S2 PeiP — Orsay 2013-2014
Mathématiques

Corrigé du contrôle n°3 du 8 avril 2014

Exercice 1 - 1. E est défini par une équation avec trois inconnues non principales y, z, t. On a donc $\dim E = 3$, et une base associée est

$$B_E = (\overrightarrow{u_1} = (-1,1,0,0), \overrightarrow{u_2} = (0,0,1,0), \overrightarrow{u_3} = (-1,0,0,1)).$$

F est défini par un système échelonné à deux inconnues non principales z, t. On a donc $\dim F = 2$, et une base de F correspondant à $(z,t) = (1,0)$ ou $(0,1)$, c'est à dire

$$B_F = (\overrightarrow{v_1} = (0,-1,1,0), \overrightarrow{v_2} = (2,0,0,1)).$$

2. On a $\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in E \cap F$ ssi il satisfait les équations de E et $F \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{r} \boxed{x} + y + t = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 2t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{x} + y + t = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - 3t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{x} + y + t = 0 \\ \boxed{y} + z = 0 \\ \boxed{z} - 3t = 0 \end{array}\right. .$$

Il reste une inconnue non principale, t, et donc $E \cap F$ est une droite (de base $(2,-3,3,1)$).

3. D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Les espaces E et F ne sont pas supplémentaires car $\dim E + \dim F = 5 \neq \dim \mathbb{R}^4 = 4$.

4. Pour trouver une base $\mathbb{R}^4$, on peut compléter la base B_E de E, donnée dans 1, par un vecteur $\overrightarrow{v}$ de F qui n'appartient pas à E, par exemple $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} = (0,-1,1,0)$.

Exercice 2 - 1. On a

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a-2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}.$$

D'où $\operatorname{rang} A = 3$ si $a \neq 3$ et $\operatorname{rang} A = 2$ si $a = 3$.

Si $a \neq 3$, on $\dim \operatorname{Im} f = 3 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, et toute base de $\mathbb{R}^3$ convient (par exemple les colonnes de A). Si $a = 3$, Les deux premières colonnes de A : $(1,-1,2)$ et $(0,1,-1)$, forment une base de $\operatorname{Im} f$.

f est surjective ssi $\operatorname{rang} A = 3 \Leftrightarrow a \neq 3$.

2. On a par le théorème du rang $\dim \ker f = 3 - \operatorname{rang} f$, et donc

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow \ker f = \{\overrightarrow{0}\} \Leftrightarrow \operatorname{rang} f = 3 \Leftrightarrow a \neq 3\,.$$

Pour $a = 3$, on a $\overrightarrow{v} = (x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \boxed{x} + z = 0 \\ \boxed{y} - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right.$$

Le noyau de f est donc la droite engendrée par $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 1)$.

3. La matrice A est inversible lorsque f est un isomorphisme c'est-à-dire $a \neq 3$.

4. Si $a \neq 3$, l'équation $AX = AX_0$ possède l'unique solution $X = X_0$ car A est inversible.

Si $a = 3$, on a $AX = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in \ker A \Leftrightarrow X = X_0 + \lambda(-1, 1, 1)$, c'est-à-dire

$$x = x_0 - \lambda, \; y = y_0 + \lambda \text{ et } z = z_0 + \lambda, \quad \lambda \text{ quelconque.}$$

Exercice 3 - 1. Les colonnes de A sont toutes colinéaires à $C = (1, 2, -1)$. On a donc A de rang 1, et C est une base de l'image de A.

2. On a $V \in \operatorname{Im} A$ si $V = \lambda C$. Comme $AC = 0$, on a aussi $AV = \lambda AC = 0$ et donc $V \in \ker A$. On a bien $\operatorname{Im} A \subset \ker A$.

3. Pour $\overrightarrow{v}$ quelconque, on a $(f \circ f)(\overrightarrow{v}) = f(f(\overrightarrow{v})) = \overrightarrow{0}$ car $f(\overrightarrow{v}) \in \operatorname{Im} f \subset \ker f$. Ceci montre que $f \circ f = 0$. (Cela peut aussi se voir en calculant A^2.)

Exercice 4 - 1. Les deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ forment une base B de $\mathbb{R}^2$ car ils ne sont pas colinéaires. On a $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} = (x, y) \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y - x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2x - y \\ \lambda_2 = y - x \end{array} \right.$$

et en particulier $\overrightarrow{e_1} = 2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.

2. Par définition, les colonnes de $M = \operatorname{Mat}_B(s)$ sont les coordonnées **dans B** de $s(\overrightarrow{v_1})$ et $s(\overrightarrow{v_2})$. On a donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. On a par linéarité de s et 1,

$$s(\overrightarrow{e_1}) = s(2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) = 2s(\overrightarrow{v_1}) - s(\overrightarrow{v_2}) = 2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = 2(1, 1) + (1, 2) = (3, 4),$$

et

$$s(\overrightarrow{e_2}) = s(-\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = -s(\overrightarrow{v_1}) + s(\overrightarrow{v_2}) = -\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = -(1, 1) - (1, 2) = (-2, -3).$$

On a donc en colonne dans la base canonique : $N = \operatorname{Mat}_{B_c}(s) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.