S2 PeiP
MATHÉMATIQUES

ORSAY 2014-2015

Corrigé du contrôle n°3 du 31 mars 2015

Exercice 1 - 1. On échelonne les lignes de A. On a

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 3\\ 0 & -1 & -4\\ 0 & -2 & -8\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 3\\ 0 & \boxed{-1} & -4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2\,.$$

On a donc $\operatorname{rang} f = 2$ et une base du plan $\operatorname{Im} f$ est constituée des deux premières colonnes de A (indices des pivots) : $\overrightarrow{v_1} = (1,2,3)$ et $\overrightarrow{v_2} = (2,3,4)$.

L'application f n'est pas surjective car $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$.

2. D'après le théorème du rang, on a $\dim\ker f = \dim\mathbb{R}^3 - \operatorname{rang} f = 1$. On a $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+2y+3z=0\\ 2x+3y+2z=0\\ 3x+4y+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+2y+3z=0\\ -y-4z=0\\ -4y-8z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+2y+3z=0\\ \boxed{y}+4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-3z=5z\\ y=-4z\ ,\ z \text{ qq.}\end{cases}$$

Une base de la droite $\ker f$ est donc $\overrightarrow{v_3} = (5,-4,1)$. L'application f n'est pas injective car $\ker f \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

3. On a $\overrightarrow{v} = (x,y,z) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$ ssi $\overrightarrow{v}$ s'écrit $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2=x\\ 2\lambda_1+3\lambda_2=y\\ 3\lambda_1+4\lambda_2=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1}+2\lambda_2=x\\ -\lambda_2=y-2x\\ -2\lambda_2=z-3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1}+2\lambda_2=x\\ \boxed{-\lambda_2}=y-2x\\ 0=z-3x-2(y-2x)=x-2y+z\end{cases}$$

Une équation cartésienne du plan $\operatorname{Im} f$ est donc $x-2y+z=0$.

4. L'équation $f(x,y,z) = (1,2,a)$ possède au moins une solution ssi $(1,2,a) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow 1-4+a=0$ c'est-à-dire $a=3$.

Si $a=3$, on a $f(1,0,0) = (1,2,3)$ (première colonne de A), et donc d'après 2, la solution générale est la droite affine $(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda\overrightarrow{v_3} = (1+5\lambda, -4\lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 - 1. La matrice $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ satisfait $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u_1} = (2,1))$, comme toute matrice non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ dont les deux colonnes sont proportionelles à $\overrightarrow{u_1}$.

2. Si $\ker B = \operatorname{Im} B = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1} = (1,0))$, alors $B(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0}$ est la première colonne de B. Ainsi $B(\overrightarrow{e_2})$ engendre $\operatorname{Im} B$, et est donc de la forme $\lambda\overrightarrow{e_1}$ avec $\lambda \neq 0$.

On a alors $B = \begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. On obtient $B^2 = 0$ par calcul, ou en remarquant que $\operatorname{Im} B^2 = B(\operatorname{Im} B) = B(\ker B) = \{\overrightarrow{0}\}$.

3. On a $\overrightarrow{v} = (x,y,z) \in P \Leftrightarrow x = -y-z \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = y(-1,1,0) + z(-1,0,1) = y\overrightarrow{v_1} + z\overrightarrow{v_2}$.

Une matrice $C \in M_3(\mathbb{R})$ satisfait $\operatorname{Im} C = P$ ssi ces colonnes engendrent P. On peut donc prendre

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou toute matrice de rang 2 dont la somme des lignes fait $(0,0,0)$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim \ker C = 3 - \operatorname{rang} C = 1 \neq 0$, et donc $f : X \mapsto CX$ n'est pas injective.

Exercice 3 - 1. On met l'image de la base canonique *en colonnes*, d'où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On a

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} \quad + z = x' \\ -x + y - z = y' \\ -y + z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} \quad + z = x' \\ \boxed{y} \quad = x' + y' \\ -y + z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - z = -y' - z' \\ y = x' + y' \\ z = x' + y' + z' \end{cases}$$

Comme le système a une solution unique, A est inversible et $X = A^{-1}X'$ avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 - 1. On obtient que

$$f(x,y,z) = (x,y,z) - 2(x-y+z)(1,1,1) = (-x+2y-2z, -2x+3y-2z, -2x+2y-z)$$

est bien une expression linéaire des coordonnées, associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Comme $\ell(\overrightarrow{u}) = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$, on a $\overrightarrow{u} \notin P = \ker \ell$. On a donc $P \cap D = \{\overrightarrow{0}\}$ avec $\dim P + \dim D = 3$, d'où $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

Si $\overrightarrow{v} \in P = \ker l$, alors $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\ell(\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

Si $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} \in D$, alors $f(\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) = \lambda(\overrightarrow{u} - 2\ell(\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}) = \lambda(\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{v}$.

3. Comme $E = P \oplus D$, on peut prendre une base $B' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ de $\mathbb{R}^3$ avec $(\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$ base de P et $\overrightarrow{e_3}' = \overrightarrow{u}$ base de D. D'après 2, on a

$$f(\overrightarrow{e_1}') = \overrightarrow{e_1}', \quad f(\overrightarrow{e_2}') = \overrightarrow{e_2}' \quad \text{et} \quad f(\overrightarrow{e_3}') = -\overrightarrow{e_3}'.$$

On a donc $A' = \operatorname{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

4. On a $(A')^2 = I_3$ où I_3 est la matrice identité. On a donc $\operatorname{Mat}_{B'}(f^2) = \operatorname{Mat}_{B'}(\operatorname{Id})$ d'où $f \circ f = \operatorname{Id}$. En particulier $f(x) = y \Rightarrow f(f(x)) = x = f(y)$, et réciproquement.

f est donc inversible avec $f^{-1} = f$. On a en déduit que $A = \operatorname{Mat}_B(f)$ est inversible et que $A^{-1} = \operatorname{Mat}_B(f^{-1}) = \operatorname{Mat}_B(f) = A$.