Feuille d'exercices n°5

Exercice I (Séries formelles)

Soit A un anneau noethérien. On note $A[[X]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans A.

(1) Soit I un idéal de $A[[X]]$. Pour tout entier $d \in \mathbf{N}$, on note I_d l'ensemble des $a \in A$ tels que $aX^d \in I + (X^{d+1}) \subset A[[X]]$.

(1a) Montrer qu'il existe $d_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $d \geq d_0$, on ait $I_d = I_{d_0}$.

(1b) Construire un idéal de type fini $J \subset I$ de $A[[X]]$ tel que pour tout $d \in \mathbf{N}$, et tout $a \in I_d$, alors $aX^d \in J + (X^{d+1})$.

(1c) Montrer que pour tout $d \in \mathbf{N}$, on a $I \subset J + (X^d)$.

(1d) Montrer que $I \cap (X^{d_0})$ est un idéal de type fini.

(1e) Montrer que I est un idéal de type fini.

(2) Montrer que $A[[X]]$ est un anneau noethérien.

(3) Soit I un idéal de A. On note $\widehat{A} := \lim_{n\in\mathbf{N}} A/I^n$.

(3a) Soit $x_1, \dots, x_k$ des générateurs de l'idéal I. Construire un morphisme surjectif d'anneaux $A[[X_1, \dots, X_k]] \to \widehat{A}$.

(3b) Montrer que $\widehat{A}$ est noethérien.

Exercice II (Platitude et complétion)

Soit A un anneau noethérien et $I \subset A$ un idéal.

(1) On considère l'anneau $A' := \oplus_{n\in\mathbf{N}} I^n T^n \subset A[T]$.

(1a) Montrer que A' est un anneau noethérien.

Soit M un A-module de type fini. On note $M' := \oplus_{n\in\mathbf{N}} (I^n M) T^n \subset M[T]$.

(1b) Montrer que M' est un A'-module de type fini.

Soit $N \subset M$ un sous-A-module. On note $\tilde{N} := \oplus_{n\in\mathbf{N}} ((I^n M) \cap N) T^n$

(1c) Montrer que $\tilde{N}$ est un sous-A'-module de type fini de M'.

(1d) En déduire qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que pour tout $n \geq k$, on ait $(I^n M) \cap N = I^{n-k}((I^k M) \cap N)$. (Ce résultat est le lemme d'Artin-Rees.)

(2) Si M est un A-module de type fini, on note $\widehat{M} = \lim_{n\in\mathbf{N}} M/I^n M$.

(2a) Montrer que le foncteur qui à un A-module de type fini M associe $\widehat{M}$ est exact.

(2b) Montrer que pour tout A-module de type fini M, on a un isomorphisme canonique $\widehat{A} \otimes_A M \xrightarrow{\sim} \widehat{M}$.

(2c) En déduire que $\widehat{A}$ est une A-algèbre plate.

(3) Soit A un anneau local noethérien. On applique la construction précédente avec I l'idéal maximal de A. Montrer que $\widehat{A}$ est une A-algèbre fidèlement plate.

Exercice III (Fidèle platitude)

Soit A un anneau. Soit B une A-algèbre. On note $f\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ le morphisme de schémas correspondant.

On dit que B est fidèlement plate sur A si B est plate sur A (c'est-à-dire que B est un A-module plat) et que pour tout A-module M, $M = 0$ équivaut à $B \otimes_A M = 0$.

(1) On suppose que B est fidèlement plate sur A.

(1a) Soit $M' \to M \to M''$ une suite de A-modules. Montrer qu'elle est exacte si et seulement si $B \otimes_A M' \to B \otimes_A M \to B \otimes_A M''$ est une suite exacte de B-modules.

(1b) Montrer que $A \to B$ est injectif.

(1c) Montrer que pour tout A-module M, l'application évidente $M \to B \otimes_A M$ est injective.

(1d) Montrer que pour tout A-module M, on a $\operatorname{Tor}_1^A(B/A, M) = 0$. En déduire que B/A est un A-module plat.

(1e) Montrer que l'application $f\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ est surjective.

(2) Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

(i) B est fidèlement plate sur A ;

(ii) $A \to B$ est injectif et B/A est un A-module plat ;

(iii) B est plate sur A et $f\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ est surjectif.

(3) Supposons que B soit une A-algèbre fidèlement plate. Montrer que la suite suivante est exacte :

$$0 \to A \to B \to B \otimes_A B \to B \otimes_A B \otimes_A B$$

où $B \to B \otimes_A B$ est $b \longmapsto 1 \otimes b - b \otimes 1$ et où $B \otimes_A B \to B \otimes_A B \otimes_A B$ est $b \otimes c \longmapsto 1 \otimes b \otimes c - b \otimes 1 \otimes c + b \otimes c \otimes 1$.

Exercice IV (Torseurs)

Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine. On se donne $0 \to \mathscr{M}' \xrightarrow{i} \mathscr{M} \xrightarrow{p} \mathscr{M}'' \to 0$ une suite exacte courte de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents.

(On dira ici qu'un S-schéma X est plat s'il existe un recouvrement de X par des ouverts $U_i \simeq \mathrm{Spec}(B_i)$ tels que B_i soit une A-algèbre plate. On pourra se limiter ici au cas où X est affine, c'est-à-dire que $X \simeq \mathrm{Spec}(B)$, auquel cas la platitude se traduit en demandant à B d'être une A-algèbre plate.)

Pour tout S-schéma plat X, on note $\mathscr{T}(X)$ l'ensemble des sections du morphisme de $\mathscr{O}_X$-Modules $\pi^\star\mathscr{M} \xrightarrow{\pi^\star(p)} \pi^\star\mathscr{M}''$ où $\pi\colon X \to S$ est le morphisme canonique. On note $\mathscr{G}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\pi^\star\mathscr{M}'', \pi^\star\mathscr{M}')$.

(1) Montrer que $\mathscr{T}$ et $\mathscr{G}$ sont des foncteurs contravariants de la catégorie des S-schémas plats vers celle des ensembles (ou plus précisément des groupes abéliens dans le cas de $\mathscr{G}$).

(2) Soit X un S-schéma plat.

(2a) Définir une action de $\mathscr{G}(X)$ sur $\mathscr{T}(X)$.

(2b) Montrer que si $\mathscr{T}(X)$ est non vide, alors $\mathscr{G}(X)$ agit simplement transitivement sur $\mathscr{T}(X)$.

(3) On suppose que $\mathscr{M}''$ est de présentation finie.

(3a) Munir $\mathscr{G}(S)$ d'une structure de A-module.

(3b) Montrer que si B est une A-algèbre plate (et $X := \mathrm{Spec}(B)$), alors $\mathscr{G}(X) \simeq B \otimes_A \mathscr{G}(S)$.

À partir de maintenant, on fait l'hypothèse qu'il existe un recouvrement ouvert affine (fini) U_i de S, tel que $\mathscr{T}(U_i) \neq \emptyset$.

(4) On note $X = \bigsqcup_i U_i$. Montrer que $X \simeq \mathrm{Spec}(B)$, que B est une A-algèbre fidèlement plate, et que $\mathscr{T}(X) \neq \emptyset$.

On choisit $t \in \mathscr{T}(X)$.

(5) Montrer qu'il existe $s \in \mathscr{G}(X \times_S X)$ tel que $p_1^\star(t) + s = p_2^\star(t)$.

On note $M := \mathscr{G}(S)$ et on considère un complexe dont on précisera les flèches :

$$0 \to M \to B \otimes_A M \to B \otimes_A B \otimes_A M \to B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A M$$

($B \otimes_A M$ est placé en degré cohomologique 0.)

(6) Montrer que s s'identifie à un élément du H^1 du complexe ci-dessus.

(7) Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{G}(X)$ tel que $s = p_1^\star u - p_2^\star u$.

(8) On pose $t' := t + u \in \mathscr{T}(X)$. Montrer que $p_1^\star t' = p_2^\star t'$.

(9) En déduire que $\mathscr{T}(S) \neq \emptyset$ et donc que $p\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}''$ admet une section.

(10) Soit P un A-module. Montrer que si le faisceau quasi-cohérent sur $\mathrm{Spec}(A)$ associé à P est localement libre de rang fini, alors P est un A-module projectif.

Exercice V (Platitude)

(1) Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons $A := \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$. Notons A' le sous-anneau de A formé des polynômes symétriques. Montrer que $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A')$ est un morphisme fini et plat.

(2) Considérons le morphisme $f\colon \mathbf{A}^2_{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ donné par « $(x, y) \longmapsto (x + y, xy)$ ».

(2a) Le morphisme f est-il plat ?

(2b) Si $(s, p) \in \mathbf{C}^2$, combien d'antécédents par f le point fermé associé à (s, p) possède-t-il ?