GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques.* Note (*) de MM. **Jean-Louis Colliot-Thélène et Jean-Jacques Sansuc**, transmise par M. Jean-Pierre Serre.

Les torseurs sous les groupes de type multiplicatif semblent être l'instrument adéquat pour effectuer sur les points rationnels de certaines variétés algébriques une opération analogue à la classique *première descente* ([1]) sur les courbes elliptiques. Les résultats annoncés généralisent des résultats de Manin ([2]) et permettent d'étudier les points rationnels des tores.

NOTATIONS. — On note k un corps, $\bar{k}$ une clôture séparable, $\mathfrak{g}$ le groupe de Galois de $\bar{k}/k$. Si X est une k-variété, i. e. un k-schéma algébrique géométriquement intègre, et si K est une extension de k, on note $X_K = X \times_k K$, $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ et Div X le groupe des diviseurs de Cartier de X; on dit que X est K-rationnelle si le corps des fonctions K(X) de X_K est transcendant pur sur K.

Soient $\mathscr{C}_k$ la catégorie des k-groupes algébriques de *type multiplicatif* lisses ([3]) et $\mathscr{D}_\mathfrak{g}$ la catégorie (duale) des $\mathfrak{g}$-modules discrets de type fini dont la torsion est première à la caractéristique de k. Si S est dans $\mathscr{C}_k$, on note $\hat{S}$ son groupe des caractères, qui est dans $\mathscr{D}_\mathfrak{g}$; si M est dans $\mathscr{D}_\mathfrak{g}$, on note D(M) son dual dans $\mathscr{C}_k$. Un élément de $\mathscr{D}_\mathfrak{g}$ qui possède une **Z**-base permutée par $\mathfrak{g}$ est appelé *module de permutation*. Soit $\mathbf{G}_m$ le groupe multiplicatif Spec $\mathbf{Z}[T, T^{-1}]$. Si K/k est une sous-extension finie de $\bar{k}/k$, on désigne par $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ le tore obtenu à partir de $\mathbf{G}_{m,K}$ par restriction des scalaires (à la Weil), par $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ le tore noyau de la norme $N_{K/k} : R_{K/k}\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_{m,k}$ et par $R_{K/k}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m$ le tore conoyau de l'inclusion naturelle de $\mathbf{G}_{m,k}$ dans $R_{K/k}\mathbf{G}_m$.

La cohomologie employée est la cohomologie *étale*. Soit S dans $\mathscr{C}_k$. On sait ([4]) que, si X est un k-schéma, les éléments du groupe $H^1(X, S)$ correspondent bijectivement aux classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes (i. e. torseurs représentables) sur X sous S, classes qu'on appellera par abus de langage *torseurs* sur X sous S.

1. RELATIONS D'ÉQUIVALENCE DÉFINIES PAR DES TORSEURS. — Soient X un k-schéma et S dans $\mathscr{C}_k$. Le caractère fonctoriel contravariant de $H^1(\cdot, S)$ sur la catégorie des k-schémas définit un accouplement naturel, additif à droite,

$$\theta_S : \quad X(k) \times H^1(X, S) \to H^1(k, S).$$

Tout élément $\mathscr{T}$ de $H^1(X, S)$ définit ainsi une relation d'équivalence sur $X(k)$.

PROPOSITION 1. — *Si* X *est un k-schéma propre, la relation d'équivalence définie sur* $X(k)$ *par le torseur* $\mathscr{T}$ *est moins fine que la* R*-équivalence* ([5]). *Si k est de type fini sur le corps premier, l'ensemble de ses classes est fini.*

LEMME. — *Soit* X *une k-variété complète possédant un point rationnel. La suite naturelle*

$$0 \to H^1(k, S) \to H^1(X, S) \to \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(\hat{S}, \operatorname{Pic} \bar{X}) \to 0$$

est exacte, fonctorielle en S, *et tout point rationnel en définit un scindage.*

Lorsque Pic $\overline{X}$ est dans $\mathscr{D}_g$ (ce qui est le cas si X est lisse et $\bar{k}$-rationnelle), on peut donc considérer, pour tout point rationnel P, le torseur $\mathscr{X}^P$ sur X sous $S_0 = D(\mathrm{Pic}\,\overline{X})$, de fibre triviale en P, associé à l'identité de $\mathrm{Hom}_g(\mathrm{Pic}\,\overline{X}, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$. On l'appelle le *torseur universel* lié à P : si $\mathscr{T}$ est un élément de $H^1(X, S)$ de fibre triviale en P (pour S dans $\mathscr{C}_k$), il existe un k-homomorphisme unique $S_0 \to S$ tel que $\mathscr{T}$ soit l'image de $\mathscr{X}^P$ par le morphisme induit $H^1(X, S_0) \to H^1(X, S)$.

THÉORÈME 1. — *Soient* X *une k-variété complète telle que* Pic $\overline{X}$ *soit dans* $\mathscr{D}_g$ *et* P *un point rationnel. La relation d'équivalence définie sur* X(*k*) *par le torseur universel* $\mathscr{X}^P$ *est moins fine que la* R-*équivalence et plus fine que toute relation définie par un autre torseur sous un élément de* $\mathscr{C}_k$. *Si k est de type fini sur le corps premier, l'ensemble de ses classes est fini.*

2. MODE DE CALCUL DE CES ÉQUIVALENCES. — Soient S dans $\mathscr{C}_k$ et X une k-variété *complète.* L'équivalence définie sur X(k) par l'ensemble des torseurs sous S est rendue explicite, dans certains cas, par la considération des groupes

$$D^S(X) = \ker[\mathrm{Ext}^1_g(\hat{S}, \bar{k}(X)^*) \to \mathrm{Ext}^1_g(\hat{S}, \mathrm{Div}\,\overline{X})],$$

$$E^S(X) = \ker[\mathrm{Ext}^1_g(\hat{S}, \bar{k}(X)^*/\bar{k}^*) \to \mathrm{Ext}^1_g(\hat{S}, \mathrm{Div}\,\overline{X})].$$

On peut également considérer, pour K/k galoisienne finie de groupe G déployant S, les groupes $D^S(X, K)$ et $E^S(X, K)$ définis de façon analogue, par substitution de K à $\bar{k}$, G à g et X_K à $\overline{X}$: on trouve $D^S(X, K) = D^S(X)$; si $X(K) \neq \emptyset$, on a aussi $E^S(X, K) = E^S(X)$. Lorsque X possède un point rationnel lisse, ces deux groupes sont liés par la suite exacte

$$0 \to H^1(k, S) \to D^S(X) \to E^S(X) \to 0$$

et tout point rationnel lisse définit un scindage de cette suite.

PROPOSITION 2. — *Il existe un épimorphisme naturel* $\lambda : H^1(X, S) \to D^S(X)$. *Si* X *est lisse sur k, l'accouplement* θ_S *est trivial sur le noyau de* λ. *Si k est de type fini sur le corps premier, ou si* Pic $\overline{X}$ *est de type fini, le groupe* $E^S(X)$ *est fini.*

Dans les exemples ci-dessous, on suppose X lisse sur k et $X(k) \neq \emptyset$.

Exemples. — (*a*) Soit K/k galoisienne finie de groupe G. Considérons $S = R_{K/k}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m$. On trouve pour $D^S(X)$ le groupe

$$\mathrm{Br}(X, K) = \ker[H^2(G, K(X)^*) \to H^2(G, \mathrm{Div}\,X_K)]$$

considéré par Manin ([6]) et $E^S(X) = H^1(G, \mathrm{Pic}\,X_K)$. L'accouplement θ_S est à valeurs dans $H^2(G, K^*)$. L'équivalence qu'il définit est la Br(X, K)-équivalence ([6]); l'équivalence définie par l'ensemble des θ_S relatifs aux diverses sous-extensions galoisiennes finies K/k de $\bar{k}/k$ est la Br(X, $\bar{k}$)-équivalence ([6]).

(*b*) Soit K/k une sous-extension finie de $\bar{k}/k$. Considérons $S = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$. On trouve pour $D^S(X)$ le groupe des k-fonctions rationnelles dont les diviseurs sont des normes (de K-diviseurs) modulo celles qui sont des normes (de K-fonctions rationnelles) et, si K/k est galoisienne de groupe G, $E^S(X) = H^{-1}(G, \mathrm{Pic}\,X_K)$. L'accouplement est à valeurs dans $k^*/N(K^*)$. On retrouve la théorie développée en ([7]).

(*c*) La *première descente* sur les courbes elliptiques, appelée aussi *méthode des factorisations* [1], correspond au cas où S est un groupe fini, noyau d'une isogénie de courbes elliptiques : si l'on considère par exemple la multiplication par un entier n tel que tous les points d'ordre n soient rationnels, alors $S = \mu_n \times \mu_n$ et l'accouplement est à valeurs dans $(k^*/k^{*n}) \times (k^*/k^{*n})$. Le résultat de finitude de la proposition 1 apparaît ainsi comme un prolongement de la partie faible du théorème de Mordell-Weil (étendu par Néron au cas d'un corps de type fini). La méthode employée n'est d'ailleurs qu'un avatar de la méthode des factorisations : elle répond à certaines questions posées par Swinnerton-Dyer lors de l'étude de cas particuliers.

3. Invariants birationnels.

Proposition 3. — *En caractéristique* 0, *l'ensemble* $X(k)/R$ *est un invariant k-birationnel des k-variétés complètes lisses.*

Proposition 4. — *Soit* S *dans* $\mathscr{C}_k$. *Le groupe* $E^S(X)$ *est un invariant k-birationnel des k-variétés complètes lisses.*

[L'invariant particulier correspondant au tore S de l'exemple (*a*) du paragraphe 2 a été considéré dans des situations variées par Manin, Voskresenskiĭ et Miwa.]

Proposition 5. — *Soit* X *une k-variété complète et lisse, possédant un point rationnel et telle que* $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ *soit dans* $\mathscr{D}_{\mathfrak{g}}$. *Considérons les propriétés :*

(i) X *est k-rationnelle;*

(ii) *il existe un module de permutation* M *tel que* $\mathrm{Pic}\,\overline{X} \oplus M$ *soit de permutation;*

(iii) *le module* $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ *est facteur direct d'un module de permutation;*

(iv) *la flèche naturelle* $\mathrm{Div}\,\overline{X} \to \mathrm{Pic}\,\overline{X}$ *a une* $\mathfrak{g}$*-section;*

(v) $E^S(X) = 0$ *quel que soit* S *dans* $\mathscr{C}_k$*;*

(vi) $E^{S_0}(X) = 0$.

Elles sont liées par les implications

$$\text{(i)} \overset{(8)}{\Rightarrow} \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iv)} \Leftrightarrow \text{(v)} \Leftrightarrow \text{(vi)}.$$

4. Points rationnels des tores. — Soient k un corps de caractéristique 0 et T un tore sur k. On sait qu'il existe une k-compactification lisse $T \to X$, i. e. une k-immersion ouverte de T dans une k-variété complète et lisse X. Comme T est $\bar{k}$-rationnelle, on peut considérer le k-tore S_0 dual de $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ et le torseur universel $\mathscr{X}^0$ lié à l'élément neutre 0 de $T(k)$: c'est un torseur sur X sous S_0.

Proposition 6. — *Le torseur* $\mathscr{X}^0$ *a pour restriction à l'ouvert* T *le torseur sur* T *déduit par dualité de la suite exacte naturelle de* $\mathfrak{g}$*-modules*

$$0 \to \hat{T} \to M \to \mathrm{Pic}\,\overline{X} \to 0,$$

où M *désigne le* $\mathfrak{g}$*-module de permutation des diviseurs de* $\overline{X}$ *à support hors de* $\overline{T}$ [9].

On en déduit, par application des résultats du paragraphe 1, la valeur de $T(k)/R$:

Théorème 2. — *Le torseur* $\mathscr{X}^0$ *définit un isomorphisme*

$$T(k)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k, S_0).$$

L'application naturelle $T(k)/R \to X(k)/R$ *est une bijection. Si k est de type fini sur* **Q**, *alors* $T(k)/R$ *est fini.*

Nous montrons par ailleurs ([10]) que la R-équivalence sur un tore peut s'étudier (en toute caractéristique) sans recours à une k-compactification lisse, ce qui donne la finitude de $T(k)/R$ pour un corps k de type fini sur le corps premier et permet, en caractéristique 0, de calculer effectivement (par voie purement algébrique) le $\mathfrak{g}$-module Pic $\overline{X}$, à l'addition près d'un module de permutation. Par application au tore $T = R^1_{K/\mathbf{Q}} \mathbf{G}_m$, on trouve ainsi, parmi les **Q**-variétés projectives, lisses et $\overline{\mathbf{Q}}$-rationnelles, des exemples :

(i) de variété X non **Q**-rationnelle, pour laquelle la R-équivalence est triviale sur X(L) pour toute extension L/**Q**;

(ii) de variété X pour laquelle l'équivalence de Brauer ([11]) est triviale sur X(L) pour toute extension finie L/**Q** avec néanmoins $X(\mathbf{Q})/R \neq \{1\}$.

5. Remarque. — La proposition 6 montre que les torseurs universels liés aux points rationnels des tores sont des variétés k-rationnelles : c'est ce qui a permis de déterminer la R-équivalence dans ce cas. De même, le calcul de Châtelet ([12]) permet de trouver, sur une désingularisée de la surface cubique qu'il considère, des torseurs universels qui sont des variétés k-rationnelles. On peut ainsi se poser la question suivante : *les torseurs universels liés aux points rationnels d'une k-variété* X, *complète, lisse et* $\overline{k}$*-rationnelle, sont-ils k-rationnels*? Une réponse affirmative pour une certaine classe de telles variétés a, comme on le voit aisément, de multiples conséquences pour l'arithmétique de ces variétés.

(*) Séance du 15 mars 1976.

(1) J. W. S. Cassels, *J. London Math. Soc.*, 41, 1966, p. 193-291, § 4, 23, 24.

(2) Yu. I. Manin, *Cubic forms*, Nauka, Moscou, chap. VI, 1972 (trad. ang. North-Holland, Amsterdam, 1974).

(3) *Cf.* A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, chap. III, § 8, 1969, Benjamin, New York, (les groupes en question y sont appelés *diagonalisables*).

(4) *Cf.* M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes* (*Lecture Notes in Math.*, 119, Springer, 1970, lemme XIV 1.4).

(5) Pour la définition de la R-équivalence, *voir* Yu. I. Manin, *op. cit.*, chap. II, § 4 (trad. § 14).

(6) *Cf.* Yu. I. Manin, *op. cit.*, chap. VI, 1.9 (trad. 41.9).

(7) J.-L. Colliot-Thélène, *Les fonctions dont les diviseurs sont des normes* (non publié).

(8) *Cf.* en caractéristique 0, V. E. Voskresenskiĭ, *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R. Ser. Mat.*, 34, 1970, p. 3-19 (trad. ang. *Math. U.S.S.R. Izv.*, 4, 1970, p. 1-17).

(9) Cette suite est utilisée par V. E. Voskresenskiĭ, *op. cit.*, pour l'étude des problèmes birationnels sur les tores.

(10) J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La* R-*équivalence sur les tores* (à paraître).

(11) Yu. I. Manin, *Mat. Sb.*, 79, (121), § 7, 1969, p. 155-170 (trad. ang. *Math. U.S.S.R. Sb.*, 8, 1969, p. 147-160).

(12) F. Châtelet, *Enseignement Math.*, 5, 1959, p. 153-170.

J.-L. C.-T. :
81, *avenue du Général-Leclerc*,
75014 *Paris;*

J.-J. S. :
45, *rue d'Ulm*,
75230 *Paris Cedex* 05.