

Contrôle n°2 du 18 mars 2014

DURÉE 1 HEURE 30 MIN

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 - Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = 1 - e^x.$$

On commencera par déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée.

Exercice 2 - Soit m un paramètre réel. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -x - y + z = 1 \\ x + y + mz = -1 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = m \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

Exercice 3 - Dans \mathbb{R}^3 , on considère le plan P engendré par les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = (1, 1, -3).$$

1. Donner une équation cartésienne du plan P .

2. Soit $\vec{v} = (x, y, z)$ un vecteur de P . Donner les coordonnées de \vec{v} dans la base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de P .

Pour a paramètre réel, on pose $\vec{v}_3 = (1, 1, a)$ et $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

3. Déterminer, en fonction de a , la dimension de $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$. Pour quelles valeurs de a , la famille \mathcal{F} est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 4 - Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-espace vectoriel

$$H = \{ \vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + 2z + 3t = 0 \}.$$

1. Quelle est la dimension de H ? Donner une base B_H de H .

2. Compléter B_H en une base B de \mathbb{R}^4 .

Exercice 5 - Soit $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ une base quelconque de \mathbb{R}^3 , et

$$\vec{a} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \vec{b} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \quad \vec{c} = \vec{v}_3 - \vec{v}_1.$$

1. Donner les coordonnées de \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} dans la base B .

2. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

3. La famille \mathcal{F} est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ?