S2 PeiP — Orsay 2013-2014
Mathématiques

Contrôle n°3 du 8 avril 2014

Durée 1 heure 30

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Exercice 1 - On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$E = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+t = 0\}$ et $F = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y+z = 0 = x-2t\}$.

1. Déterminer la dimension et une base de E et F.

2. Déterminer la dimension de $E \cap F$.

3. Que vaut $\dim(E + F)$? Les espaces E et F sont-ils supplémentaires ?

4. Donner une base de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs de E et F.

Exercice 2 - Pour a réel donné, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$. On note $f : X \mapsto AX$ l'application linéaire associée.

1. Déterminer, en fonction de a, le rang de f et une base de l'image de f. Pour quelles valeurs de a, l'application f est-elle surjective ?

2. Pour quels a l'application f est-elle injective ? Donner une base de $\ker f$ si cet espace n'est pas nul.

3. Pour quels a la matrice A est-elle inversible ?

4. Soit $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$. Résoudre l'équation $AX = AX_0$ en fonction de a.

Exercice 3 - On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire $f : X \mapsto AX$ associée.

1. Déterminer le rang de A et une base de l'image de A.

2. Montrer que $\operatorname{Im} A \subset \ker A$.

3. Que peut-on en déduire pour $f \circ f$?

Exercice 4 - Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1, 1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (1, 2)$.

1. Vérifier que $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ dans la base B.

Soit s l'unique application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $s(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$ et $s(\overrightarrow{v_2}) = -\overrightarrow{v_2}$.

2. Quelle est la matrice M de s dans la base B ?

3. Calculer à l'aide de 1 les vecteurs $s(\overrightarrow{e_1})$ et $s(\overrightarrow{e_2})$. En déduire la matrice N de s dans la base canonique.