

Contrôle n°1 du 4 février 2016

DURÉE 1 HEURE 30 MIN

Les documents, calculatrices, montres connectées et téléphones portables sont interdits. La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 - Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2 - 1, y + x \leq 1\}$.

Représenter D et calculer son aire.

Exercice 2 - Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \iint_{D_1} xy \, dx dy$ avec $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}$,

2. $I_2 = \iint_{D_2} y \, dx dy$ avec $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -y \leq x \leq y\}$,

3. $I_3 = \iiint_{D_3} e^{ax+by+cz} \, dx dy dz$ avec $D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x, y, z \in [0, 1]\}$, et a, b, c des réels donnés non nuls.

Exercice 3 - 1. Calculer $I = \iint_{D_1} (x^2 + y^2) \, dx dy$ avec $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \in [-1, 1]\}$.

2. Calculer $J = \iint_{D_2} (x^2 + y^2) \, dx dy$ avec $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. En déduire $K = \iint_{D_3} (x^2 + y^2) \, dx dy$ avec $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \in [-1, 1], x^2 + y^2 \geq 1\}$.

Exercice 4 - Représenter le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2, x \geq y^2\}$. Que vaut

$$I = \iint_D (x - y)^{2015} \, dx dy ? \quad (\text{Justifier!})$$

Exercice 5 - Représenter et calculer le volume du domaine

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq z \leq 1\}.$$