S2 PeiP — Orsay 2014-2015
Mathématiques

Contrôle n°4 du 15 mai 2015

Durée 1 heure 30

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Barème indicatif : $3+6+7+4$.

Exercice 1 - Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{v_2}=(0,1,2)$ et $\overrightarrow{v_3}=(1,1,2)$.

1. Montrer que la famille $B'=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Donner la matrice de passage P de la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ à B'. Est-elle inversible ?

3. Déterminer les coordonnées (x',y',z') de $\overrightarrow{v}=(x,y,z)$ dans la base B'.

Exercice 2 - Soit $\ell:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $\ell(x,y,z)=x-y-z$.

1. Donner la dimension et une base de $E=\ker\ell$.

2. Soit D la droite engendrée par $\overrightarrow{v_1}=(1,1,1)$. A-t-on $\mathbb{R}^3=E\oplus D$? (Justifier !)

3. Soit $\overrightarrow{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Montrer que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\ell(\overrightarrow{v})\overrightarrow{v_1}\in E$.

4. En déduire un calcul de la matrice P de la projection sur E le long de D dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice P est-elle inversible ?

5. Donner la matrice Q de la projection sur D le long de E dans la base canonique.

Exercice 3 - Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée à la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ non nuls tels que $f(\overrightarrow{v_1})=\overrightarrow{v_1}$ et $f(\overrightarrow{v_2})=2\overrightarrow{v_2}$.

2. Montrer que $B'=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice A' de f dans cette base.

3. Calculer les puissances $(A')^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

4. Donner la relation liant A', A et la matrice de passage P de la base canonique à B'. En déduire une relation entre $(A')^n$ et A^n.

5. Calculer A^n à l'aide de cette relation.

Exercice 4 - On s'intéresse à la population $X_n=(J_n,A_n)$ d'une espèce vivante avec, l'année n, J_n jeunes (de moins d'un an) et A_n adultes (d'un an ou plus). D'une année à l'autre :
— la moitié des jeunes survivent et deviennent adultes,
— une proportion s ($s\in[0,1]$) des adultes restent en vie,
— les adultes ont un taux de reproduction r (en moyenne, chaque adulte engendre r jeunes).

1. Montrer, qu'écrit en colonne, X_n satisfait une relation de récurrence du type $X_{n+1}=MX_n$ pour une matrice M fixe.

2. Montrer qu'il existe une population stationnaire (positive, non nulle) si et seulement si $s+\frac{r}{2}=1$.

3. Montrer que si $s+\frac{r}{2}>1$, alors on peut faire un élevage productif de cette espèce (produire N adultes par an à partir d'une population stationnaire bien choisie).