Feuille d'exercices n°7

Exercice I (Immersions régulières)

Soit A un anneau commutatif. Soit $u\colon P \to A$ un morphisme de A-modules, où P est un A-module projectif de type fini. (Si on le souhaite, on pourra éventuellement faire l'hypothèse simplificatrice que P est libre.)

Le complexe de Koszul $K(u)$ est un complexe de A-modules (noté homologiquement), qui est défini en posant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $K(u)_n := \wedge^n P$:

$$\dots \to \wedge^3 P \to \wedge^2 P \to P \to A \to 0 \to \dots$$

La différentielle $d_k\colon \wedge^k P \to \wedge^{k-1} P$ est définie par

$$d_k(p_1 \wedge \dots \wedge p_k) := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} u(e_i) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e_i} \wedge \dots e_k$$

(La notation $\widehat{e_i}$ signifie que le facteur e_i est omis.)

(1) Vérifier que la différentielle d_k est bien définie et $K(u)$ est bien un complexe de A-modules.

On dira que u est régulier si pour tout $k > 0$, $H_k(K(u)) = 0$, autrement dit si le complexe de Koszul donne lieu à une suite exacte, qui s'interprète comme une résolution projective du A-module $\operatorname{coker} u$:

$$\dots \to \wedge^3 P \to \wedge^2 P \to P \to A \to \operatorname{coker} u \to 0$$

(2) Soit $f \in A$. Notons $P := A$. À quelle condition nécessaire et suffisante le morphisme $P \to A$ de multiplication par f est-il régulier ?

(3) Soit $u\colon P\colon A$ un morphisme de A-modules, avec P un A-module projectif. Soit $g \in A$. On note $P' := P \oplus A$ et on définit $u'\colon P' \to A$ le morphisme étendant u et induisant la multiplication par g sur le terme A. On suppose que u est régulier. Montrer que u' est régulier si et seulement si la multiplication par la classe de g induit un morphisme injectif $\operatorname{coker} u \to \operatorname{coker} u$. (Indication : décrire un sous-complexe de $K(u')$ qui soit isomorphe à $K(u)$ et décrire le complexe quotient.)

(4) Soit $d \in \mathbf{N}$. Soit B un anneau commutatif. On note $A_0 := B[T_1, \dots, T_d]$, $P_0 := A_0^d$. On note $u_0\colon P_0 \to A$ le morphisme dont la matrice soit $\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_d \end{pmatrix}$. Montrer que u_0 est régulier.

(5) Soit A un anneau commutatif. Soit I un idéal engendré par des éléments $f_1, \dots, f_d$. On note $P := A^d$ et $u\colon P \to A$ le morphisme donné par les f_i. On note $A_0 := \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_d]$ et on considère A comme A_0-algèbre par $T_i \longmapsto f_i$.

(5a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $u\colon P \to A$ est régulier ;

(ii) $\operatorname{Tor}_k^{A_0}(A, A_0/I_0) = 0$ pour tout $k > 0$.

(5b) On suppose que $u\colon P \to A$ est régulier. Montrer les affirmations suivantes :

(i) $\operatorname{Tor}_k^{A_0}(A, I_0^m/I_0^{m'}) = 0$ pour tout $k > 0$ et $m \leq m'$.

(ii) pour tout $m \in \mathbf{N}$, $A \otimes_{A_0} I_0^m \xrightarrow{\sim} I^m$.

(iii) pour tout $m \in \mathbf{N}$, I^m/I^{m+1} est un A/I-module libre de type fini.

(iv) pour tout $m \in \mathbf{N}$, le morphisme canonique $\mathbf{S}^m(I/I^2) \to I^m/I^{m+1}$ est un isomorphisme. ($\mathbf{S}^m$ désigne le foncteur puissance symétrique m-ième, qui est ici calculée sur l'anneau A/I.)

(6) Soit $i\colon Z \to X$ une immersion fermée. On dit que i est une immersion régulière si X peut-être recouvert par des ouverts affines $U = \operatorname{Spec}(A)$ tels que $Z = V(I)$ et qu'il existe un morphisme régulier $u\colon P \to A$ dont l'image soit I.

Montrer que si i est une immersion fermée régulière et que l'on note X' l'éclatement de Z dans X, alors le morphisme $\pi\colon X' \to X$ a la propriété que $\pi^{-1}(X - Z) \to X - Z$ est un isomorphisme et que $\pi^{-1}(Z) \simeq \mathbf{P}(\mathscr{N})$, où $\mathscr{N} := \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$, $\mathscr{I}$ désignant l'idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$ définissant Z.

Exercice II

(1) Soit X un schéma. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X. On note $X' := \operatorname{Proj}(\oplus_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{L}^{\otimes n})$. Montrer que $X' \to X$ est un isomorphisme.

(2) Soit $X := \operatorname{Spec}(A)$. Soit $f \in A$ tel que f ne divise pas zéro. Décrire l'éclatement de X en $V(f)$.