connexe, de dimension d, définie sur k. Soit* $k(\mathrm{X})$ *son corps des fonctions, et pour v place de k, et* k_v *le complété de k en v, soit* $k_v(\mathrm{X})$ *le corps des fonctions de la variété* $\mathrm{X} \times_k k_v$.

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

0764-4442/91/03120759 $ 2.00 © Académie des Sciences

Soit l un nombre premier. Alors, pour tout entier naturel n, l'application diagonale

$$\mathrm{H}^{d+2}(k(\mathrm{X}), \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \to \prod_v \mathrm{H}^{d+2}(k_v(\mathrm{X}), \mu_{l^n}^{\otimes d+1})$$

est injective.

Elle admet la variante :

CONJECTURE 2.2. — *Soient k un corps de nombres, et X une variété géométriquement connexe, de dimension d, définie sur k. Soit $k(\mathrm{X})$ son corps des fonctions, et pour v place de k, et k_v le complété de k en v, soit $k_v(\mathrm{X})$ le corps des fonctions de la variété $\mathrm{X} \times_k k_v$, Soit l un nombre premier. Alors l'application diagonale*

$$\mathrm{H}^{d+2}(k(\mathrm{X}), \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(d+1)) \to \prod_v \mathrm{H}^{d+2}(k_v(\mathrm{X}), \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(d+1))$$

est injective.

La conjecture 2.1 implique la conjecture 2.2; combinée à la conjecture 2.3 ci-après, la conjecture 2.2 implique la conjecture 2.1.

Les conjectures suivantes sont de nature purement algébrique. On les trouve formulées sous diverses formes dans des travaux de Milnor [11], Arason [1], Kato, Merkur'ev et Suslin, Rost, Jacob/Rost [6].

CONJECTURE 2.3. — *Soient F un corps, et l un nombre premier différent de la caractéristique de F. Alors pour tout couple d'entiers naturels n, m, et tout entier naturel d, l'application*

$$\mathrm{H}^{d+2}(\mathrm{F}, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \to \mathrm{H}^{d+2}(\mathrm{F}, \mu_{l^{n+m}}^{\otimes d+1}),$$

induite par l'inclusion $\mu_{l^n}^{\otimes d+1} \to \mu_{l^{n+m}}^{\otimes d+1}$, est injective.

La conjecture 2.3 vaut dès que la conjecture 2.4 vaut :

CONJECTURE 2.4. — *Soient F un corps, l un nombre premier différent de la caractéristique de F, et d un entier naturel. Alors pour tout entier naturel n, l'application de Bass-Tate* [11]

$$\mathrm{K}_{d+1}^{\mathrm{M}} \mathrm{F}/l^n \to \mathrm{H}^{d+1}(\mathrm{F}, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}),$$

qui envoie la K-théorie de Milnor du corps F dans la cohomologie galoisienne de F en associant au symbole $\{a_1, \ldots, a_{d+1}\}$ le cup-produit $\{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_{d+1}\}$ est un isomorphisme.

Pour déduire la conjecture 2.3 de la conjecture 2.4, on considère la suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to \mu_{l^n}^{\otimes d+1} \to \mu_{l^{n+1}}^{\otimes d+1} \to \mu_l^{\otimes d+1} \to 0$$

puis la suite de cohomologie galoisienne associée, et l'on utilise le fait évident que l'application quotient $\mathrm{K}_{d+1}^{\mathrm{M}} \mathrm{F}/l^{n+1} \to \mathrm{K}_{d+1}^{\mathrm{M}} \mathrm{F}/l$ est surjective.

La dernière conjecture [6] postule la réciproque du lemme 1.1 :

CONJECTURE 2.5. — *Soient $d \geqq 0$ un entier, soit F un corps de caractéristique différente de 2, et soient $a_1, \ldots, a_{d+2} \in \mathrm{F}^*$. Si le cup-produit*

$$\{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_{d+2}\} \in \mathrm{H}^{d+2}(\mathrm{F}, \mu_2^{\otimes d+2})$$

est nul, où $\{a_i\}$ désigne la classe de $a_i \in \mathrm{F}^*/\mathrm{F}^{*2} \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{F}, \mu_2)$, alors la forme de Pfister $\langle\langle a_1, \ldots, a_{d+2} \rangle\rangle$ est totalement hyperbolique.

La conjecture 2.5 pour l'entier d est conséquence de la conjecture 2.4 pour l'entier $d+1$ et $l^n = 2$. De fait, Milnor a défini des homomorphismes

$$\mathrm{K}_{d+2}^{\mathrm{M}} \mathrm{F}/2 \to \mathrm{I}^{d+2} \mathrm{F}/\mathrm{I}^{d+3} \mathrm{F},$$

où $\mathrm{I}^n \mathrm{F}$ est la n-ième puissance de l'idéal fondamental IF dans le groupe de Witt WF, et si la classe de la forme $\langle\langle a_1, \ldots, a_{d+2} \rangle\rangle$ appartient à I^{d+3} F, alors cette classe est nulle (Arason-Pfister, [8], X, Cor. 3.4).

3. Le statut de ces conjectures. — Les conjectures 2.1 et 2.2 pour $d=0$ ne sont qu'une réformulation du théorème de Hasse/Brauer/Noether. Pour $d=1$, elles ont été établies par K. Kato [7]; on trouvera une autre approche dans l'article [4]. Lorsque $d=2$, la conjecture 2.2 vient d'être établie par l'un d'entre nous ([4], [5]). La conjecture 2.1 pour $d=2$ et $l=2$ résulte alors de la conjecture 2.3 pour $d=2$ et $l=2$ (*voir* ci-après).

La conjecture 2.4 et la conjecture 2.3 qui en est une conséquence sont des résultats classiques pour $d=0$. Elles ont été établies pour $d=1$ et l premier quelconque par Merkur'ev/Suslin [9], et pour $d=2$ et $l=2$ par Rost (non publié) et Merkur'ev/Suslin [10].

La validité de la conjecture 2.5 est classique pour $d=0$; elle a été établie par Merkur'ev/Suslin [9] lorsque $d=1$ et par Jacob/Rost [6] et Merkur'ev/Suslin [10] lorsque $d=2$.

4. Sommes de carrés

Théorème 4.1. — *Soient k un corps de nombres et* F *un corps de fonctions de degré de transcendance d sur k. Supposons k algébriquement clos dans* F. *Soit Ω l'ensemble des places de k. Pour $v \in \Omega$, notons F_v le corps composé de* F *et du complété k_v de k en v. Supposons que pour les corps de fonctions de degré de transcendance d sur un corps de nombres, les conjectures* 2.1 *pour $l^n=2$ et* 2.5 *soient vérifiées. Alors :*

1. *Si une forme de Pfister $\langle\langle a_1, \ldots, a_{d+2} \rangle\rangle$ sur le corps* F *est totalement hyperbolique sur chacun des corps F_v, elle est totalement hyperbolique sur le corps* F.

2. *Soit $f \in F^*$ une somme de carrés dans* F.

(*a*) *Si $d=0$, f est une somme d'au plus* 4 *carrés.*

(*b*) *Si $d=1$, f est une somme d'au plus* 7 *carrés, et c'est une somme de* 4 *carrés dans* F *si c'est une somme de* 4 *carrés dans chaque corps F_v pour v place dyadique où -1 n'est pas une somme de* 2 *carrés dans k_v.*

(*c*) *Si $d \geqq 2$, f est une somme de 2^{d+1} carrés dans* F.

3. *Pour $d \geqq 1$, et t une variable, toute somme de carrés dans le corps de fonctions d'une variable* F(t) *est une somme d'au plus 2^{d+2} carrés.*

Démonstration. — Pour tout entier naturel i, le module galoisien $\mu_2^{\otimes i}$ est canoniquement isomorphe au module galoisien $\mathbf{Z}/2$. Si la forme $\langle\langle a_1, \ldots, a_{d+2} \rangle\rangle$ à coefficients dans F est totalement hyperbolique sur les corps F_v, le lemme 1.1 implique que le cup-produit

$$\{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_{d+2}\} \in H^{d+2}(F_v, \mathbf{Z}/2)$$

est nul. Ainsi, le cup-produit

$$\{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_{d+2}\} \in H^{d+2}(F, \mathbf{Z}/2)$$

a une image nulle par l'application diagonale. La conjecture 2.1 implique alors que ce cup-produit est nul. Mais alors la conjecture 2.5 dit que la forme de Pfister $\langle\langle a_1, \ldots, a_{d+2} \rangle\rangle$ est totalement hyperbolique sur le corps F.

Soit maintenant f une somme de carrés dans F. Le cas $d=0$ de l'assertion est bien connu (Lagrange, Hilbert, Siegel). Supposons donc $d \geqq 1$. Que f, dans le cas $d=1$, puisse s'écrire comme une somme d'au plus 7 carrés, a été établi dans [2]. Considérons la forme

$$\Phi = \langle 1, -f \rangle \otimes \langle\langle 1, 1 \rangle\rangle^{\otimes d+1}$$

Sur un surcorps L de F, cette forme devient totalement hyperbolique si et seulement si f peut s'écrire comme somme de 2^{d+1} carrés dans L. Si v est une place réelle, c'est un théorème de Pfister [12] que f, somme de carrés dans F_v, peut s'écrire comme une somme d'au plus 2^d carrés dans F_v. *A fortiori* la forme Φ est-elle totalement hyperbolique sur F_v. Si v est une place non archimédienne, et si -1 est une somme de deux carrés dans k_v, ce qui est toujours le cas si v est non-dyadique, la forme $\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle^{\otimes 2}$ est totalement hyperbolique sur k_v, et donc aussi, pour $d \geqq 1$, la forme Φ sur le corps F_v. Si v est dyadique, on peut au moins assurer que -1 est somme de 4 carrés dans k_v, si bien que la forme $\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle^{\otimes 3}$ est totalement hyperbolique sur k_v. La forme Φ est alors totalement hyperbolique sur F_v dès que $d \geqq 2$. Lorsque $d=1$, la forme Φ est totalement hyperbolique si et seulement si f est une somme de 4 carrés dans F_v. La deuxième partie de l'énoncé résulte alors de la première partie.

La troisième partie de l'énoncé, lorsque $d=1$, a déjà été établie dans [2]. Supposons donc $d \geqq 2$. D'après la seconde partie, si -1 est une somme de carrés dans un corps F_1 extension finie de F, alors -1 est une somme d'au plus 2^{d+1} carrés dans ce corps (on considère F_1 comme un corps de fonctions sur la clôture algébrique de k dans F_1). Notre énoncé résulte alors d'un théorème bien connu de Pfister [12].

Compte tenu des résultats rappelés au paragraphe 3, le théorème ci-dessus nous permet d'énoncer sans restriction les corollaires :

COROLLAIRE 4.1. — *Soient k un corps de nombres et* F *un corps de fonctions de degré de transcendance* 1 *sur k. Toute somme de carrés dans* F *peut s'écrire comme une somme d'au plus* 7 *carrés dans* F. *Si $f \in$* F *est somme de carrés dans* F *et peut s'écrire comme une somme de* 4 *carrés dans chaque corps* F_v *pour v place dyadique, alors f est une somme de* 4 *carrés dans* F.

COROLLAIRE 4.2. — *Soit k un corps de nombres et* F *un corps de fonctions de degré de transcendance* 2 *sur k. Toute somme de carrés dans* F *peut s'écrire comme une somme d'au plus* 8 *carrés dans* F.

COROLLAIRE 4.3. — *Soit k un corps de nombres et* F *un corps de fonctions de degré de transcendance* 2 *sur k. Soit t une variable. Toute somme de carrés dans le corps* F(t) *peut s'écrire comme une somme d'au plus* 16 *carrés.*

Note remise le 17 janvier 1991, acceptée le 22 janvier 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Jón Kr. ARASON, Cohomologische Invarianten quadratischer Formen, *J. Algebra*, 30, 1975, p. 448-491.

[2] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, Appendix to a paper of Kazuya Kato, *J. Reine Angew. Mathematik*, 366, 1986, p. 181-183.

[3] R. ELMAN et T.-Y. LAM, Pfister forms and K-theory of fields, *J. Algebra*, 23, 1972, p. 181-213.

[4] U. JANNSEN, Principe de Hasse cohomologique, *Séminaire de théorie des nombres de Paris*, 1989-1990.

[5] U. JANNSEN, Travail en préparation.

[6] B. JACOB et M. ROST, Degree four cohomological invariants for quadratic forms, *Invent. Math.*, 96, 1989, p. 551-570.

[7] K. KATO, A Hasse principle for two dimensional global fields, *J. Reine Angew. Mathematik*, 366, 1986, p. 142-181.

[8] T.-Y. LAM, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin/Cummings, 1973 and 1980.

[9] A. S. MERKUR'EV et A. A. SUSLIN, K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism, *Izvestija Akad. Nauk S.S.S.R.*, 46, 1982 (= *Math. U.S.S.R. Izvestija*, 21, 1983, p. 307-340).

[10] A. S. MERKUR'EV et A. A. SUSLIN, On the norm residue homomorphism of degree three, LOMI preprint E-9-86, Leningrad 1986, *Izvestija Akad. Nauk S.S.S.R.*, 54, 1990, p. 339-356.

[11] J. MILNOR, Algebraic K-theory and quadratic forms, *Invent. Math.*, 9, 1970, p. 318-344.

[12] A. PFISTER, Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten, *Invent. Math.*, 4, 1967, p. 229-237.

J.-L. C.-T. : *Mathématiques*, Bât. n° 425, *Université de Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex*;

U. J. : *Max-Planck-Institut für Mathematik*, *Gottfried-Claren-Str.* 26, *D*-5300 *Bonn* 3, *Allemagne*.