Feuille 8 : Autour de l'anneau $\widetilde{\mathbb{E}}^+$

Dans toute la suite p désigne un nombre premier. Si $K/\mathbb{Q}_p$ est une extension finie, on notera G_K le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Exercice 1 Soit A un p-anneau d'aneau résiduel parfait R.

1. Montrer qu'il existe une unique application $r : R \to A$ commutant à $x \mapsto x^p$, telle que la composée $\mathrm{pr} \circ r$ avec la projection canonique pr soit l'identité sur R. On note $[\cdot]_A$ cette application.
2. Montrer que si A est de caractéristique p, alors $[\cdot]_A$ est un morphisme d'anneaux.
3. Soit de plus A' un p-anneau d'anneau résiduel parfait R'. Soit $\bar{\varphi} : R \to R'$ un morphisme d'anneaux et $\varphi : A \to A'$ un morphisme relevant $\bar{\varphi}$. Montrer que

$$\forall x \in R, \quad \varphi([x]_A) = [\bar{\varphi}(x)]_{A'}.$$

Exercice 2 1. Si R est un anneau de caractéristique p, interpréter l'anneau $\mathbb{R}(R)$ comme une limite projective.

2. On note $\widetilde{\mathbb{E}}^+ = \mathbb{R}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) = \mathbb{R}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ et on définit $v_{\mathbb{E}}(x) := v_p(x^{(0)})$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{E}}^+$. Justifier que $v_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ est une valuation.
3. Montrer que la topologie sur $\widetilde{\mathbb{E}}^+$ donnée par la valuation $v_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ est la même que celle donnée par sa définition comme limite projective.

Exercice 3 On note $\mathfrak{M}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ l'idéal de valuation de $\widetilde{\mathbb{E}}^+$, *i.e.*

$$\mathfrak{M}_{\widetilde{\mathbb{E}}} := \{x \in \widetilde{\mathbb{E}}^+ \mid v_{\widetilde{\mathbb{E}}}(x) > 0\}.$$

On note par ailleurs $Fr(\widetilde{\mathbb{E}}^+)$ le corps des fractions de $\widetilde{\mathbb{E}}^+$.

1. On note $Fr(\widetilde{\mathbb{E}}^+)$ le corps des fractions de $\widetilde{\mathbb{E}}^+$. Montrer que $\widetilde{\mathbb{E}}^+$ est son anneau des entiers.
2. Déterminer le groupe des valuations $v_{\widetilde{\mathbb{E}}}(\widetilde{\mathbb{E}}^+)$.

Exercice 4 Montrer que le corps résiduel de $Fr(\widetilde{\mathbb{E}}^+)$, $k_{\widetilde{\mathbb{E}}} := \widetilde{\mathbb{E}}^+/\mathfrak{M}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$, est algébriquement clos (on déterminera explicitement son corps résiduel).

Exercice 5 Montrer que $Fr(\widetilde{\mathbb{E}}^+)^\times$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}], \mathbb{C}_p^\times)$ en tant que $\mathbb{Z}$-module.

Exercice 6 Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie. En utilisant le théorème d'Ax-Sen-Tate, déterminer $(\widetilde{\mathbb{E}}^+)^{G_K}$.

Exercice 7 Soit $\overline{\pi} := \varepsilon - 1 \in \widetilde{\mathbb{E}}^+$ où ε est donné par $(1, \varepsilon^{(1)}, \ldots)$ avec $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. Calculer $v_{\widetilde{\mathbb{E}}}(\overline{\pi})$.

Exercice 8 Calculer dans $\widetilde{\mathbb{E}}^+$ le représentant de Teichmüller $[a]$ de $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ (on notera $\tilde{a}$ le Teichmüller de a dans $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$).

Exercice 9 Soit $x \in \widetilde{\mathbb{E}}^+$. Montrer que l'application $G_{\mathbb{Q}_p} \to \widetilde{\mathbb{E}}^+$ donnée par $\sigma \mapsto \sigma(x)$ est continue. Même question en remplaçant $\widetilde{\mathbb{E}}^+$ par $\mathbb{C}_p$.

Exercice 10 En utilisant la propriété universelle de l'anneau des vecteurs de Witt (théorème 2.29 des notes de cours de Colmez) on veut donner un théorème de structure des anneaux de valuation discrète complets. Il y a deux énoncés, un dans le cas non-ramifié et un pour le cas ramifié.

1. Soit k un corps parfait de caractéristique p. Montrer qu'il existe, à isomorphisme unique près, un unique anneau de valuation discrète, complet pour la valuation v, admettant k comme corps résiduel, et qui est tel que $v(p) = 1$.
2. Soit A un anneau de valuation discrète, complet, de caractéristique zéro, de corps résiduel parfait k, de caractéristique p. Posons $e = v(p)$. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux de $W(k)$ (anneau des vecteurs de Witt de k) dans A qui commute à la projection sur k.
3. Dans la situation de la question précédente, montrer que le morphisme est injectif et que A est un $W(k)$-module libre de rang e.

Exercice 11 Montrer que $Fr(\widetilde{\mathbb{E}}^+)$ est algébriquement clos.