Université Paris-Saclay
Année universitaire 2021/2022

M2 Analyse, arithmétique, géométrie
Géométrie algébrique (E. Macrì, J. Riou)

Feuille d'exercices n°1

Exercice I (Schéma vide)

(1) Soit A un anneau. Montrer que $\mathrm{Spec}(A)$ est vide si et seulement si $A = 0$.
(2) Soit A un anneau. Soit $f \in A$. Montrer que $D(f)$ est vide si et seulement si f est nilpotent.

Exercice II (Spec)

(1) Soit p un nombre premier.
(1a) Décrire l'espace topologique $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p[T])$.
(1b) Décrire l'espace topologique $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_{(p)})$, où $\mathbf{Z}_{(p)}$ est le localisé de $\mathbf{Z}$ en l'idéal premier (p).
(2) Décrire l'espace topologique $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[[T]])$.

Exercice III (Inversibles dans $A[T]$)

Soit A un anneau commutatif. Soit $f = \sum_n f_n T^n \in A[T]$. On suppose que f est inversible dans l'anneau $A[T]$.
(1) Montrer que $f_0 \in A^\times$.
(2) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. En considérant le morphisme $A[T] \to \kappa(\mathfrak{p})[T]$ (où $\kappa(\mathfrak{p}) := \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$), montrer que pour tout $n \geq 1$, $f_n \in \mathfrak{p}$.
(3) Que peut-on en déduire sur les coefficients f_n pour $n \geq 1$?
(4) Déduire de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $f = \sum_n f_n T^n$ de $A[T]$ soit inversible.

Exercice IV (Ouverts-fermés)

Si A est un anneau commutatif, un idempotent e de A est un élément $e \in A$ tel que $e^2 = e$.
(1) Soit A un anneau local. Montrer que les seuls idempotents de A sont 0 et 1.

À partir de maintenant, on se donne $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique annelé en anneaux locaux. (On rappelle que cela signifie que X est muni d'un faisceau d'anneaux commutatifs et que pour tout $x \in X$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ des germes du faisceau $\mathcal{O}_X$ en x est un anneau local.)
(2) Soit U une partie de X qui est à la fois ouverte et fermée. Montrer qu'il existe une unique section globale $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ telle que $s_{|U} = 1$ et $s_{|X-U} = 0$. On notera 1_U cette section.
(3) Montrer que si U est un ouvert-fermé de X, alors 1_U est un idempotent de l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.
(4) Soit e un idempotent de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. On note U l'ensemble des $x \in X$ tels que le germe e_x soit égal à 1 dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Montrer que U est un ouvert-fermé et que $e = 1_U$.
(5) Montrer qu'il existe une bijection canonique entre l'ensemble des ouverts-fermés de X et l'ensemble des idempotents de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.
(6) L'ensemble des ouverts-fermés de X est stable par réunion finie, intersection finie, passage au complémentaire. Comment ces opérations sur les parties ouvertes-fermées de X se traduisent-elles en termes des idempotents correspondants ? Si $e = 1_U$ et $f = 1_V$ sont deux idempotents correspondant à des ouverts-fermés U et V, déterminer une condition nécessaire et suffisante exprimée en termes de e et f pour que U soit contenu dans V.
(7) Soit A un anneau commutatif. Montrer que l'espace topologique $\mathrm{Spec}(A)$ est connexe si et seulement si A ne possède pas d'autres idempotents que 0 et 1.

Exercice V (Inversibles dans $A[T, T^{-1}]$)

Soit A un anneau réduit (c'est-à-dire que le nilradical de A est nul). Soit $f \in A[T, T^{-1}]$. On suppose que f est inversible.
(1) Dans le cas où A est intègre, montrer que f s'écrit de façon unique sous la forme aT^n pour $a \in A^\times$ et $n \in \mathbf{Z}$.

On définit une application $n \colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathbf{Z}$ de la façon suivante. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on note $n(\mathfrak{p})$ l'unique entier relatif tel que l'on puisse écrire $\overline{f} = \alpha T^{n}(\mathfrak{p})$ dans $\kappa(\mathfrak{p})[T, T^{-1}]$ avec $\alpha \in \kappa(\mathfrak{p})^\times$.
(2) On suppose ici que A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on a $n(\mathfrak{p}) = n(\mathfrak{m})$ [1]. En déduire que f peut s'écrire aT^n avec $a \in A^\times$ et $n \in \mathbf{Z}$.
(3) Dans le cas général, montrer que la fonction $n \colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathbf{Z}$ est localement constante.
(4) En déduire que si on suppose de plus que $\mathrm{Spec}(A)$ est connexe, alors f s'écrit aT^n avec $a \in A^\times$ et $n \in \mathbf{Z}$.
(5) Que peut-il se passer si $\mathrm{Spec}(A)$ n'est pas connexe ?

[1] Indication : considérer $A/\mathfrak{p}$.

Exercice VI (Monoïdes, normalisation)

On appellera ici monoïde un ensemble M muni d'un loi de composition interne associative, commutative et ayant un élément neutre. On les notera additivement. L'exemple de base est l'ensemble **N** des entiers naturels muni de l'addition. Un morphisme de monoïdes est une application préservant l'élément neutre et l'addition. Si A est un anneau commutatif, $(A, \times)$ est un monoïde. Un sous-monoïde N d'un monoïde M est une partie de M contenant l'élément neutre et stable par addition : pour la structure induite, l'inclusion $N \to M$ est un morphisme de monoïdes.

(1) Soit A un anneau commutatif. Soit M un monoïde. Montrer qu'il existe une A-algèbre (que l'on notera $A[M]$ ou $A[T^M]$) munie d'un morphisme de monoïdes $T\colon M \to (A[M], \times)$ (on notera ici $T^m \in A[M]$ l'image de $m \in M$ par T) vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute A-algèbre B munie d'un morphisme de monoïdes $U\colon M \to (B, \times)$, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\varphi\colon A[M] \to B$ tel que $U = \varphi \circ T$.

Notons $M := \mathbf{N} - \{1\}$.

(2) Montrer que M est un sous-monoïde de **N**.

(3) Dans cette question, on suppose que A sera soit **Z** soit un corps. Montrer que $A[M]$ s'identifie à un sous-anneau de $A[\mathbf{N}]$ et que $A[\mathbf{N}]$ est le normalisé de $A[M]$ [2].

(4) Soit X un monoïde. Supposons donnés deux éléments d et t de X tels que $d + d + d = t + t$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de monoïdes $\varphi\colon M \to X$ tel que $\varphi(2) = d$ et $\varphi(3) = t$.

(5) En déduire un isomorphisme canonique $A[M] \simeq A[D, T]/(D^2 - T^3)$.

Exercice VII (Déterminant)

Soit n un entier naturel non nul. Soit $M = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(A)$ où A est l'anneau des polynômes à coefficients entiers en n^2 indéterminées X_{ij}. On considère det $\in A$ comme étant le déterminant de la matrice M.

(1) Soit k un corps. Montrer que det est irréductible dans l'anneau $A \otimes_{\mathbf{Z}} k \simeq k[X_{ij}, 1 \leq i, j \leq n]$. (Indication : utiliser le caractère homogène du déterminant et évaluer le déterminant sur des (familles de) matrices bien choisies.)

(2) Montrer que det est irréductible dans A.

(3) Montrer que $V(\det)$ est un espace topologique irréductible.

[2] Si B est un anneau intègre, le normalisé de B est la clôture intégrale de B dans son corps des fractions.