S2 PeiP — Orsay 2013-2014
Mathématiques

Corrigé du contrôle n°2 du 18 mars 2014

Exercice 1 - • L'équation caractéristique de (E) est $r^2 - 3r + 2 = 0$, dont les racines sont $r = 1$ et 2. Les solutions de l'équation homogènes sont donc les fonctions

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad \text{avec} \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

• Comme 0 n'est pas racine caractéristique, il existe une solution particulière constante de $y'' - 3y' + 2y = 1$. On voit que $y = \frac{1}{2}$ convient. Par contre 1 est racine simple, et on cherche une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = -e^x$ sous la forme $y = Cxe^x$. On trouve $y' = C(x+1)e^x$ et $y'' = C(x+2)e^x$, d'où

$$y'' - 3y' + 2y = -Ce^x = -e^x \Rightarrow C = 1.$$

Par superposition, une solution particulière de (E) est donc $y_0 = \frac{1}{2} + xe^x$, et les solutions sont

$$y = y_0 + y_H = \frac{1}{2} + xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad \text{avec} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 - On a $(S_1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{x} - y + 3z = 1 \\ -x - y + z = 1 \\ x + y + mz = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - y + 3z = 1 \\ \boxed{-2y} + 4z = 2 \\ 2y + (m-3)z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - y + 3z = 1 \\ \boxed{-2y} + 4z = 2 \\ (m+1)z = 0 \end{cases}$$

D'où, si $\mathbf{m \neq -1}$, (S_1) possède une unique solution $(x, y, z) = (0, -1, 0)$. Si $\mathbf{m = -1}$, z est inconnue non-principale et (S_1) possède une infinité de solutions $x = -z$, $y = 2z - 1$, z quelconque.

$$(S_2) \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ 3x - y + z = m \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ -4y - 2z = m - 3 \\ \boxed{2y} + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ \boxed{2y} + z = 1 \\ 0 = m - 1 \end{cases}$$

Donc, si $\mathbf{m \neq 1}$, le système (S_2) n'a pas de solution. Si $\mathbf{m = 1}$, il y a une infinité de solutions paramétrées par z,

$$x = \frac{1}{2} - \frac{z}{2}\ ,\ y = \frac{1}{2} - \frac{z}{2}\ ,\ z \text{ quelconque.}$$

Exercice 3 - 1. On a $\vec{v} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow$ il existe λ, μ tels que $\vec{v} = \lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = x \\ -\lambda + \mu = y \\ \lambda - 3\mu = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda} + \mu = x \\ 2\mu = y + x \\ -4\mu = z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda} + \mu = x \\ \boxed{2\mu} = x + y \\ 0 = x + 2y + z \end{cases}$$

On a donc $\vec{v} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow x + 2y + z = 0$.

2. Si $\vec{v} = (x, y, z) \in P$, alors on a vu que $\vec{v} = \lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2} \Leftrightarrow \mu = \frac{x+y}{2}$ puis $\lambda = x - \mu = \frac{x-y}{2}$. Les coordonnées de $\vec{v}$ dans $B = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ sont donc $\lambda = \frac{x-y}{2}$ et $\mu = \frac{x+y}{2}$.

3. Tout d'abord, on a $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, a) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{v_3}$ satisfait l'équation de $P \Leftrightarrow 1 + 2 + a = 0 \Leftrightarrow a = -3$.

• Si $a = -3$, on a alors $\overrightarrow{v_3} \in P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ et $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = P$ est de dimension 2.

• Si $a \neq -3$, on a $\overrightarrow{v_3} \notin P$ et donc E est un sev de $\mathbb{R}^3$ strictement plus grand que P. On doit donc avoir $2 = \dim P < \dim E \leq 3$, c'est-à-dire que $\dim E = 3$, et $E = \mathbb{R}^3$ dans ce cas.

La famille $\mathcal{F}$ de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base ssi elle est génératrice, c'est-à-dire ssi $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^3$. Ceci équivaut à $a \neq 3$ d'après ce qui précède.

Exercice 4 - 1. Le sev H de $\mathbb{R}^4$ est défini par une équation $\boxed{y} + 2z + 3t = 0$ qui possède une inconnue principale : y par exemple, et 3 inconnues non principales x, z et t. On a donc $\dim H = 3$.

De plus, on a $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in H \Leftrightarrow y = -2z - 3t \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{u} = (x, -2z - 3t, z, t) = x(1, 0, 0, 0) + z(0, -2, 1, 0) + t(0, -3, 0, 1) = x\overrightarrow{v_1} + z\overrightarrow{v_2} + t\overrightarrow{v_3}$$

avec

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 0, 0)\ ,\ \overrightarrow{v_2} = (0, -2, 1, 0) \text{ et } \overrightarrow{v_3} = (0, -3, 0, 1).$$

D'après le cours, cette famille de solutions canoniques est une base de H. (Le calcul montre qu'elle est génératrice, mais aussi libre à cause des composantes non-principales des vecteurs).

2. On sait que pour compléter la famille libre $B_H = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ en une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit de rajouter un vecteur $\overrightarrow{v_4} \notin H = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$. Par exemple, $\overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, 0)$ convient, puisque $\overrightarrow{e_2}$ ne satisfait pas l'équation de H. Cette famille $B = (B_H, \overrightarrow{v_4})$ reste libre et est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 - 1. Par définition, on a dans $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0)_B,\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} = (0, 1, -1)_B \text{ et } \overrightarrow{c} = \overrightarrow{v_3} - \overrightarrow{v_1} = (-1, 0, 1)_B.$$

2. Le rang de $\mathcal{F} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est le nombre d'inconnues principales du système $(S) : \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} + \lambda_3 \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ qui s'écrit dans la base B :

$$(S) \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} - \lambda_3 = 0 \\ \boxed{\lambda_2} - \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le rang de $\mathcal{F}$ est donc 2. Concrètement, on a la relation $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.

3. La famille $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, puisque $\dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{rang}(\mathcal{F}) = 2$, et donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.