S2 PeiP Orsay 2015-2016
Mathématiques

# Contrôle de rattrapage du 27 juin 2016

Durée 1 heure 30

*La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie.* ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Barème indicatif : $5+3+7+5$.

**Exercice 1 -** Représenter les domaines suivants et calculer les intégrales associées :

**1.** $I_1 = \iint_{D_1} e^y dxdy$ avec $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.

**2.** $I_2 = \iint_{D_2} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ avec $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

**3.** $I_3 = \iiint_{D_3} z\, dxdydz$ avec $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

**Exercice 2 - 1.** Donner la dimension et une base de

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0 = x+2y+3z\}.$$

**2.** Déterminer un supplémentaire $F$ de $E$ dans $\mathbb{R}^3$ (en donner une base).

**Exercice 3 -** Pour $a$ réel fixé, on considère l'unique application linéaire $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f_a(1,0,0) = (1,-1,1)\,,\ f_a(0,1,0) = (1,1,-1) \text{ et } f_a(0,0,1) = (3,1,a)\,.$$

**1.** Déterminer la matrice $M_a$ de $f_a$ dans la base canonique. Calculer $f_a(1,2,-1)$.

**2.** Déterminer le rang de $f_a$ et une base de $\operatorname{Im} f_a$ en fonction de $a$. Pour quelles valeurs de $a$ l'application $f_a$ est-elle surjective ?

**3.** Pour quelles valeurs de $a$ l'application $f_a$ est-elle injective ? Donner une base de $\ker f_a$ lorsque $\ker f_a$ n'est pas nul.

**Exercice 4 -** Dans $\mathbb{R}^3$, on note $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique. On considère les vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (1,-1,0)\ ,\overrightarrow{v_2} = (0,1,-1)\ ,\overrightarrow{v_3} = (1,-1,1)\,.$$

**1.** Montrer que la famille $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**2.** Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ dans la base $B'$.

Soit $f$ l'application linéaire telle que $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$, $f(\overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{0}$.

**3.** Quelle est la matrice de $A'$ de $f$ dans la base $B'$ ? Quelle est l'interprétation géométrique de $f$ ?

**Réponses au verso.**

## Réponses succintes

**Exercice 1 - 1.** $D_1$ est un triangle. On trouve par Fubini $I_1 = \int_{x=0}^{1}\big(\int_{y=x}^{1} e^y dy\big)dx = 1$.

**2.** $D_2$ est une demi-couronne entre les cercles de rayon 1 et 2. On trouve en coordonnées polaires $I_2 = \int_{r=1}^{2}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r\cos\theta}{r} r dr d\theta = \big[\sin\theta\big]_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^2 r dr = 3$.

**3.** La tranche de hauteur $z \in [0,1]$ de $D_3$ est le triangle $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$. On a par Fubini en pile sur ce cylindre, $I_3 = \big(\int_0^1 z dz\big)\big(\iint_T dxdy\big) = \frac{1}{2}\mathrm{Aire}(T) = \frac{1}{4}$.

**Exercice 2 - 1.** On trouve que $\overrightarrow{v} = (x,y,z) \in E$ ssi $\overrightarrow{v} = z(1,-2,1)$. $E$ est donc la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (1,-2,1)$.

**2.** Tout plan $P$ de $\mathbb{R}^3$ ne contenant pas $\overrightarrow{v_1}$ est un supplémentaire de $E$. La plan $z = 0$ engendré par $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ convient par exemple.

**Exercice 3 -**

**1.** On a $M_a = \mathrm{Mat}(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, d'où $M_a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-a \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $f(1,2,-1) = (0,0,-1-a)$.

**2.** On a $\mathrm{rang}\, f_a = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & a-3 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$.
D'où $\mathrm{rang}\, f_a = 3$ (et $f_a$ surjective) si $a \neq -1$ et $\mathrm{rang}\, f_{-1} = 2$ (et $f_{-1}$ non surjective).

Si $a \neq -1$, les colonnes de $M_a$ forment une base de $\mathrm{Im}\, f_a = \mathbb{R}^3$, ou toute base de $\mathbb{R}^3$ puisque $f_a$ est surjective. Si $a = -1$, les deux premières colonnes de $M_{-1}$ forment une base de $\mathrm{Im}\, f_{-1}$.

**3.** D'après le théorème du rang, on a $\dim\ker f_a = 3 - \mathrm{rang}\, f_a = 0$ si $a \neq -1$ et $= 1$ pour $a = -1$. On a donc $\ker f_a = \{\overrightarrow{0}\}$ et $f_a$ injective si $a \neq -1$. Pour $a = -1$, on calcule que $\ker f_{-1}$ est la droite engendrée par $(1,2,-1)$ (se voit aussi directement avec 1).

**Exercice 4 - 1.** et **2.** On peut montrer que la famille $B'$ de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base en vérifiant qu'elle est libre.

On peut aussi directement résoudre le système $(S)$ : $x'\overrightarrow{v_1} + y'\overrightarrow{v_2} + z'\overrightarrow{v_3} = (x,y,z)$, avec $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ donné. Il faut que $(S)$ possède une unique solution. On trouve que

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x' + z' = x \\ -x' + y' - z' = y \\ -y' + z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + y \\ z' = x + y + z \end{cases}.$$

Les nombres $x'$, $y'$, $z'$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ dans $B'$.

**3.** On a par définition $A' = \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $f$ est la projection sur la droite engendrée par $\overrightarrow{v_1}$ suivant le plan engendré par $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$.