Université Paris-Saclay
Année universitaire 2021/2022

M2 Analyse, arithmétique, géométrie
Géométrie algébrique (E. Macrì, J. Riou)

Feuille d'exercices n°3

Exercice I

Soit $\varphi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ un morphisme entre faisceaux cohérents sur un schéma noethérien X.
(1) Montrer que l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathscr{E}_x \to \mathscr{F}_x$ soit surjectif est ouvert.
(2) En général, l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathscr{E}_x \to \mathscr{F}_x$ soit injectif est-il ouvert ?

Exercice II

Soit A une algèbre de type fini sur un corps k. Soit G un groupe fini agissant sur la k-algèbre A. On note A^G la sous-k-algèbre de A formée des éléments fixés par G.
(1) Montrer que A est entière sur A^G.
(2) Montrer l'existence d'une k-algèbre de type fini B telle que $B \subset A^G$ et que A soit entière sur B.
(3) Montrer que A^G est une k-algèbre de type fini.

Exercice III

Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Soit $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ un sous-$\mathscr{O}_X$-module. Est-ce que $\mathscr{G}$ est nécessairement cohérent ?

Exercice IV

Notons $X := \mathbf{A}^2 - O$ le plan affine épointé, c'est-à-dire le complémentaire dans $\mathbf{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[X,Y])$ du fermé $O = V(X,Y)$.
(1) Montrer que l'on a une suite exacte courte de faisceaux quasi-cohérents sur X :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\begin{pmatrix} Y \\ -X \end{pmatrix}} \mathscr{O}_X^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}} \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

(2) Cette suite exacte courte est-elle scindée ?

Exercice V

Supposons que l'on s'est donné une famille F de foncteurs :

- pour tout anneau commutatif A, on a un foncteur F_A de la catégorie des A-modules dans elle-même ;
- pour tout morphisme $A \to B$ d'anneaux commutatifs, on a une transformation naturelle $B \otimes_A F_A(M) \to F_B(B \otimes_A M)$ de B-modules pour tout A-module M. (On suppose que cette transformation se comporte bien par composition des morphismes d'anneaux.)

(1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on peut prendre pour F la famille de foncteurs qui à un A-module M associe sa n-puissance tensorielle (resp. symétrique, extérieure).

On suppose que pour tout anneau A, tout élement $f \in A$ et tout A-module M, le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$A[f^{-1}] \otimes_A F_A(M) \xrightarrow{\sim} F_{A[f^{-1}]}(M[f^{-1}])$$

(2) Soit X un schéma. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Montrer que le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto F_{\Gamma(U,\mathscr{O}_X)}(\mathscr{M}(U))$ est un faisceau quasi-cohérent.
(3) Soit $\mathscr{M}$ un faisceau quasi-cohérent de type fini sur un schéma X. Soit $r \in \mathbf{N}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $x \in X$, $\dim_{\kappa(x)}(\mathscr{M}_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \kappa(x)) \leq r$;

(ii) Pour tout $x \in X$, le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{M}_x$ peut être engendré par r éléments ;

(iii) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x et un épimorphisme $\mathscr{O}_U^r \to \mathscr{M}_{|U}$;

(iv) $\wedge^{r+1}\mathscr{M} = 0$.

Exercice VI

Soit X un schéma. Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille (pas forcément finie) de faisceaux quasi-cohérents sur X. Le produit de faisceaux $\prod_{i\in I} \mathscr{F}_i$ est-il nécessairement quasi-cohérent ?

Exercice VII (Support)

(1) Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X. Le support $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$ est l'ensemble $\{x \in X, \mathscr{F}_x \neq \{0\}\}$.
(1a) Montrer qu'il existe un plus grand ouvert U de X tel que $\mathscr{F}_{|U} \simeq 0$.
(1b) Montrer que l'ouvert U est le complémentaire de l'adhérence $\overline{\mathrm{Supp}(\mathscr{F})}$ de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$.
(2) Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X. Soit $s \in \mathscr{F}(X)$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de U tel que $s_{|U} = 0$. On note $\mathrm{Supp}(s)$ le fermé complémentaire de U. Montrer que $\mathrm{Supp}(s) = \{x \in X, s_x \neq 0 \in \mathscr{F}_x\}$.
(3) Soit X un schéma. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. On suppose que $\mathscr{M}$ est de type fini.
(3a) Soit U un ouvert de X. Supposons qu'il existe des sections $(s_1, \dots, s_n) \in \mathscr{M}(U)^n$ engendrant $\mathscr{M}_{|U}$. Montrer que $\mathrm{Supp}(\mathscr{M}) \cap U = \cup_{i=1}^n \mathrm{Supp}(s_i)$.
(3b) Montrer que $\mathrm{Supp}(\mathscr{M})$ est fermé.
(3c) La conclusion précédente vaut-elle si on ne demande pas à $\mathscr{M}$ d'être de type fini.
(4) Soit A un anneau. Soit M un A-module. On note $\mathrm{Ann}(M)$ l'ensemble des $a \in A$ tels que $aM = 0$. On note $\widetilde{M}$ le faisceau quasi-cohérent sur $\mathrm{Spec}(A)$ associé à M.
(4a) Montrer que l'on a une inclusion entre fermés de $\mathrm{Spec}(A)$: $\overline{\mathrm{Supp}(\widetilde{M})} \subset V(\mathrm{Ann}(M))$.
(4b) Supposons que M soit un A-module de type fini. Montrer que l'on a l'égalité $\mathrm{Supp}(\widetilde{M}) = V(\mathrm{Ann}(M))$ entre parties de $\mathrm{Spec}(A)$.
(4c) Supposons que M soit un A-module de type fini. Notons I un idéal de type fini tel que l'on ait l'inclusion $\mathrm{Supp}(\widetilde{M}) \subset V(I)$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $I^n \cdot M = 0$.
(4d) Soit p un nombre premier. Quels sont les faisceaux quasi-cohérents de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ supportés par $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$?
(5) Soit X un schéma quasi-compact. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau quasi-cohérent de type fini sur X. Soit $\mathscr{I}$ un Idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$ tel que $\mathrm{Supp}(\mathscr{M}) \subset V(\mathscr{I})$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ et un faisceau quasi-cohérent $\mathscr{N}$ sur $Z := V(\mathscr{I}^n)$ tel que $\mathscr{M} \simeq i_\star \mathscr{N}$ où i est l'immersion fermée $i \colon Z \to X$.
(6) Soit X un schéma. Soit $\mathscr{I}$ un Idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$. On note Z le fermé $V(\mathscr{I})$. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. On note $\mathbf{\Gamma}_Z(\mathscr{M})$ le sous-préfaisceau de $\mathscr{M}$ qui à un ouvert U associe l'ensemble des sections $s \in \mathscr{M}(U)$ telles que $\mathrm{Supp}(s) \subset Z \cap U$. Montrer que $\mathbf{\Gamma}_Z(\mathscr{M})$ est un faisceau quasi-cohérent.

Exercice VIII

(1) Soit $X \to S$ un morphisme entre schémas affines. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Montrer que le faisceau de $\mathscr{O}_S$-Modules $f_\star\mathscr{F}$ (défini par $(f_\star\mathscr{F})(U) := \mathscr{F}(f^{-1}(U))$ pour tout ouvert U de S) est quasi-cohérent.
(2) Soit $X \to S$ un morphisme entre schémas. On suppose que S est affine et que X est quasi-compact et quasi-séparé. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Montrer que $f_\star\mathscr{F}$ est quasi-cohérent.
(3) Soit $X \to S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Montrer que $f_\star\mathscr{F}$ est quasi-cohérent.