Feuille 9 : Riemann-Roch pour les courbes projectives lisses.

Dans toute la suite on note k un corps parfait, X/k une courbe projective lisse sur k, de genre g, de corps de fonctions associé $k(X)$ (tel que k est algébriquement fermé dans $k(X)$). On note K_X un diviseur canonique sur X. Par ailleurs, étant donné un diviseur $D = \sum n_P[P]$, (la somme portant sur l'ensemble X_f des points fermés de X), on note

$$D_0 := \sum_{n_P>0} n_P[P] \quad \text{et} \quad D_\infty := -\sum_{n_P<0} n_P[P].$$

On a $D = D_0 - D_\infty$ et on dit que D_0 est le *diviseur des zéros* et D_∞ est le *diviseur des pôles*. Tous deux sont *effectifs*, au sens où leurs coefficients n_P sont tous ≥ 0. On note $E \geq 0$ pour dire que E est un diviseur effectif. Enfin, si D est un diviseur, on notera, pour soulager les notations, $\mathcal{L}(D)$ au lieu de $\mathcal{L}(D)(X)$ si il n'y a pas de confusion possible.

Exercice 1 Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$. Montrer que

$$\deg D \geq 2g - 1 \Rightarrow \ell(K_X - D) = 0.$$

Un diviseur tel que $\ell(K_X - D) = 0$ est dit *non-spécial*.

Exercice 2 Supposons que $g \geq 1$ et que $X(k) \neq \emptyset$. Définir une injection[1] de $X(k)$ dans $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Notons $K := k(X)$. Pour toute place P (*i.e.* point fermé de X) on note $\widehat{K}_P$ le complété correspondant, d'anneau d'entiers $\widehat{\mathcal{O}}_P$, de corps résiduel $k(P)$. On définit l'*anneau des adèles* de K comme étant le sous-anneau, noté $\mathbb{A}_K$, de $\prod_P \widehat{K}_P$ dont les éléments sont les $\alpha := (\alpha_P)$ tels que pour presque tout P (*i.e.* tous sauf un nombre fini) on a $\alpha_P \in \widehat{O}_P$. Le corps K s'injecte diagonalement dans $\mathbb{A}_K$ (par $x \mapsto (x, \ldots, x, \ldots)$ et $\widehat{K}_P$ s'injecte dans $\mathbb{A}_K$ par $x \mapsto (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)$. On étend la valuation v_P correspondant à P sur $\mathbb{A}_K$ par $v_P(\alpha) := v_P(\alpha_P)$. Enfin, pour tout diviseur D, on pose

$$\mathbb{A}_K(D) := \{\alpha \in \mathbb{A}_K \mid \forall P \;\; v_P(\alpha) \geq -v_P(D)\}.$$

Exercice 3 (Approximation forte pour les corps de fonctions : préliminaires) On utilise les notations ci-dessus.

1. Vérifier que $\mathbb{A}_K(D)$ est un sous-k-e.v. de $\mathbb{A}_K$ tel que $\mathbb{A}_K(D) \cap K = \mathcal{L}(D)$.
2. Montrer que si D_1, D_2 sont deux diviseurs tels que $D_1 \leq D_2$ alors
$$\mathbb{A}_K(D_1) \subset \mathbb{A}_K(D_2) \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{A}_K(D_2)/A_K(D_1) = \deg D_2 - \deg D_1.$$
3. Montrer que si $D_1 \leq D_2$ alors on a la suite exacte de k-espaces vectoriels
$$0 \to \mathcal{L}(D_2)/\mathcal{L}(D_1) \to \mathbb{A}_K(D_2)/\mathbb{A}_K(D_1) \to (\mathbb{A}_K(D_2)/K) \Big/ (\mathbb{A}_K(D_1)/K) \to 0.$$

[1] on peut définir une structure de variété algébrique sur k, sur $\mathrm{Pic}^0(X)$: on dit que c'est la Jacobienne de X/k. C'est une variété abélienne et l'injection précédente donne une inclusion de la courbe X/k dans sa Jacobienne.

4. En déduire que si $D_1 \leq D_2$ et si D_1 est non-spécial, alors D_2 est aussi non-spécial.
5. En déduire que si D est non-spécial alors $\mathbb{A}_K = \mathbb{A}_K(D) + K$.

Exercice 4 (Approximation forte pour les corps de fonctions) Soient $n \geq 1$ et $S := \{P_\infty, P_1, \ldots, P_n\}$ un ensemble de points fermés de X. Notons, pour $1 \leq i \leq n$, v_i la valuation qui correspond à P_i. Soient $x_1, \ldots, x_n \in K$ et $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que[2]

$$\exists x \in K \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad v_i(x - x_i) = m_i \quad \text{et} \quad \forall P \in X_f \backslash S, \quad v_P(x) \geq 0.$$

On pourra utiliser l'exercice précédent et introduire, pour N assez grand, le diviseur

$$D := NP_\infty - \sum_{i=1}^{n}(m_i + 1)P_i \quad \text{et l'adèle} \quad \alpha = \begin{cases} x_i & \text{si } P = P_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5 (Formule du produit pour les corps de fonctions) Soit $x \in K \backslash k$. Montrer que

$$\deg(x)_0 = [K : k(x)].$$

On supposera connue l'inégalité $\leq$.

Exercice 6 (Caractérisation de $\mathbb{P}^1_k$) Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

1. X est de genre 0 et $X(k) \neq \emptyset$.
2. $\exists f \in k(X) \quad \deg(f)_\infty = 1$.
3. $\exists x \in k(X) \quad k(X) = k(x)$ (*i.e.* $X \simeq \mathbb{P}^1_k$).

Exercice 7 (Rationnalité de la fonction Zéta pour les courbes projectives lisses sur les corps finis) On suppose ici que $k = \mathbb{F}_q$ où $q = p^n$ avec $n \geq 1$, p premier, et $\mathbb{F}_q$ est un corps à q éléments. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$A_n := \{D \in \mathrm{Div}(X) \mid D \geq 0 \quad \text{et} \quad \deg D = n\}.$$

1. Montrer que A_n est de cardinal fini pour tout $n \geq 0$. On note a_n ce cardinal. Interpréter a_1.
2. Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathrm{Pic}^n(X)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Pic}(X)$ formé des classes de diviseurs de degré n. Montrer que $\mathrm{Pic}^0(X)$ est fini. On note h son cardinal[3].
3. Notons[4]$\delta \geq 1$ l'entier tel que $\deg(\mathrm{Div}(X)) = \delta\mathbb{Z}$. Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$. Montrer que

$$\mathrm{Card}\left(\{D' \in \mathrm{Cl}(D) \mid \ D' \geq 0\}\right) = \frac{q^{\ell(D)} - 1}{q - 1}.$$

[2]Ceci est le théorème d'approximation forte. Il y a également un énoncé analogue pour les corps de nombres. Noter que l'on ne demande rien en la place P_∞ !

[3]h s'appelle le *nombre de classes* de $\mathbb{F}_q(X)/\mathbb{F}_q$.

[4]On pourrait en fait montrer que $\delta = 1$. Pour voir ceci et poursuivre l'exercice cf l'exercice A.8.11 p. 150 du livre *Diophantine Geometry, An Introduction* de Hindry et Silverman. Pour en savoir encore plus sur la fonction Zéta, cf. l'appendice C du livre *Algebraic Geometry* de Hartshorne.

4. Soit $n \geq 0$. Montrer que $a_n = 0$ si $\delta \nmid n$ et donner la valeur de a_n si $n \geq 2g - 1$ et $\delta \mid n$.
5. En déduire que la série formelle (que l'on appelle *fonction Zéta de* $X/\mathbb{F}_q$)

$$Z(T) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$$

   est en fait une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{Q}$.