S2 PeiP — Orsay 2013-2014
Mathématiques

Contrôle de rattrapage du 17 juin 2014

Durée 1 heure 30

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Exercice 1 -

1. Calculer $I_1 = \iint_{D_1} (x^2+y^2)dxdy$ avec $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x,y \in [0,1]\}$.

2. Calculer $I_2 = \iint_{D_2} (x^2+y^2)dxdy$ avec $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x,y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

3. En déduire $I_3 = \iint_{D_3} (x^2+y^2)dxdy$ avec $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x,y \in [0,1],\ x^2+y^2 \geq 1\}$.

Exercice 2 -

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = e^{-x}$.

Exercice 3 -

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous espace vectoriel

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z = x-y-2z+t = 0\}.$$

1. Déterminer le dimension de E et en donner une base B.

2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{v} = (2,1,1,1) \in E$ dans votre base B.

3. Soit P l'espace engendré par $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)$. Les espaces P et E sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$? Sinon, donner un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 -

Soit $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(\overrightarrow{e_1}) = (1,1,-1)\ ,\quad f(\overrightarrow{e_2}) = (1,-5,2)\ ,\quad f(\overrightarrow{e_3}) = (2,-4,1).$$

1. Donner la matrice A de f dans la base B. Calculer $f(x,y,z)$.

2. Déterminer le noyau de f et en donner une base si $\ker f \neq \{\overrightarrow{0}\}$. L'application f est-elle injective ?

3. Déterminer le rang de f et donner une base de l'image de f. L'application f est-elle surjective ?

4. Les espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires ?

Réponses au verso.

Réponses succintes

Exercice 1 - 1. D_1 est un carré. On trouve par Fubini $I_1 = \dfrac{2}{3}$.

2. D_2 est un 1/4 de disque. En passant en coordonnées polaires, on obtient $I_2 = \dfrac{\pi}{8}$

3. D_1 se découpe en $D_2 \cup D_3$. On a alors $I_1 = I_2 + I_3$, d'où $I_3 = I_1 - I_2 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 2 - On trouve que $y = \dfrac{e^{-x}}{2} + C_1 \cos x + C_2 \sin x$ avec C_1, C_2 réels quelconques.

Exercice 3 - 1. On a $\overrightarrow{v} = (x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - y - z & = 0 \\ -\boxed{z} + t & = 0 \end{cases}$. On a $\dim E = 2$ car le système a deux inconnues non principales y et t. Une base de E est (par exemple)

$$B = (\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0, 0), \overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1, 1)).$$

2. On a $\overrightarrow{v} = (2, 1, 1, 1) = 1.(1, 1, 0, 0) + 1.(1, 0, 1, 1) = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, donc $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(1, 1)_B$.

3. On a par exemple $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0, 0) \in E \cap P$ et donc E et P ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

D'après le cours et 1, $F = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z, t) \mid y = t = 0\} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3})$ est un supplémentaire de E. Tout plan F tel que $F \cap E = \{\overrightarrow{0}\}$ convient.

Exercice 4 - 1. On a $A = \mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$f(x, y, z) = xf(\overrightarrow{e_1}) + yf(\overrightarrow{e_2}) + zf(\overrightarrow{e_3}) = (x + y + 2z, x - 5y - 4z, -x + 2y + z,).$$

2. On trouve $f(x, y, z) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = (x, y, z) = z(-1, -1, 1)$ avec z quelconque. On a donc $\ker f$ droite engendrée par $\overrightarrow{v_1} = (-1, -1, 1)$.

Comme $\ker f \neq \{\overrightarrow{0}\}$, f est n'est pas injective.

3. Par le théorème du rang, on a $\mathrm{rang}(f) = 3 - \dim \ker f = 2$. Alors $\mathrm{Im}\, f$ est le plan engendré par les deux vecteurs libres $f(\overrightarrow{e_1}) = (1, 1, -1)$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = (1, -5, 2)$.

Comme $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^3$, f n'est pas surjective.

4. On a $f(\overrightarrow{e_1}) = (1, 1, -1) \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$. Les deux espaces $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont donc pas supplémentaires.